# MTA-IAPT Pre-Regional Mathematical Olympiad(PRMO),2018

**Date: August 19, 2018** **Time: 10 AM to 1 PM**

**Number of Questions:30** Max Marks: 102

## INSTRUCTIONS

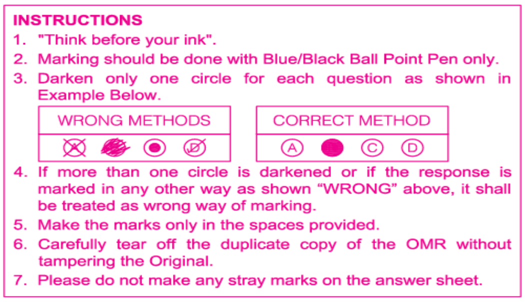
**1.** Use of mobile phones, smartphones, ipads, calculators, programmable wrist watches is **STRICTLY PROHIBITED.** Only ordinary pens and pencils are allowed inside the examination hall.

**2.** The correction is done by machines through scanning. On the OMR Sheet, darken bubbles completely with a black pencil or a black or blue ball pen. Darken the bubbles completely only after you are sure of your answer; else, erasing may lead to the OMR sheet getting damaged and the machine may not be able to read the answer.

**3.** The name, email address, and date of birth entered on the OMR sheet will be your login credentials for accessing your PRMO score.

**4.** Incomplete/Incorrectly and carelessly filled information may disqualify your candidature.

**5.** Each question has a one or two digit number as answer. The first diagram below shows improper and proper way of darkening the bubbles with detailed instructions. The second diagram shows how to mark a 2-digit number and a 1-digit number.


INSTRUCTIONS
1. "Think before your ink".
2. Marking should be done with Blue/Black Ball Point Pen only.
3. Darken only one circle for each question as shown in Example Below.
WRONG METHODS | CORRECT METHOD
4. If more than one circle is darkened or if the response is marked in any other way as shown "WRONG" above, it shall be treated as wrong way of marking.
5. Make the marks only in the spaces provided.
6. Carefully tear off the duplicate copy of the OMR without tampering the Original.
7. Please do not make any stray marks on the answer sheet.

**6.** The answer you write on OMR sheet is irrelevant. The darkened bubble will be cosidered as your final answer.

**7.** Questions 1 to 6 carry 2 marks each; questions 7 to 21 carry 3 marks each; questions 22 to 30 carry 5 marks each.

**8.** All questions are compulsory.

**9.** There are no negative marks.

**10.** Do all rough work in the space provided below for it. You also have blank pages at the end of the question paper to continue with rough work.

**11.** After the exam, you may take away the Candidate's copy of the OMR sheet.

**12.** Preserve your copy of OMR sheet till the end of current olympiad season. You will need it later for verification purposes.

**13.** You may take away the question paper after the examination.

(हिंदी दिशानिर्देश पुस्तिका के अंतिम पृष्ठ पर हैं)

**1.** A book is published in three volumes, the pages being numbered from 1 onwards. The page numbers are continued from the first volume to the second volume to the third. The number of pages in the second volume is 50 more than that in the first volume, and the number pages in the third volume is one and a half times that in the second. The sum of the page numbers on the first pages of the three volumes is 1709. If $n$ is the last page number, what is the largest prime factor of $n$?

**2.** In a quadrilateral $ABCD$, it is given that $AB = AD = 13, BC = CD = 20, BD = 24$. If $r$ is the radius of the circle inscribable in the quadrilateral, then what is the integer closest to $r$?

**3.** Consider all 6-digit numbers of the form $abccba$ where $b$ is odd. Determine the number of all such 6-digit numbers that are divisible by 7.

**4,** The equation $166 \times 56 = 8590$ is valid in some base $b \geq 10$ (that is, $1, 6, 5, 8, 9, 0$ are digits in base $b$ in the above equation). Find the sum of all possible values of $b \geq 10$ satisfying the equation.

**5.** Let $ABCD$ be a trapezium in which $AB \parallel CD$ and $AD \perp AB$. Suppose $ABCD$ has an incircle which touches $AB$ at $Q$ and $CD$ at $P$. Given that $PC = 36$ and $QB = 49$, find $PQ$.

**6.** Integers $a$, $b$, $c$ satisfy $a + b - c = 1$ and $a^2 + b^2 - c^2 = -1$. What is the sum of all possible values of $a^2 + b^2 + c^2$?

---

**SPACE FOR ROUGH WORK**

1. एक पुस्तक तीन खंडों में प्रकाशित है, और कुल पृष्ठ संख्या 1 से शुरू होती है। दूसरे खंड की पृष्ठ संख्या पहले खंड के आगे से शुरू होती है व तीसरे की दूसरे के आगे से। दूसरे खंड में पहले खंड से 50 अधिक पृष्ठ हैं, व तीसरे खंड में दूसरे से डेढ़ गुना पृष्ठ हैं। तीनों खंडों के पृथम पृष्ठ की पृष्ठ संख्या का योग 1709 है। अगर $n$ अंतिम पृष्ठ संख्या है, तो $n$ को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी अभाज्य संख्या कौनसी है?

2. एक चतुर्भुज $ABCD$ में ये दिया हुआ है कि $AB = AD = 13, BC = CD = 20$ व $BD = 24$ है। अगर $r$ इस चतुर्भुज के अंदर बनाए जा सकने वाले अन्तःवृत्त की त्रिज्या है, तो $r$ से निकटम पूर्णांक का मान क्या होगा?

3. ऐसी 6-अंकों की संख्या $abccba$ के बारे में सोचो जिनमें $b$ विषम है। ऐसी कितनी 6-अंकों की संख्याएँ होंगीं जो कि 7 से विभाजित हो जाती हैं?

4. समीकरण $166 \times 56 = 8590$ किसी आधार (base) $b \geq 10$ में सही है (मतलब कि $1, 6, 5, 8, 9, 0$ आधार (base) $b$ में अंक हैं)। ऐसी सभी सम्भव संख्याओं $b \geq 10$ का योग क्या होगा?

5. $ABCD$ एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें कि $AB \parallel CD$ व $AD \perp AB$। मान लो कि इस चतुर्भुज का एक अंतःवृत्त है। मान लो कि यह अंतःवृत्त $AB$ से $Q$ में व $CD$ से $P$ में मिलता है। अगर $PC = 36$ व $QB = 49$ तो $PQ$ का मान क्या होगा?

6. $a, b, c$ ऐसे पूर्णांक हैं जिनके लिए $a + b - c = 1$ व $a^2 + b^2 - c^2 = -1$. $a^2 + b^2 + c^2$ के जो भी मान संभव हैं, उनका योग क्या होगा?

---

रफ़ कार्य के लिए जगह

**7.** A point $P$ in the interior of a regular hexagon is at distances 8,8,16 units from three consecutive vertices of the hexagon, respectively. If $r$ is radius of the circumscribed circle of the hexagon, what is the integer closest to $r$?

**8.** Let $AB$ be a chord of a circle with centre $O$. Let $C$ be a point on the circle such that $\angle ABC = 30^\circ$ and $O$ lies inside the triangle $ABC$. Let $D$ be a point on $AB$ such that $\angle DCO = \angle OCB = 20^\circ$. Find the measure of $\angle CDO$ in degrees.

**9.** Suppose $a, b$ are integers and $a + b$ is a root of $x^2 + ax + b = 0$. What is the maximum possible value of $b^2$?

**10.** In a triangle $ABC$, the median from $B$ to $CA$ is perpendicular to the median from $C$ to $AB$. If the median from $A$ to $BC$ is 30, determine $(BC^2 + CA^2 + AB^2)/100$.

**11.** There are several tea cups in the kitchen, some with handles and the others without handles. The number of ways of selecting two cups without a handle and three with a handle is exactly 1200. What is the maximum possible number of cups in the kitchen?

---

**SPACE FOR ROUGH WORK**

7. बिंदु $P$ एक सम-षट्भुज का भीतरी बिंदु है और षट्भुज के तीन क्रमानुगत कोनों से उसकी दूरी क्रमशः $8, 8$ व $16$ है। अगर $r$ षट्भुज के परिवृत्त की त्रिज्या का मान है तो $r$ के सबसे क़रीब कौनसा पूर्णांक होगा?

8. $AB$ एक वृत्त की जीवा है जिसका केंद्र $O$ है। मान लो कि $C$ वृत्त पर एक ऐसा बिंदु है जिससे कि $\angle ABC = 30°$ व $O$ त्रिभुज $ABC$ के अंदर है। मान लो कि $D$ वृत्त $AB$ पर एक ऐसा बिंदु है जिससे कि $\angle DCO = \angle OCB = 20°$। $\angle CDO$ का मान डिग्री में पता करो।

9. मान लो कि $a + b$ समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ का एक हल है। $b^2$ का अधिकतम सम्भव मान क्या है?

10. एक त्रिभुज $ABC$ में $B$ से $CA$ तक की मध्यिका $C$ से $AB$ तक की मध्यिका से लम्ब है। अगर $A$ से $BC$ तक की मध्यिका की लम्बाई $30$ है तो $(BC^2 + CA^2 + AB^2)/100$ का मान ज्ञात करो।

11. किचन में कई चाय के कप हैं, कुछ में हैंडल है, और कुछ में नहीं है। अगर इनमें से दो कप बिना हैंडल के व तीन कप हैंडल के चुनने हों तो यह 1200 तरीकों से किया जा सकता है। किचन में कितने कप हैं?

---

रफ़ कार्य के लिए जगह

**12.** Determine the number of 8-tuples $(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_8)$ such that $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_8 \in \{1, -1\}$ and

$$\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 3\epsilon_3 + \cdots + 8\epsilon_8$$

is a multiple of 3.

**13.** In a triangle $ABC$, right-angled at $A$, the altitude through $A$ and the internal bisector of $\angle A$ have lengths 3 and 4, respectively. Find the length of the median through $A$.

**14.** If $x = \cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 3^\circ \cdots \cos 89^\circ$ and $y = \cos 2^\circ \cos 6^\circ \cos 10^\circ \cdots \cos 86^\circ$, then what is the integer nearest to $\frac{2}{7} \log_2(y/x)$ ?

**15.** Let $a$ and $b$ be natural numbers such that $2a - b, a - 2b$ and $a + b$ are all distinct squares. What is the smallest possible value of $b$?

**16.** What is the value of

$$\sum_{\substack{1 \le i < j \le 10 \\ i+j=\text{odd}}} (i+j) - \sum_{\substack{1 \le i < j \le 10 \\ i+j=\text{even}}} (i+j)\,?$$

---

**SPACE FOR ROUGH WORK**

12. ऐसे कितने क्रमवार-समूह्य $(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_8)$ हैं जिसमें $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_8 \in \{-1, +1\}$ व $\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 3\epsilon_3 + \cdots + 8\epsilon_8$ का मान 3 से भाज्य हो?

13. एक त्रिभुज $ABC$, जिसमें कोण $A$ समकोण है, ऐसा है कि $A$ से लम्ब की लम्बाई व $\angle A$ के कोण-समद्विभाजक की लम्बाई क्रमशः 3 व 4 है। $A$ से मध्यिका की लम्बाई कितनी होगी?

14. अगर $x = \cos 1° \cos 2° \cos 3° \cdots \cos 89°$ व $y = \cos 2° \cos 6° \cos 10° \cdots \cos 86°$ तो संख्या $\frac{2}{7} \log_2(y/x)$ के सबसे क़रीब कौनसा पूर्णांक होगा?

15. मान लो कि $a$ व $b$ ऐसी प्राकृतिक संख्या हैं जिससे कि $2a - b, a - 2b$ व $a + b$ सभी अलग-अलग पूर्णांकों के वर्ग हैं। $b$ का न्यूनतम सम्भव मान क्या होगा?

16. निम्न का मान पता करो:

$$\sum_{\substack{1 \le i < j \le 10 \\ i+j=\text{odd}}} (i+j) - \sum_{\substack{1 \le i < j \le 10 \\ i+j=\text{even}}} (i+j)?$$

---

रफ़ कार्य के लिए जगह

**17.** Triangles $ABC$ and $DEF$ are such that $\angle A = \angle D$, $AB = DE = 17$, $BC = EF = 10$ and $AC - DF = 12$. What is $AC + DF$?

**18.** If $a, b, c \geq 4$ are integers, not all equal, and $4abc = (a+3)(b+3)(c+3)$, then what is the value of $a + b + c$?

**19.** Let $N = 6 + 66 + 666 + \cdots + 666\cdots66$, where there are hundred 6's in the last term in the sum. How many times does the digit 7 occur in the number $N$?

**20.** Determine the sum of all possible positive integers $n$, the product of whose digits equals $n^2 - 15n - 27$.

**21.** Let $ABC$ be an acute-angled triangle and let $H$ be its orthocentre. Let $G_1$, $G_2$ and $G_3$ be the centroids of the triangles $HBC$, $HCA$ and $HAB$, respectively. If the area of triangle $G_1G_2G_3$ is 7 units, what is the area of triangle $ABC$?

---

**SPACE FOR ROUGH WORK**

17. $ABC$ व $DEF$ ऐसे त्रिभुज हैं कि $\angle A = \angle D, AB = DE = 17, BC = EF = 10$ और $AC - DF = 12$ है। $AC + DF$ का मान क्या है?

18. अगर $a, b, c \geq 4$ पूर्णांक हैं, सभी बराबर नहीं हैं, और $4abc = (a+3)(b+3)(c+3)$ तो $a+b+c$ का मान क्या है?

19. मान लो कि $N = 6 + 66 + 666 + \cdots + 666\cdots66$ जहाँ आख़िरी संख्या में सौ 6 के अंक हैं। $N$ में अंक 7 कितनी बार आएगा?

20. ऐसे सभी धनात्मक पूर्णांकों का योग पता करो जिनके अंकों का गुणनफल $n^2 - 15n - 27$ है।

21. मान लो कि $ABC$ एक न्यूनकोण त्रिभुज है और $H$ उसका लंबकेंद्र है। मान लो कि $G_1, G_2$ व $G_3$ क्रमशः त्रिभुज $HBC, HCA$ व $HAB$ के केंद्रक हैं। अगर त्रिभुज $G_1G_2G_3$ का क्षेत्रफल 7 है, तो त्रिभुज $ABC$ का क्षेत्रफल कितना होगा?

---

रफ़ कार्य के लिए जगह

**22.** A positive integer $k$ is said to be *good* if there exists a partition of $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ in to disjoint proper subsets such that the sum of the numbers in each subset of the partition is $k$. How many *good* numbers are there?

**23.** What is the largest positive integer $n$ such that

$$\frac{a^2}{\frac{b}{29}+\frac{c}{31}}+\frac{b^2}{\frac{c}{29}+\frac{a}{31}}+\frac{c^2}{\frac{a}{29}+\frac{b}{31}} \geq n(a+b+c)$$

holds for all positive real numbers $a, b, c$.

**24.** If $N$ is the number of triangles of different shapes (i.e., not similar) whose angles are all integers (in degrees), what is $N/100$?

**25.** Let $T$ be the smallest positive integer which, when divided by $11, 13, 15$ leaves remainders in the sets $\{7, 8, 9\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ respectively. What is the sum of the squares of the digits of $T$?

**26.** What is the number of ways in which one can choose $60$ unit squares from a $11 \times 11$ chessboard such that no two chosen squares have a side in common?

---

**SPACE FOR ROUGH WORK**

22. एक पूर्णांक $k$ को हम अच्छा कहेंगे अगर $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ को हम उचित उपसमूच्च्यों (proper subsets) में विभाजित कर सकते हैं (ऐसे कि एक संख्या एक ही उपसमूच्च्य में हो) ताकि हर उपसमूच्च्य में आने वाली संख्याओं का योग $k$ हो। कितनी संख्याएँ अच्छी हैं?

23. ऐसा सबसे बड़ा पूर्णांक $n$ कौनसा है जिससे कि

$$\frac{a^2}{\frac{b}{29}+\frac{c}{31}}+\frac{b^2}{\frac{c}{29}+\frac{a}{31}}+\frac{c^2}{\frac{a}{29}+\frac{b}{31}} \geq n(a+b+c)$$

सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं $a, b, c$ के लिए सच हो?

24. अगर $N$ अलग अलग आकार के त्रिभुज (मतलब असमरूप त्रिभुज) हैं जिनके सभी कोण (डिग्री में) पूर्णांक हैं तो $[N/100]$ का मान क्या होगा?

25. मान लो कि $T$ सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक है जिसका $11, 13$ व $15$ से विभाजन करने पर शेष क्रमशः समूच्च्य $\{7, 8, 9\}, \{1, 2, 3\}$ व $\{4, 5, 6\}$ में है। तो फिर $T$ के अंकों के वर्ग का योग क्या होगा?

26. $11 \times 11$ की शतरंज की बिसात से $60$ इकाई वर्ग कितनी तरह से चुन सकते हैं कि चुने हुए वर्गों की कोई भी भुजा साझा ना हो?

---

रफ़ कार्य के लिए जगह

**27.** What is the number of ways in which one can colour the squares of a $4 \times 4$ chessboard with colours red and blue such that each row as well as each column has exactly two red squares and two blue squares?

**28.** Let $N$ be the number of ways of distributing 8 chocolates of different brands among 3 children such that each child gets at least one chocolate, and no two children get the same number of chocolates. Find the sum of the digits of $N$.

**29.** Let $D$ be an interior point of the side $BC$ of a triangle $ABC$. Let $I_1$ and $I_2$ be the incentres of triangles $ABD$ and $ACD$ respectively. Let $AI_1$ and $AI_2$ meet $BC$ in $E$ and $F$ respectively. If $\angle BI_1E = 60^\circ$, what is the measure of $\angle CI_2F$ in degrees?

**30.** Let $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ be a polynomial in which $a_i$ is a non-negative integer for each $i \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$. If $P(1) = 4$ and $P(5) = 136$, what is the value of $P(3)$?

---

**SPACE FOR ROUGH WORK**

27. $4 \times 4$ की शतरंज की बिसात के हर एक वर्ग को लाल या नीले में रंगना है, ऐसे कितने तरीक़े होंगे कि हर एक बेड़ी पंक्ति और हर एक खड़ी पंक्ति में दो नीले व दो लाल वर्ग हों?

28. मान लो कि अलग-अलग कम्पनियों की 8 चोकलेट को तीन बच्चों में $N$ तरीक़ों से बाँटा जा सकता है जिससे कि हर बच्चे को कम से कम एक चोकलेट मिले और किन्हीं भी दो बच्चों को बराबर की संख्या में चोकलेट ना मिले। $N$ के अंकों का योग कितना होगा?

29. मान लो कि $D$ एक त्रिभुज $ABC$ की भुजा $BC$ का आंतरिक बिंदु है। मान लो कि $I_1$ व $I_2$ क्रमशः त्रिभुज $ABC$ व त्रिभुज $ACD$ के अंतःकेंद्र हैं। मान लो कि रेखा $AI_1$ व रेखा $AI_2$ रेखा $BC$ से क्रमशः $E$ व $F$ में मिलती है। अगर $\angle BI_1E = 60°$, तो डिग्री में $\angle CI_2F$ का मान क्या होगा?

30. यदि $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ एक बहुपद है जहाँ $a_i$ अऋणात्मक पूर्णांक हैं, व $P(1) = 4$ व $P(5) = 136$ तो $P(3)$ का मान क्या होगा?

---

रफ़ कार्य के लिए जगह

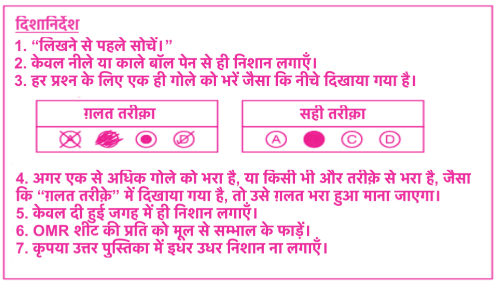
# MTA-IAPT पूर्व-क्षेत्रीय गणित ओलम्पियाड (PRMO), 2018

दिनांक: अगस्त 19, 2018 — समय: 10:00 प्रातः से 01:00 दोपहर

कुल प्रश्न: 30 — अधिकतम अंक: 102

## दिशानिर्देश

1. मोबाइल फ़ोन, स्मार्टफ़ोन, टैब्लेट-कम्प्यूटर, कैलकुलेटर, प्रोग्रामेबल घड़ी आदि का प्रयोग पूर्णतः वर्जित है। केवल साधारण पेन व पेंसिल ही परीक्षा केंद्र में ले जा सकते हैं।
2. उत्तरों की जाँच मशीनों से होगी। OMR शीट पर बुलबुलों को काली पेंसिल या फिर नीले या काले पेन से पूरी तरह भरें। उत्तर सुनिश्चित करने के बाद ही बुलबुलों को भरें; वरना मिटाने पर OMR शीट ख़राब हो सकती है जिससे कि मशीन उत्तर नहीं पढ़ पाएगी।
3. OMR शीट पर आपके द्वारा दिए जाने वाले नाम, ईमेल-आइ.डी., व जन्मतिथि के ज़रिए लॉगिन करके आप PRMO का परिणाम देख सकेंगे।
4. अपूर्ण/ग़लत या ध्यान से नहीं भारी गई जानकारी की वजह से आप इस परीक्षा में अमान्य घोषित हो सकते हैं।
5. हर प्रश्न का उत्तर 1 या 2 अंकों की संख्या है। पहले पृष्ठ के पहले चित्र में बुलबुले भरने के सही व ग़लत तरीक़े, निर्देशों के साथ दर्शाए गए हैं। दूसरे चित्र में दर्शाया गया है कि 1-अंक व 2-अंक की संख्या को कैसे चिन्हित करेंगे।



6. OMR शीट पर लिखा गया उत्तर किसी काम का नहीं है। भरे हुए बुलबुले ही आपका उत्तर माने जाएँगे।
7. प्रश्न 1 से प्रश्न 6 तक हर सही उत्तर पर 2 अंक (marks) मिलेंगे, प्रश्न 7 से प्रश्न 21 तक हर सही उत्तर पर 3 अंक (marks) मिलेंगे व प्रश्न 22 से प्रश्न 30 तक हर सही उत्तर पर 5 अंक मिलेंगे।
8. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
9. कोई ऋणात्मक अंक (negative marks) नहीं हैं।
10. सभी रफ़ कार्य प्रश्नों के नीचे दी गई ख़ाली जगह में करें। आपके पास प्रश्न-पत्र के अंत में भी रफ़ कार्य के लिए ख़ाली जगह है।
11. परीक्षा के बाद परोक्षार्थियों के लिए चिन्हित OMR शीट की प्रति आप ले जा सकते हैं।
12. अपनी OMR शीट की प्रति इस बार के ओलम्पियाड ख़त्म होने तक सम्भाल कर रखें। इसकी बाद में ज़रूरत पड़ेगी।
13. परीक्षा के उपरांत आप आप प्रश्न पत्र अपने साथ ले जा सकते हैं।