भौतिकी

भाग 1

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

© NCERT not to be republished



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Reprint 2026-27

11088 – भौतिकी (भाग 1)

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-515-6

प्रथम संस्करण

मार्च 2006 *फाल्गुन 1927*

पुनर्मुद्रण

मार्च 2007, जनवरी 2008, जून 2009, दिसंबर 2009, नवंबर 2010, फरवरी 2012, जनवरी 2013, जून 2014, दिसंबर 2014, दिसंबर 2015, मार्च 2017, जनवरी 2018, जनवरी 2019 और नवंबर 2019

संशोधित संस्करण

दिसंबर 2022 *पौष 1944*

पुनर्मुद्रण

मार्च 2024 चैत्र 1946

जून 2024 ज्येष्ठ 1946

जनवरी 2025 पौष 1946

PD 12T+10T M

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2006, 2022

₹ 120.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा डी.पी. प्रिंटिंग एवं बाईंडिंग, बी-149, ओखला-I, ए-1, नई दिल्ली-110020 द्वारा मुद्रित।

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III स्टेज
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781 021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : *एम.वी. श्रीनिवासन*

मुख्य संपादक : *बिज्ञान सुतार*

मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी) : *जहान लाल*

मुख्य व्यापार प्रबंधक : *अमिताभ कुमार*

संपादक : *नरेश यादव*

सहायक उत्पादन अधिकारी : सायुराज ए.आर.

आवरण एवं चित्रांकन

श्वेता राव

© NCERT not to be republished

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभवों पर विचार करने का कितना अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक जिंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फ़ेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित पाठ्यपुस्तक सलाहकार समिति के अध्यक्ष, प्रोफ़ेसर जे.वी. नार्लीकर और इस पाठ्यपुस्तक के मुख्य सलाहकार, प्रोफ़ेसर ए.डब्ल्यू. जोशी, जिन्होंने इस समिति के कार्य को निर्देशित किया, की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान किया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। प्रोफ़ेसर मृणाल मीरी और प्रोफ़ेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में मानव संसाधन विकास मंत्रालय के अधीन उच्च माध्यमिक शिक्षा विभाग द्वारा गठित निगरानी समिति (मॉनीटरिंग कमेटी) के सदस्यों के अमूल्य समय और सहयोग के लिए हम कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्

नयी दिल्ली
20 दिसंबर 2005

© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन

कोविड-19 महामारी को देखते हुए, विद्यार्थियों के ऊपर से पाठ्य सामग्री का बोझ कम करना अनिवार्य है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 2020* में भी विद्यार्थियों के लिए पाठ्य सामग्री का बोझ कम करने और रचनात्मक नज़रिए से अनुभवात्मक अधिगम के अवसर प्रदान करने पर ज़ोर दिया गया है। इस पृष्ठभूमि में, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने सभी कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित करने की शुरुआत की है। इस प्रक्रिया में रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पहले से ही विकसित कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखा गया है।

पाठ्य सामग्रियों के पुनर्संयोजन में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखा गया है —

- एक ही कक्षा में अलग-अलग विषयों के अंतर्गत समान पाठ्य सामग्री का होना;
- एक कक्षा के किसी विषय में उससे निचली कक्षा या ऊपर की कक्षा में समान पाठ्य सामग्री का होना;
- कठिनाई स्तर;
- विद्यार्थियों के लिए सहज रूप से सुलभ पाठ्य सामग्री का होना, जिसे शिक्षकों के अधिक हस्तक्षेप के बिना, वे खुद से या सहपाठियों के साथ पारस्परिक रूप से सीख सकते हों;
- वर्तमान संदर्भ में अप्रासंगिक सामग्री का होना।

वर्तमान संस्करण, ऊपर दिए गए परिवर्तनों को शामिल करते हुए तैयार किया गया पुनर्संयोजित संस्करण है।

© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

प्राक्कथन

एक दशक से भी अधिक समय पूर्व, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने प्रो. टी.वी. रामकृष्णन, एफ.आर.एस., की अध्यक्षता में लेखकों के एक दल की सहायता से कक्षा 11 तथा 12 के लिए लिखी गई पाठ्यपुस्तकें प्रकाशित की थीं। इन पुस्तकों को विद्यार्थियों तथा शिक्षकों ने समान रूप से भलीभांति अपनाया। वास्तव में ये पुस्तकें मील का पत्थर तथा विचारधारा निर्धारित करने वाली सिद्ध हुईं। तथापि, पाठ्यपुस्तकों और विशेषकर विज्ञान की पुस्तकों का विकास परिवर्तनशील बोध, आवश्यकता, पुनर्निवेशन तथा विद्यार्थियों, शिक्षाविदों तथा समाज के अनुभवों की दृष्टि से एक गत्यात्मक प्रक्रिया है। विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2000 पर आधारित संशोधित पाठ्यक्रमों के अनुरूप भौतिकी की पाठ्यपुस्तकों का एक दूसरा संस्करण प्रोफेसर सुरेश चन्द्र के निर्देशन में प्रकाशित किया गया जो अब तक लागू था। हाल में राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 (एन.सी.एफ. 2005) प्रकाशित की तथा विद्यालयी स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान पाठ्यक्रम में तदनुसार संशोधन किया गया। *उच्चतर माध्यमिक स्तर के लिए पाठ्यक्रम* (एन.सी.ई.आर.टी., 2005) विकसित किया गया है। कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तक में 15 अध्याय दो भागों में हैं। भाग 1 में प्रथम आठ अध्याय हैं जबकि भाग 2 में अगले सात अध्याय हैं। प्रस्तुत पुस्तक वर्तमान पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के नवीन प्रयास का परिणाम है और साथ ही यह आशा है कि विद्यार्थी भौतिकी के सुंदरता एवं तर्क का महत्त्व समझेंगे। उच्चतर माध्यमिक स्तर के आगे विद्यार्थी भौतिकी का अध्ययन जारी रख सकते हैं या नहीं भी परन्तु हम मानते हैं कि वे चाहे किसी भी दूसरे विषय का अध्ययन करें, उसमें वे भौतिकी की सोच–विचार प्रक्रिया को उपयोगी पाएँगे। यह विषय, कुछ भी हों, जैसे – अर्थव्यवस्था, प्रशासन, सामाजिक विज्ञान, पर्यावरण, अभियांत्रिकी, प्रौद्योगिकी, जीवविज्ञान या चिकित्साशास्त्र। उन विद्यार्थियों के लिए, जो भौतिकी का अध्ययन इस स्तर के आगे जारी रखेंगे, इस पुस्तक में विकसित विषय निश्चय ही एक सुदृढ़ आधार प्रदान करेगा।

विज्ञान और प्रौद्योगिकी की लगभग सभी शाखाओं के ज्ञान का आधारभूत भौतिकी है। यह उल्लेख करना रोचक है कि भौतिकी की धारणाओं एवं विचारों का उपयोग ज्ञान की दूसरी भाषाओं; जैसे – अर्थशास्त्र, वाणिज्य और व्यवहार विज्ञान में भी बढ़ता जा रहा है। हम इस तथ्य से अनभिज्ञ हैं कि भौतिकी के कुछ सरल आधारिक सिद्धांत प्रायः प्रत्यात्मक रूप में जटिल होते हैं। इस पुस्तक में हमने 'प्रत्यात्मक सामंजस्य' लाने का प्रयास किया है। शैक्षणिक तथा विषय की परिशुद्धता को बनाए रखकर सरल एवं सुबोध भाषा का प्रयोग करना हमारे प्रयास का केंद्र बिंदु है। भौतिकी विषय की प्रकृति ही ऐसी है जिसके लिए कुछ न्यूनतम गणित का उपयोग करना आवश्यक हो जाता है। जहाँ तक संभव हो सका है हमने गणितीय सूत्रों को तार्किक ढंग से विकसित करने का प्रयास किया है।

भौतिकी के विद्यार्थियों एवं अध्यापकों को पूर्ण रूप से समझना चाहिए कि भौतिकी विषय को याद करने की बजाय बोधगम्य बनाने की आवश्यकता होती है। जब हम माध्यमिक से उच्चतर माध्यमिक या आगे की स्तर को जाते हैं तो भौतिकी में मुख्य रूप से चार अवयव होते हैं : (i) गणित का पर्याप्त सुदृढ़ आधार, (ii) तकनीकी शब्द एवं पद जिनके अंग्रेजी भाषा में सामान्य अर्थ एकदम भिन्न हो सकते हैं, (iii) नयी जटिल अवधारणाएँ, तथा (iv) प्रायोगिक आधार। भौतिकी में गणित की आवश्यकता है क्योंकि हम अपने चारों ओर के परिवेश का यथार्थ चित्रण विकसित तथा अपने प्रेक्षणों को मेय राशियों के पदों में व्यक्त करना चाहते हैं। भौतिकी कणों के नए गुणों की खोज करती है तथा प्रत्येक कण के लिए एक नाम देना चाहती है। शब्द

© NCERT not to be republished

आमतौर से अंग्रेजी, लैटिन, या ग्रीक भाषा से लेते हैं परन्तु भौतिकी इन शब्दों को एकदम नया अर्थ देती है। इसको समझने के लिए आप ऊर्जा, बल, शक्ति, आवेश, स्पिन या इस तरह के अन्य शब्दों के मान किसी मानक अंग्रेजी शब्दावली में देख सकते हैं तथा इनके अर्थों को भौतिकी में प्रयुक्त इन शब्दों के अर्थों से तुलना कर सकते हैं। भौतिकी कणों के व्यवहार को समझाने के लिए जटिल एवं अनूठी अवधारणाओं को विकसित करती है। अन्ततः यह याद रखना होगा कि भौतिकी प्रेक्षणों और प्रयोगों पर आधारित है – इनके अभाव में किसी सिद्धांत को भौतिकी के क्षेत्र में मान्यता नहीं मिलती है।

इस पुस्तक में कुछ विशिष्टताएँ हैं । हमें पूर्ण आशा एवं विश्वास है कि ये विद्यार्थियों के लिए पुस्तक की उपयोगिता में वृद्धि करेंगी । अध्याय की विषय-वस्तु पर तेजी से सरसरी दृष्टि डालने के लिए प्रत्येक अध्याय के अंत में **सारांश** दिया गया है । इसके पश्चात् **विचारणीय विषय** दिए गए हैं जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उत्पन्न होने वाली संभावित भ्रांतियों, अध्याय में दिए कुछ प्रकथनों/सिद्धांतों में छिपी उलझनों तथा अध्याय से उपलब्ध ज्ञान के उपयोग के लिए आवश्यक 'चेतावनियों' की ओर इंगित करते हैं। ये कुछ विचार उत्तेजक प्रश्न भी उठाते हैं जिनसे विद्यार्थी भौतिकी के परे जीवन पर विचार कर सके। इन 'बिंदुओं' पर सोचना तथा अपने मस्तिष्क का अनुप्रयोग करना विद्यार्थियों को रोचक लगेगा । इसके अतिरिक्त संकल्पनाओं के स्पष्टीकरण तथा/अथवा दैनिक जीवन की परिस्थितियों में इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों की व्याख्या के लिए बड़ी संख्या में पाठ्य सामग्री में 'हल सहित अभ्यासों' का समावेश किया गया है । यदा-कदा भौतिकी विषय के क्रमिक विकास के प्रति जिज्ञासा को शांत करने के लिए ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्यों को भी सम्मिलित किया गया है । बहुत से अध्यायों में या तो इसी उद्देश्य के लिए अथवा उन विषयवस्तुओं जिनमें विद्यार्थियों को अतिरिक्त ध्यान देने की आवश्यकता होती है, उनकी कुछ विशेष विशिष्टताओं की ओर आकर्षित करने के उद्देश्य से विषयवस्तु को 'बॉक्स' में दिया गया है । पुस्तक के अंत में पुस्तक में प्रयुक्त मुख्य शब्दों की सूची दी गई है।

भौतिकी की विशेष प्रकृति, धारणाओं की समझ के अलावा कुछ परिपाटियों का ज्ञान, आधारभूत गणितीय साधन, महत्त्वपूर्ण भौतिक स्थिरांकों के आंकिक मान, सूक्ष्म स्तर से गैलेक्सीन स्तर के परिसर तक उपयोगी मात्रकों की प्रणाली की अपेक्षा करती है। विद्यार्थियों की सहायता के लिए हमने पुस्तक के अंत में परिशिष्ट A1 से A9 के रूप में आवश्यक साधन एवं डाटाबेस दिए हैं। अतिरिक्त जानकारी या किसी अध्याय विशेष में वर्णित विषय के उपयोग के लिए कुछ अध्यायों के अंत में भी कुछ परिशिष्ट दिए गए हैं।

सुस्पष्ट चित्र प्रदान करने की ओर विशेष ध्यान दिया गया है । चित्रों की स्पष्टता में वृद्धि के लिए उन्हें 'दो रंगों' में रेखांकित किया गया है । प्रत्येक अध्याय के अंत में पर्याप्त संख्या में अभ्यास दिए गए हैं । इनमें से कुछ जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से संबंधित हैं । विद्यार्थियों से अनुरोध है कि वे इन्हें हल करें और ऐसा करते समय वे इन अभ्यासों को अत्यधिक शिक्षाप्रद पाएंगे। कुछ अतिरिक्त अभ्यास भी दिए गए हैं जो अधिक कठिन हैं। कुछ अभ्यासों को हल करने के लिए संकेत एवं उत्तर दिए गए हैं। संपूर्ण पुस्तक में SI मात्रकों का उपयोग किया गया है । निर्धारित पाठ्यक्रम/पाठ्यचर्या के भाग के रूप में और साथ ही भौतिकी के लक्ष्य में सहायक के रूप में अध्याय 2 में "मात्रक और मापन" का विस्तृत विवरण दिया गया है । इस अध्याय में दिया गया एक 'बॉक्स' एक लंबी वक्रीय लाइन जैसी सरल वस्तु के मापन से कठिनाइयों को उजागर करता है। SI मूल मात्रकों एवं अन्य संबंधित मात्रकों की सारणी इस अध्याय में वर्तमान मान्य परिभाषाओं को मन में बैठाने तथा आज मापन में उपलब्ध शुद्धता की उच्चकोटि को स्पष्ट करने के लिए की गई है। यहाँ दी गई संख्याओं को न तो कंठस्थ करने की आवश्यकता है और न इन्हें परीक्षा में पूछना चाहिए।

विद्यार्थियों, अध्यापकों तथा आम जनता में यह धारणा है कि माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तर में तीक्ष्ण चढ़ाव है। परन्तु तनिक सोच दर्शाती है कि शिक्षा की वर्तमान व्यवस्था में ऐसा होगा ही। माध्यमिक स्तर तक की शिक्षा सामान्य शिक्षा है जहाँ विद्यार्थी को कई विषयों, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, गणित, भाषा का अध्ययन प्राथमिक स्तर का करना होता है। उच्चतर माध्यमिक या आगे की शिक्षा में, उद्यम के किसी

© NCERT not to be republished

चुने क्षेत्र में व्यावसायिक दक्षता ग्रहण करना होता है। इसकी तुलना आप निम्न स्थिति से कर सकते हैं। बच्चे अपने घरों के अंदर या बाहर या गलियों में क्रिकेट या बैडमिंटन खेलते हैं। परन्तु उनमें से कुछ स्कूल टीम, फिर जिले की टीम, फिर राज्य टीम और राष्ट्रीय टीम तक पहुँचना चाहते हैं। प्रत्येक स्तर पर तीक्ष्ण चढ़ाव होगा ही। अधिक परिश्रम जरूरी होता है यदि विद्यार्थी विज्ञान, साहित्य, भाषा, संगीत, कला, वाणिज्य, अर्थप्रबन्ध, वास्तुकला के क्षेत्र में शिक्षा ग्रहण करना चाहते हैं या वे खिलाड़ी या फैशन डिज़ाइनर बनना चाहते हैं।

इस पुस्तक को पूर्ण कर पाना बहुत से व्यक्तियों की सहज स्वाभाविक एवं सतत् सहायता के कारण ही संभव हो सका है। पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति डा. आर.एच. रेबेगकर का अध्याय 4 में उनके बॉक्स विषय तथा डॉ. एफ.आई. सुर्वे का अध्याय 15 में उनके बॉक्स विषय के उपयोग की अनुमति के लिए आभारी है। विज्ञान शिक्षा में सुधार के लिए राष्ट्रीय प्रयासों के एक भाग के रूप में इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण का कार्य सौंपने के लिए हम राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक के प्रति अपना आभार प्रकट करते हैं। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष तथा संकाय के अन्य सदस्य इस उद्यम में सदैव ही हर संभव ढंग से हमारी सहायता के लिए तत्पर रहे, हम उनके भी अत्यंत अभारी हैं।

पुरानी पाठ्यपुस्तक को शिक्षकों, विद्यार्थियों तथा विशेषज्ञों का श्रेष्ठ विद्वतापूर्ण निवेश प्राप्त हुआ जिन्होंने पिछले कुछ वर्षों में परिमार्जन के लिए सुझाव दिए। हम उन सभी के कृतज्ञ हैं जिन्होंने एन.सी.ई.आर.टी. को अपने सुझाव भेजे। हम प्रथम पाण्डुलिपि पर चर्चा तथा परिमार्जन के लिए आयोजित समीक्षा कार्यगोष्ठी तथा सम्पादन कार्यगोष्ठी के सदस्यों के भी आभारी हैं। हम अध्यक्ष तथा उनके लेखन मंडल को उनके द्वारा 1988 में लिखी गई पाठ्यसामग्री के लिए धन्यवाद देते हैं जिसने 2002 संस्करण तथा जिसने हमें इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने का आधार तथा संदर्भ प्रदान किया। यदा-कदा पुरानी पुस्तकों के कुछ बड़े भागों को, विशेषकर जिन्हें विद्यार्थियों/शिक्षकों ने सराहा है, विद्यार्थियों की भावी पीढ़ी के हित को ध्यान में रखकर, प्रस्तुत पुस्तक में अपनाया/रूपांतरित किया है।

हम अपने सम्मानित प्रयोक्ताओं, विशेषकर विद्यार्थियों तथा शिक्षकों से प्राप्त समीक्षा एवं सुझावों का आदर करते हैं। हम अपने युवा पाठकों की भौतिकी के रोमांचकारी कार्यक्षेत्र की ओर अग्रसर होने की कामना करते हैं।

ए. डब्ल्यू. जोशी
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

© NCERT not to be republished

अध्यापकों के लिए संदेश

पाठ्यचर्या को शिक्षार्थी-केंद्रित बनाने के लिए अति आवश्यक है कि विद्यार्थी अधिगम प्रक्रिया में सक्रिय रूप से भाग लें। प्रति सप्ताह या प्रति छः कक्षाओं पर एक बार इस तरह के सेमिनार और विचारों का आदान-प्रदान आयोजित होना चाहिए। भागीदारों के बीच परिचर्चा के लिए, इस पुस्तक में कुछ विशेष विषयों के संदर्भ में, कुछ सुझाव नीचे दिए गये हैं।

विद्यार्थियों को पाँच या छः के समूह में व्यवस्थित कीजिए। यदि आवश्यक हो, तो शिक्षण वर्ष में इन समूहों के सदस्यों में क्रमावर्तन करें।

परिचर्चा के विषय को बोर्ड पर या कागज पर लिखें। विद्यार्थियों को निर्देश दीजिए कि वे प्रश्नों के उत्तर या अपनी प्रतिक्रिया, जो भी अभीष्ट है, दिए हुए कागज पर लिखें। तत्पश्चात अपने समूह में चर्चा करें तथा इन पृष्ठों पर संशोधन या टिप्पणी जोड़ें। फिर इन सबकी उसी कक्षा में या किसी और कक्षा में परिचर्चा करें। विद्यार्थियों के उत्तर पृष्ठों का मूल्यांकन भी किया जा सकता है। प्रस्तुत पुस्तक से हम तीन सम्भावित विषयों को प्रस्तावित करते हैं। वास्तव में, प्रथम दो विषय, बहुत ही सामान्य हैं तथा पिछले चार या अधिक शताब्दियों के दौरान विज्ञान के विकास से सम्बन्धित हैं। प्रत्येक सेमिनार के लिए विद्यार्थी तथा अध्यापक, इस तरह के अन्य विषय को सुझा सकते हैं।

1. विचार जिसने सभ्यता को बदल दिया

मान लीजिए मानव जाति धीरे-धीरे विलुप्त हो रही है और आने वाली पीढ़ी या परकीय आगंतुक के लिए कोई संदेश छोड़ना है। प्रसिद्ध भौतिक विज्ञानी आर.पी. फाइनमैन आने वाली पीढ़ी के लिए निम्न संदेश छोड़ना चाहते थे :

''पदार्थ अणुओं से बना है''

एक महिला छात्रा तथा साहित्य की अध्यापिका निम्न संदेश छोड़ना चाहती थी :

''जल विद्यमान है, अतः मानव जाति का अस्तित्व रहेगा''

किसी अन्य व्यक्ति ने सोचा : ''गति के लिए पहिए का विचार''

आने वाली पीढ़ी के लिए आप में से प्रत्येक जो संदेश छोड़ना चाहेंगे उसे लिखें। तब अपने समूह में इस पर चर्चा करें, और इसमें परिवर्तन करें या इसमें और विचार जोड़ें, यदि आप अपना विचार बदलना चाहते हैं। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इससे संबंधित परिचर्चा में भाग लें।

2. न्यूनीकरण

गैस का अणुगति सिद्धान्त 'बड़े को छोटे से' या 'मैक्रो को माइक्रो' से संबंधित करता है। एक निकाय के रूप में गैस इसके अवयवों, अणुओं से संबंधित है। किसी निकाय को उसके अवयवों के गुणों से संबंधित करके वर्णित करना *न्यूनीकरण* कहलाता है। यह विधि व्यष्टि के साधारण एवं भविष्यवाची व्यवहार के आधार पर समूह के व्यवहार को स्पष्ट करती है। इस उपगमन में सूक्ष्मदर्शी गुणों एवं स्थूल प्रेक्षणों में एक परस्पर निर्भरता होती है। क्या यह विधि उपयोगी है? इस प्रकार के उपगमन की भौतिकी और रसायन विज्ञान के अतिरिक्त अन्य विषयों में अपनी सीमाएँ होती हैं - सम्भव है इन विषयों में भी सीमाएँ हों। किसी कैनवस पर बने चित्र को इसमें प्रयुक्त रसायनों के गुणों के समूह से संबंधित कर विवेचना *नहीं* की जा सकती है। वास्तविकता अवयवों के योग से कहीं परे है।

प्रश्न : क्या आप अन्य क्षेत्र बता सकते हैं जहाँ इस प्रकार के उपगमन को उपयोग में लाया जाता है?

किसी निकाय का संक्षेप में वर्णन कीजिए जिसका उसके अवयवों के पदों में पूर्ण रूप से विवेचना किया जा सके। एक अन्य निकाय का भी वर्णन कीजिए जिसमें ऐसा सम्भव नहीं है। अपने समूह के अन्य सदस्यों से इस पर विचार-विमर्श करें और अपने विचार लिखें। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इस पर आयोजित परिचर्चा में भाग लें।

3. ऊष्मा का आण्विक उपगमन

आपके विचार से निम्न अवस्थाओं में क्या होगा, बताएँ।

कोई आवेष्टन एक सरंध्र दीवार से दो भागों में पृथक है। एक भाग नाइट्रोजन गैस (N_2) तथा दूसरा कार्बन डाइऑक्साइड (CO_2) से भरा है। गैसें एक भाग से दूसरे भाग में विसरित होती हैं।

प्रश्न 1 : दोनों गैसें एकसमान मात्रा में विसरित होंगी? यदि नहीं, तो कौन सी गैस अधिक विसरित होगी? कारण सहित बताइए।

प्रश्न 2 : क्या दाब एवं ताप अपरिवर्तित रहेंगे? यदि नहीं तो दोनों में क्या परिवर्तन होगा? कारण सहित बताइए।

अपने उत्तर लिखिए। समूह के अन्य सदस्यों के साथ विचार-विमर्श करें तथा उत्तर को परिष्कृत करें या टिप्पणी जोड़ें। उत्तर अध्यापक को दें तथा परिचर्चा में भाग लें।

विद्यार्थी तथा अध्यापक पाएँगे कि इस तरह के परिचर्चा तथा विचार-विमर्श, न केवल भौतिकी में, बल्कि विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान की समझ में हमें अत्यधिक सहायक होते हैं। इससे विद्यार्थियों की सोच में परिपक्वता आएगी।

© NCERT not to be republished

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित पाठ्यपुस्तकों की सलाहकार समिति

जे.वी. नार्लीकर, *इमेरिटस प्रोफ़ेसर*, अंतर-विश्वविद्यालय केंद्र : खगोलविज्ञान और खगोलभौतिकी, पुणे

मुख्य सलाहकार

ए.डब्ल्यू. जोशी, *प्रोफ़ेसर*, हानरेरी विजिटिंग साइंटिस्ट, एनसीआरए, पुणे
(भूतपूर्व प्रोफ़ेसर, भौतिकी विभाग, पुणे विश्वविद्यालय)

सदस्य

अनुराधा माथुर, *पी.जी.टी.*, मॉडर्न स्कूल, बसंत विहार, नयी दिल्ली
आर.जोशी. *प्रवक्ता* (एस.जी.), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एच.सी. प्रधान, *प्रोफ़ेसर*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केन्द्र, टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई
एन. पंचपकेशन, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर,* भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस. राय चौधरी, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस.के. दास, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एस.एन. प्रभाकर, *पी.जी.टी.*, डी.एम.स्कूल, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर
गगन गुप्त, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
चित्रा गोयल, *पी.जी.टी.*, राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, त्यागराज नगर, लोदी रोड, नयी दिल्ली
टी.जे. सिंह, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, मणिपुर विश्वविद्यालय, इम्फाल
पी.के. श्रीवास्तव, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, निदेशक, सीएसईसी, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
पी.के. मोहंती, *पी.जी.टी.*, सैनिक स्कूल, भुवनेश्वर
पी.सी. अग्रवाल, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., भुवनेश्वर
वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
शेर सिंह, *पी.जी.टी.*, नवयुग स्कूल, लोदी रोड, नयी दिल्ली

सदस्य-समन्वयक (अंग्रेजी संस्करण)

वी.के. शर्मा, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

हिंदी अनुवादक

आर.एस. दास, *अवकाश प्राप्त उपप्रधानाचार्य*, बलवंत राय मेहता विद्याभवन सीनियर सेकंडरी स्कूल, नयी दिल्ली
ओ.पी. खंडेलवाल, *अवकाश प्राप्त रीडर*, द्रोणाचार्य राजकीय महाविद्यालय, गुड़गाँव, हरियाणा
जे.पी. अग्रवाल, *अवकाश प्राप्त प्राचार्य*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
विनोद प्रकाश, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद, उ.प्र.

सदस्य-समन्वयक

वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

© NCERT not to be republished

आभार

पुस्तक के अंतिम स्वरूप के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के बारे में परिषद् आभार व्यक्त करती है: वी.बी. त्रिपाठी, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, आई.आई.टी., नयी दिल्ली; एम.एन. बापट, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर; डी. प्रसाद, *वरिष्ठ वैज्ञानिक अधिकारी* (अवकाश प्राप्त), विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी विभाग, नयी दिल्ली; जे.सी. शर्मा, *शिक्षा अधिकारी*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् एम. चन्द्रा, *प्रोफ़ेसर* तथा *विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली की आभारी है।

परिषद् सन 2017 में पाठ्य के पुनरीक्षण और परिष्करण में अमूल्य योगदान के लिए ए.के. श्रीवास्तव, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; अरनब सेन, एन.ई.आर.आइ.ई., शिलांग; एल.एस. चौहान, आर. आइ.ई., भोपाल; ओ.एन. अवस्थी (रिटायर्ड), आर.आइ.ई, भोपाल; रचना गर्ग, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर. टी., नयी दिल्ली; रामन नंबूदरी, आर.आइ.ई., मैसुरू; आर.आर. कोइरेंग, डी.सी.एस. एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; शशि प्रभा, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली और एस.वी. शर्मा, आर.आइ.ई., अजमेर का भी आभार व्यक्त करती है।

परिषद् गीता, इन्द्र कुमार, हरि दर्शन लोधी *डी.टी.पी. ऑपरेटर*; रेशमा नेगी, सतीश झा, *कॉपी एडीटर*; अनुराधा, रणधीर ठाकुर, *प्रूफ रीडर*; दीपक कपूर, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. और प्रकाशन विभाग के सहयोग हेतु हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

© NCERT not to be republished

विषय-सूची

आमुख *iii*
पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन *v*
प्राक्कथन *vii*
अध्यापकों के लिए संदेश *x*

अध्याय 1
मात्रक एवं मापन

1.1 भूमिका 1
1.2 मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली 1
1.3 सार्थक अंक 3
1.4 भौतिक राशियों की विमाएँ 7
1.5 विमीय सूत्र एवं विमीय समीकरणें 7
1.6 विमीय विश्लेषण एवं इसके अनुप्रयोग 7

अध्याय 2
सरल रेखा में गति

2.1 भूमिका 13
2.2 तात्क्षणिक वेग एवं चाल 14
2.3 त्वरण 15
2.4 एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु का शुद्धगतिकी संबंधी समीकरण 17

अध्याय 3
समतल में गति

3.1 भूमिका 28
3.2 अदिश एवं सदिश 28
3.3 सदिशों की वास्तविक संख्या से गुणा 30
3.4 सदिशों का संकलन व व्यवकलन – ग्राफी विधि 30
3.5 सदिशों का वियोजन 32
3.6 सदिशों का योग – विश्लेषणात्मक विधि 34
3.7 किसी समतल में गति 35
3.8 किसी समतल में एकसमान त्वरण से गति 38
3.9 प्रक्षेप्य गति 39
3.10 एकसमान वृत्तीय गति 42

अध्याय 4
गति के नियम

4.1 भूमिका 50
4.2 अरस्तू की भ्रामकता 51
4.3 जड़त्व का नियम 51

© NCERT not to be republished

4.4 न्यूटन का गति का प्रथम नियम 52
4.5 न्यूटन का गति का द्वितीय नियम 54
4.6 न्यूटन का गति का तृतीय नियम 57
4.7 संवेग-संरक्षण 58
4.8 किसी कण की साम्यावस्था 59
4.9 यांत्रिकी में सामान्य बल 60
4.10 वर्तुल (वृत्तीय) गति 64
4.11 यांत्रिकी में समस्याओं को हल करना 66

अध्याय 5

कार्य, ऊर्जा और शक्ति

5.1 भूमिका 72
5.2 कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणा : कार्य-ऊर्जा प्रमेय 74
5.3 कार्य 74
5.4 गतिज ऊर्जा 75
5.5 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य 76
5.6 परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय 77
5.7 स्थितिज ऊर्जा की अभिधारणा 78
5.8 यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण 79
5.9 किसी स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा 81
5.10 शक्ति 84
5.11 संघट्ट 84

अध्याय 6

कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

6.1 भूमिका 94
6.2 द्रव्यमान केन्द्र 97
6.3 द्रव्यमान केन्द्र की गति 101
6.4 कणों के निकाय का रेखीय संवेग 102
6.5 दो सदिशों का सदिश गुणनफल 103
6.6 कोणीय वेग और इसका रेखीय वेग से संबंध 105
6.7 बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग 107
6.8 दृढ़ पिण्डों का संतुलन 111
6.9 जड़त्व आघूर्ण 116
6.10 अचल अक्ष के परितः शुद्ध घूर्णी गतिकी 119
6.11 अचल अक्ष के परितः घूर्णी गतिकी 120
6.12 अचल अक्ष के परितः घूर्णी गति का कोणीय संवेग 123

अध्याय 7

गुरुत्वाकर्षण

7.1 भूमिका 130
7.2 केप्लर के नियम 131
7.3 गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम 133

© NCERT not to be republished

7.4	गुरुत्वीय नियतांक	135
7.5	पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण	135
7.6	पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे तथा ऊपर गुरुत्वीय त्वरण	136
7.7	गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा	138
7.8	पलायन चाल	139
7.9	भू उपग्रह	140
7.10	कक्षा में गतिशील उपग्रह की ऊर्जा	142

परिशिष्ट 148

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर 164

© NCERT not to be republished

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1][**संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य**] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2][**राष्ट्र की एकता और अखंडता**] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

अध्याय 1

11088CH02

मात्रक एवं मापन

1.1 भूमिका
1.2 मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली
1.3 सार्थक अंक
1.4 भौतिक राशियों की विमाएँ
1.5 विमीय सूत्र एवं विमीय समीकरणें
1.6 विमीय विश्लेषण एवं इसके अनुप्रयोग
सारांश
अभ्यास

1.1 भूमिका

किसी भौतिक राशि का मापन, एक निश्चित, आधारभूत, यादृच्छिक रूप से चुने गए मान्यताप्राप्त, संदर्भ-मानक से इस राशि की तुलना करना है। यह संदर्भ-मानक **मात्रक** कहलाता है। किसी भी भौतिक राशि की माप को मात्रक के आगे एक संख्या (आंकिक संख्या) लिखकर व्यक्त किया जाता है। यद्यपि हमारे द्वारा मापी जाने वाली भौतिक राशियों की संख्या बहुत अधिक है, फिर भी, हमें इन सब भौतिक राशियों को व्यक्त करने के लिए, मात्रकों की सीमित संख्या की ही आवश्यकता होती है, क्योंकि, ये राशियाँ एक दूसरे से परस्पर संबंधित हैं। मूल राशियों को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त मात्रकों को **मूल मात्रक** कहते हैं। इनके अतिरिक्त अन्य सभी भौतिक राशियों के मात्रकों को मूल मात्रकों के संयोजन द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार प्राप्त किए गए व्युत्पन्न राशियों के मात्रकों को **व्युत्पन्न मात्रक** कहते हैं। मूल-मात्रकों और व्युत्पन्न मात्रकों के सम्पूर्ण समुच्चय को **मात्रकों की प्रणाली** (या पद्धति) कहते हैं।

1.2 मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली

बहुत वर्षों तक मापन के लिए, विभिन्न देशों के वैज्ञानिक, अलग-अलग मापन प्रणालियों का उपयोग करते थे। अब से कुछ समय-पूर्व तक ऐसी तीन प्रणालियाँ - CGS प्रणाली, FPS (या ब्रिटिश) प्रणाली एवं MKS प्रणाली, प्रमुखता से प्रयोग में लाई जाती थीं।

इन प्रणालियों में लम्बाई, द्रव्यमान एवं समय के मूल मात्रक क्रमशः इस प्रकार हैं :

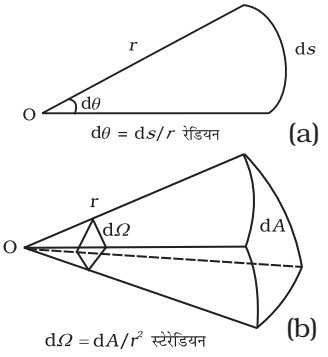
- CGS प्रणाली में, सेन्टीमीटर, ग्राम एवं सेकन्ड।
- FPS प्रणाली में, फुट, पाउन्ड एवं सेकन्ड।
- MKS प्रणाली में, मीटर, किलोग्राम एवं सेकन्ड।

आजकल अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्य प्रणाली "*सिस्टम इन्टरनेशनल डि यूनिट्स*" है (जो फ्रेंच भाषा में "मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली" कहना है)। इसे संकेताक्षर में SI लिखा जाता है। SI प्रतीकों, मात्रकों और उनके संकेताक्षरों की योजना अंतर्राष्ट्रीय माप-तोल ब्यूरो (बी.आई.पी.एम.) द्वारा 1971 में विकसित की गई थी एवं नवंबर, 2018 में आयोजित माप-तोल के महासम्मेलन में संशोधित की गई। यह योजना अब वैज्ञानिक, तकनीकी, औद्योगिक एवं व्यापारिक कार्यों में अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर उपयोग हेतु अनुमोदित की गई। SI मात्रकों की 10 की घातों

© NCERT not to be republished

पर आधारित (दाशमिक) प्रकृति के कारण, इस प्रणाली के अंतर्गत रूपांतरण अत्यंत सुगम एवं सुविधाजनक है। हम इस पुस्तक में SI मात्रकों का ही प्रयोग करेंगे।

SI में सात मूल मात्रक हैं, जो सारणी 1.1 में दिए गए हैं। इन सात मूल मात्रकों के अतिरिक्त दो पूरक मात्रक भी हैं जिनको हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं : (i) समतलीय कोण, $d\theta$ चित्र 1.1(a) में दर्शाए अनुसार वृत्त के चाप की लम्बाई ds और इसकी त्रिज्या r का अनुपात होता है। तथा (ii) घन-कोण, $d\Omega$ चित्र 1.1(b) में दर्शाए अनुसार शीर्ष O को केन्द्र की भांति प्रयुक्त करके उसके परितः निर्मित गोलीय पृष्ठ के अपरोधन क्षेत्र dA तथा त्रिज्या r के वर्ग का अनुपात होता है। समतलीय कोण का मात्रक रेडियन है जिसका प्रतीक rad है एवं घन कोण का मात्रक स्टेरेडियन है जिसका प्रतीक sr है। ये दोनों ही विमाविहीन राशियाँ हैं।



चित्र 1.1 (a) समतलीय कोण $d\theta$ एवं (b) घन कोण $d\Omega$ का आरेखीय विवरण

सारणी 1.1 SI मूल राशियाँ एवं उनके मात्रक*

मूल राशि	SI मात्रक		
	नाम	प्रतीक	परिभाषा
लंबाई	मीटर	m	मीटर, लंबाई का SI मात्रक है। इसे निर्वात में प्रकाश की चाल c के नियत संख्यात्मक मान 299792458 को लेकर, जो कि ms^{-1} मात्रक में व्यक्त है, से परिभाषित किया गया है, जहां सेकंड सीज़ियम आवृत्ति $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में परिभाषित है।
द्रव्यमान	किलोग्राम	kg	किलोग्राम, द्रव्यमान का SI मात्रक है। इसे प्लांक नियतांक h के नियत संख्यात्मक मान $6.62607015\ 10^{-34}$ को लेकर, जोकि J.S. मात्रक में व्यक्त है, से परिभाषित किया गया है; यहां मात्रक J.S. $kg\ m^2s^{-1}$ के समान है, जहां मीटर और सेकंड की परिभाषा c तथा $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में दी गई है।
समय	सेकंड	s	सेकंड, समय का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा सीज़ियम आवृत्ति $\Delta\nu_{cs}$, जो सीज़ियम-133 परमाणु की अक्षुब्ध मूल अवस्था अतिसूक्ष्म संक्रमण आवृत्ति है, के नियत संख्यात्मक मान 9192631770 को लेकर, जिसे Hz मात्रक जो s^{-1} के समान है, में व्यक्त किया गया है; दी गई है।
विद्युत धारा	ऐम्पियर	A	ऐम्पियर, विधुत-धारा का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा, मूल आवेश e के नियत संख्यात्मक मान $1.602176634\ 10^{-19}$ को लेकर; जिसे C मात्रक जो A.S के समान है, जहां सेकंड को $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में व्यक्त किया गया है; दी जाती है।
ऊष्मागतिक ताप	केल्विन	K	केल्विन, ऊष्मागतिक ताप का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा, बोल्ट्ज़मान नियतांक, K के नियत संख्यात्मक मान $1.380649\ 10^{-23}$ को लेकर; जिसे $J\ K^{-1}$ मात्रक में व्यक्त किया गया है, जो $kg\ m^2\ s^{-2}\ k^{-1}$ के समान है, जहां किलोग्राम, मीटर और सेकंड को h, c और $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में परिभाषित किया जाता है; दी गई है।
पदार्थ की मात्रा	मोल	mol	मोल, पदार्थ की मात्रा का SI मात्रक है। एक मोल में ठीक $6.02214076\ 10^{23}$ ही मूलभूत कण होते हैं। यह संख्या, आवोगाद्रो स्थिरांक, N_A का नियत संख्यात्मक मान होता है जब उसे mol^{-1} मात्रक में व्यक्त किया जाता है और इसे आवोगाद्रो संख्या कहा जाता है। किसी निकाय के पदार्थ की मात्रा, संकेत n, विशिष्ट मूल कणों की संख्या का आमाप होती है। ये मूल कण एक परमाणु, अणु, आयन, इलेक्ट्रॉन, कोई अन्य कण या कणों के विशिष्ट समूह हो सकते हैं।
ज्योति-तीव्रता	केंडेला	cd	केंडेला, दी गई दिशा में ज्योति-तीवृता का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा, $540\ 10^{12}$ Hz आवृत्ति वाले एकवर्णी विकिरण की दीप्त प्रभाविकता, k_{cd} के नियत संख्यात्मक मान 683 को लेकर जब उसे $Im\ W^{-1}$ के मात्रकों में व्यक्त किया जाए जो $cd\ sr\ W^{-1}$ या $cd\ sr\ kg^{-1}\ m^{-2}\ s^3$ के समान है, जहां किलोग्राम, मीटर और सेकंड को h, c और $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में परिभाषित किया जाता है; दी गई है।

* *इन परिभाषाओं में प्रयुक्त संख्याओं के मान, न तो याद रखने की आवश्यकता है, न परीक्षा में पूछे जाने की। ये यहाँ पर केवल इनके मापन की यथार्थता की सीमा का संकेत देने के लिए दिए गए हैं। प्रौद्योगिकी के विकास के साथ मापन की तकनीकों में भी सुधार होता है, परिणामस्वरूप, मापन अधिक परिशुद्धता से होता है। इस प्रगति के साथ तालमेल बनाए रखने के लिए मूल मात्रकों को संशोधित किया जाता है।*

© NCERT not to be republished

सारणी 1.2 सामान्य प्रयोग के लिए SI मात्रकों के अतिरिक्त कुछ अन्य मात्रक

नाम	प्रतीक	SI मात्रक के पदों में मान
मिनट	min	60 s
घंटा	h	60 min = 3600 s
दिन	d	24 h = 86400 s
वर्ष	y	365.25 d = 3.156×10^7 s
डिग्री	°	$1^\circ = (\pi/180)$ rad
लिटर	L	1 $dm^3 = 10^{-3}$ m^3
टन	t	10^3 kg
कैरट	c	200 mg
बार	bar	0.1 MPa = 10^5 Pa
क्यूरी	Ci	3.7×10^{10} s^{-1}
रोंजन	R	2.58×10^{-4} C kg^{-1}
क्विंटल	q	100 kg
बार्न	b	100 $fm^2 = 10^{-28}$ m^2
आर	a	1 $dam^2 = 10^2$ m^2
हेक्टार	ha	1 $hm^2 = 10^4$ m^2
मानक वायुमंडलीय दाब	atm	101 325 Pa = 1.013×10^5 Pa

ध्यान दीजिए, मोल का उपयोग करते समय मूल सत्ताओं का विशेष रूप से उल्लेख किया जाना चाहिए। ये मूल सत्ताएँ परमाणु, अणु, आयन, इलेक्ट्रॉन, अन्य कोई कण अथवा इसी प्रकार के कणों का विशिष्ट समूह हो सकता है।

हम ऐसी भौतिक राशियों के मात्रकों का भी उपयोग करते हैं जिन्हें सात मूल राशियों से व्युत्पन्न किया जा सकता है (परिशिष्ट A 6)। SI मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त कुछ व्युत्पन्न मात्रक (परिशिष्ट A 6.1) में दिए गए हैं। कुछ व्युत्पन्न SI मात्रकों को विशिष्ट नाम दिए गए हैं (परिशिष्ट A 6.2) और कुछ व्युत्पन्न SI मात्रक इन विशिष्ट नामों वाले व्युत्पन्न मात्रकों और सात मूल-मात्रकों के संयोजन से बनते हैं (परिशिष्ट A 6.3)। आपको तात्कालिक संदर्भ तथा मार्गदर्शन प्रदान करने के लिए इन मात्रकों को परिशिष्ट (A 6.2) एवं (A 6.3) में दिया गया है। सामान्य व्यवहार में आने वाले अन्य मात्रक सारणी 1.2 में दिए गए हैं।

SI मात्रकों के सामान्य गुणज और अपवर्तकों को व्यक्त करने वाले उपसर्ग और उनके प्रतीक परिशिष्ट (A2) में दिए गए हैं। भौतिक राशियों, रासायनिक तत्वों और नाभिकों के संकेतों के उपयोग संबंधी सामान्य निर्देश परिशिष्ट (A7) में दिए गए हैं और आपके मार्गदर्शन तथा तात्कालिक संदर्भ के लिए SI मात्रकों एवं अन्य मात्रकों संबंधी निर्देश परिशिष्ट (A8) में दिए गए हैं।

1.3 सार्थक अंक

हर मापन में त्रुटियाँ सम्मिलित होती हैं। अत: मापन के परिणामों को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाना चाहिए कि मापन की परिशुद्धता स्पष्ट हो जाए। साधारणत:, मापन के परिणामों को एक संख्या के रूप में प्रस्तुत करते हैं जिसमें वह सभी अंक सम्मिलित होते हैं जो विश्वसनीय हैं, तथा वह प्रथम अंक भी सम्मिलित किया जाता है जो अनिश्चित है। विश्वसनीय अंकों और पहले अनिश्चित अंक को संख्या के **सार्थक-अंक** माना जाता है। यदि हम कहें कि किसी सरल लोलक का दोलन काल 1.62 s है, तो इसमें अंक 1 एवं 6 तो विश्वसनीय एवं निश्चित हैं, जबकि अंक 2 अनिश्चित है; इस प्रकार मापित मान में 3 सार्थक अंक हैं। यदि मापन के बाद किसी वस्तु की लम्बाई, 287.5 cm व्यक्त की जाए तो इसमें चार सार्थक अंक हैं, जिनमें 2, 8, 7 तो निश्चित हैं परन्तु अंक 5 अनिश्चित है। अत: राशि के मापन के परिणाम में सार्थक अंकों से अधिक अंक लिखना अनावश्यक एवं भ्रामक होगा, क्योंकि, यह माप की परिशुद्धता के विषय में गलत धारणा देगा।

किसी संख्या में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करने के नियम निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा समझे जा सकते हैं। जैसा पहले वर्णन किया जा चुका है कि सार्थक अंक मापन की परिशुद्धता इंगित करते हैं जो मापक यंत्र के अल्पतमांक पर निर्भर करती है। **किसी मापन में विभिन्न मात्रकों के परिवर्तन के चयन से सार्थक अंकों की संख्या परिवर्तित नहीं होती।** यह महत्वपूर्ण टिप्पणी निम्नलिखित में से अधिक प्रेक्षणों को स्पष्ट कर देती है:

(1) उदाहरण के लिए, लम्बाई 2.308 cm में चार सार्थक अंक हैं। परन्तु विभिन्न मात्रकों में इसी लम्बाई को हम 0.02308 m या 23.08 mm या 23080 μm भी लिख सकते हैं।

© NCERT not to be republished

इन सभी संख्याओं में सार्थक अंकों की संख्या वही अर्थात चार (अंक 2, 3, 0, 8) है। यह दर्शाता है कि सार्थक अंकों की संख्या निर्धारित करने में, दशमलव कहाँ लगा है इसका कोई महत्व नहीं होता। उपरोक्त उदाहरण से निम्नलिखित नियम प्राप्त होते हैं :

- ***सभी शून्येतर अंक सार्थक अंक होते हैं।***
- ***यदि किसी संख्या में दशमलव बिन्दु है, तो उसकी स्थिति का ध्यान रखे बिना, किन्हीं दो शून्येतर अंकों के बीच के सभी शून्य सार्थक अंक होते हैं।***
- ***यदि कोई संख्या 1 से छोटी है तो वे शून्य जो दशमलव के दाईं ओर पर प्रथम शून्येतर अंक के बाईं ओर हों, सार्थक अंक नहीं होते।*** (0.00 2308 में अधोरेखांकित शून्य सार्थक अंक नहीं हैं)।
- ***ऐसी संख्या जिसमें दशमलव नहीं है के अंतिम अथवा अनुगामी शून्य सार्थक अंक नहीं होते।***
  (अत: 123 m = 12300 cm = 123000 mm में तीन ही सार्थक अंक हैं, संख्या में अनुगामी शून्य सार्थक अंक नहीं हैं)। तथापि, आप अगले प्रेक्षण पर भी ध्यान दे सकते हैं।
- ***एक ऐसी संख्या, जिसमें दशमलव बिन्दु हो, के अनुगामी शून्य सार्थक अंक होते हैं।***
  (संख्या 3.500 या 0.06900 में चार सार्थक अंक हैं)।

(2) अनुगामी शून्य सार्थक अंक हैं या नहीं इस विषय में भ्रांति हो सकती है। मान लीजिए किसी वस्तु की लम्बाई 4.700 m लिखी गई है। इस प्रेक्षण से यह स्पष्ट है कि यहाँ शून्यों का उद्देश्य माप की परिशुद्धता को बतलाना है अत: यहाँ सभी शून्य सार्थक अंक हैं। (यदि ये सार्थक न होते तो इनको स्पष्ट रूप से लिखने की आवश्यकता न होती। तब सीधे-सीधे हम अपनी माप को 4.7 m लिख सकते थे।) अब मान लीजिए हम अपना मात्रक बदल लेते हैं तो

4.700 m = 470.0 cm = 0.004700 km = 4700 mm

क्योंकि, अंतिम संख्या में दो शून्य, बिना दशमलव वाली संख्या में अनुगामी शून्य हैं, अत: प्रेक्षण (1) के अनुसार हम इस गलत निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि इस संख्या में 2 सार्थक अंक हैं जबकि वास्तव में इसमें चार सार्थक अंक हैं, मात्र मात्रकों के परिवर्तन से सार्थक अंकों की संख्या में परिवर्तन नहीं होता।

(3) ***सार्थक अंकों के निर्धारण में इस प्रकार की संदिग्धता को दूर करने के लिए सर्वोत्तम उपाय यह है कि प्रत्येक माप को वैज्ञानिक संकेत (10 की घातों के रूप में) में प्रस्तुत किया जाए।*** इस संकेत पद्धति में प्रत्येक संख्या को $a \times 10^b$ के रूप में लिखा जाता है, जहाँ a, 1 से 10 के बीच की कोई संख्या है और b, 10 की कोई धनात्मक या ऋणात्मक घात है। संख्या की सन्निकट अवधारणा बनाने के लिए हम इसका पूर्णांकन कर सकते हैं, यानि ($a \leq 5$) होने पर इसे 1 और ($5 < a \leq 10$) होने पर 10 मान सकते हैं। तब, इस संख्या को लगभग 10^b के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जिसमें 10 की घात b भौतिक राशि के **परिमाण की कोटि** कहलाती है। जब केवल एक अनुमान की आवश्यकता हो तो यह कहने से काम चलेगा कि राशि 10^b की कोटि की है। उदाहरण के लिए पृथ्वी का व्यास (1.28×10^7 m), 10^7 m की कोटि का है, इसके परिमाण की कोटि 7 है। हाइड्रोजन परमाणु का व्यास (1.06×10^{-10} m), 10^{-10} m की कोटि का है। इसके परिमाण की कोटि –10 है। अत:, पृथ्वी का व्यास, हाइड्रोजन परमाणु के व्यास से 17 परिमाण कोटि बड़ा है।

प्राय: एक अंक के बाद दशमलव लगाने की प्रथा है। इससे ऊपर प्रेक्षण (a) में उल्लिखित भ्रांति लुप्त हो जाता है :

$$4.700 \text{ m} = 4.700 \times 10^2 \text{ cm}$$
$$= 4.700 \times 10^3 \text{ mm} = 4.700 \times 10^{-3} \text{ km}$$

यहाँ सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करने में 10 की घात असंगत है। तथापि, वैज्ञानिक संकेत में आधार संख्या के सभी शून्य सार्थक अंक होते हैं। इस प्रकरण में सभी संख्याओं में 4 सार्थक अंक हैं।

इस प्रकार, वैज्ञानिक संकेत में आधार संख्या a के अनुगामी शून्यों के बारे में कोई भ्रांति नहीं रह जाती। वे सदैव सार्थक अंक होते हैं।

(4) किसी भी मापन के प्रस्तुतिकरण की वैज्ञानिक संकेत विधि एक आदर्श विधि है। परन्तु यदि यह विधि नहीं अपनायी जाती, तो हम पूर्वगामी उदाहरण में उल्लिखित नियमों का पालन करते हैं :

- ***एक से बड़ी, बिना दशमलव वाली संख्या के लिए, अनुगामी शून्य सार्थक-अंक नहीं हैं।***
- ***दशमलव वाली संख्या के लिए अनुगामी शून्य सार्थक अंक हैं।***

(5) 1 से छोटी संख्या में, पारस्परिक रूप से, दशमलव के बाईं ओर लिखा शून्य (जैसे 0.1250) कभी भी सार्थक अंक नहीं होता। तथापि, किसी माप में ऐसी संख्या के अंत में आने वाले शून्य सार्थक अंक होते हैं।

(6) गुणक या विभाजी कारक जो न तो पूर्णांकित संख्याएँ होती हैं और न ही किसी मापित मान को निरूपित करती हैं, यथार्थ होती हैं और उनमें अनन्त सार्थक-अंक होते हैं। उदाहरण के लिए $r = \frac{d}{2}$ अथवा $s = 2\pi r$ में गुणांक 2 एक

© NCERT not to be republished

यथार्थ संख्या है और इसे 2.0, 2.00 या 2.0000, जो भी आवश्यक हो लिखा जा सकता है। इसी प्रकार, $T = \frac{t}{n}$, में n एक पूर्णांक है।

1.3.1 सार्थक अंकों से संबंधित अंकीय संक्रियाओं के नियम

किसी परिकलन का परिणाम, जिसमें राशियों के सन्निकट मापे गए मान सम्मिलित हैं (अर्थात् वे मान जिनमें सार्थक अंकों की संख्या सीमित है) व्यक्त करते समय, मूल रूप से मापे गए मानों की अनिश्चितता भी प्रतिबिम्बित होनी चाहिए। यह परिणाम, उन मापित मानों से अधिक यथार्थ नहीं हो सकता जिन पर यह आधारित है। अतः, व्यापक रूप से, किसी भी परिणाम में सार्थक अंकों की संख्या, उन मूल आंकड़ों से अधिक नहीं हो सकती जिनसे इसे प्राप्त किया गया है। इस प्रकार, यदि किसी पिण्ड का मापित द्रव्यमान मान लीजिए 4.237 g है (4 सार्थक अंक), और इसका मापित आयतन 2.51 cm^3 है, तो मात्र अंकीय विभाजन द्वारा इसका घनत्व दशमलव के 11 स्थानों तक 1.68804780876 g/cm^3 आता है। स्पष्टतः घनत्व के इस परिकलित मान को इतनी परिशुद्धता के साथ लिखना पूर्णतः हास्यास्पद तथा असंगत होगा, क्योंकि जिन मापों पर यह मान आधारित है उनकी परिशुद्धता काफी कम है। सार्थक अंकों के साथ अंकीय संक्रियाओं के निम्नलिखित नियम यह सुनिश्चित करते हैं कि किसी परिकलन का अंतिम परिणाम उतनी ही परिशुद्धता के साथ दर्शाया जाता है जो निवेशित मापित मानों की परिशुद्धता के संगत हो:

(1) ***संख्याओं को गुणा या भाग करने से प्राप्त परिणाम में केवल उतने ही सार्थक अंक रहने देना चाहिए जितने कि सबसे कम सार्थक अंकों वाली मूल संख्या में है।***

अतः उपरोक्त उदाहरण में घनत्व को तीन सार्थक अंकों तक ही लिखा जाना चाहिए,

$$\text{घनत्व} = \frac{4.237\,\text{g}}{2.51\,\text{cm}^3} = 1.69\,\text{g cm}^{-3}$$

इसी प्रकार, यदि दी गई प्रकाश की चाल 3.00×10^8 m/s^{-1} (तीन सार्थक अंक) और एक वर्ष (1 y = 365.25 d) में 3.1557×10^7 s (पांच सार्थक अंक) हों, तो एक प्रकाश वर्ष में 9.47×10^{15} m (तीन सार्थक अंक) होंगे।

(2) ***संख्याओं के संकलन अथवा व्यवकलन से प्राप्त अंतिम परिणाम में दशमलव के बाद उतने ही सार्थक अंक रहने देने चाहिए जितने कि संकलित या व्यवकलित की जाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम हैं।***

उदाहरणार्थ, संख्याओं 436.32 g, 227.2 g एवं 0.301 g का योग 663.821 g है। दी गई संख्याओं में सबसे कम परिशुद्ध (227.2 g) माप दशमलव के एक स्थान तक ही यथार्थ है। इसलिए, अंतिम परिणाम को 663.8 g तक पूर्णांकित कर दिया जाना चाहिए।

इसी प्रकार, लम्बाइयों में अंतर को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

0.307 m – 0.304 m = 0.003 m = 3 10^{-3} m

ध्यान दीजिए, हमें नियम (1) जो गुणा और भाग के लिए लागू होता है, उसे **संकलन (योग)** के उदाहरण में प्रयोग करके परिणाम को 664 g नहीं लिखना चाहिए और **व्यवकलन** के उदाहरण में 3.00 10^{-3} m नहीं लिखना चाहिए। ये माप की परिशुद्धता को उचित रूप से व्यक्त नहीं करते हैं। संकलन और व्यवकलन के लिए यह नियम दशमलव स्थान के पदों में है।

1.3.2 अनिश्चित अंकों का पूर्णांकन

जिन संख्याओं में एक से अधिक अनिश्चित अंक होते हैं, उनके अभिकलन के परिणाम का पूर्णांकन किया जाना चाहिए। अधिकांश प्रकरणों में, संख्याओं को उचित सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने के नियम स्पष्ट ही हैं। संख्या 2.746 को तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने पर 2.75 प्राप्त होता है, जबकि 2.743 के पूर्णांकन से 2.74 मिलता है। परिपाटी के अनुसार नियम यह है कि ***यदि उपेक्षणीय अंक (पूर्वोक्त संख्या में अधोरेखांकित अंक) 5 से अधिक है तो पूर्ववर्ती अंक में एक की वृद्धि कर दी जाती है, और यदि यह उपेक्षणीय अंक 5 से कम होता है, तो पूर्ववर्ती अंक अपरिवर्तित रखा जाता है।*** लेकिन यदि संख्या 2.745 है, जिसमें उपेक्षणीय अंक 5 है, तो क्या होता है? यहाँ परिपाटी यह है कि ***यदि पूर्ववर्ती अंक सम है तो उपेक्षणीय अंक को छोड़ दिया जाता है और यदि यह विषम है, तो पूर्ववर्ती अंक में 1 की वृद्धि कर देते हैं।*** तब संख्या 2.745, तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकन करने पर 2.74 हो जाती है। दूसरी ओर, संख्या 2.735 तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने के पश्चात् 2.74 हो जाती है, क्योंकि पूर्ववर्ती अंक विषम है।

किसी भी उलझन वाले अथवा बहुपदी जटिल परिकलन में, मध्यवर्ती पदों में सार्थक अंकों से एक अंक अधिक रहने देना चाहिए, जिसे परिकलन के अंत में उचित सार्थक अंकों तक पूर्णांकित कर देना चाहिए। इसी प्रकार, एक संख्या जो कई सार्थक अंकों तक ज्ञात है, जैसे निर्वात में प्रकाश का वेग, जिसके लिए, प्रायः 2.99792458 $\times 10^8$ m/s को सन्निकट मान 3×10^8 m/s में पूर्णांकित कर परिकलनों में उपयोग करते हैं। अंत

© NCERT not to be republished

में ध्यान रखिये कि सूत्रों में उपयोग होने वाली यथार्थ संख्याएं, जैसे $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ में 2π, में सार्थक अंकों की संख्या अत्यधिक (अनन्त) है। $\pi = 3.1415926....$ का मान बहुत अधिक सार्थक अंकों तक ज्ञात है लेकिन आम मापित राशियों में परिशुद्धि के आधार पर π का मान 3.142 या 3.14 भी लेना तर्क सम्मत है।

उदाहरण 1.1 किसी घन की प्रत्येक भुजा की माप 7.203 m है। उचित सार्थक अंकों तक घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात कीजिए।

हल मापी गई लम्बाई में सार्थक अंकों की संख्या 4 है। इसलिए, परिकलित क्षेत्रफल एवं आयतन के मानों को भी 4 सार्थक अंकों तक पूर्णांकित किया जाना चाहिए।

घन का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 6(7.203)^2\ m^2$
$= 311.299254\ m^2$
$= 311.3\ m^2$

घन का आयतन $= (7.203)^3\ m^3$
$= 373.714754\ m^3$
$= 373.7\ m^3$ ◀

उदाहरण 1.2 किसी पदार्थ के 5.74 g का आयतन $1.2\ cm^3$ है। सार्थक अंकों को ध्यान में रखते हुए इसका घनत्व व्यक्त कीजिए।

हल द्रव्यमान में 3 सार्थक अंक हैं, जबकि आयतन के मापित मान में केवल दो सार्थक अंक हैं। अतः घनत्व को केवल दो सार्थक अंकों तक व्यक्त किया जाना चाहिए।

$$\text{घनत्व} = \frac{5.74}{1.2}\ g\ cm^{-3}$$
$$= 4.8\ g\ cm^{-3}$$ ◀

1.3.3 अंकगणितीय परिकलनों के परिणामों में अनिश्चितता निर्धारित करने के नियम

अंकीय संक्रियाओं में संख्याओं/ मापित राशियों में अनिश्चितता या त्रुटि निर्धारित करने संबंधी नियमों को निम्नलिखित उदाहरणों के द्वारा समझा जा सकता है।

(1) यदि किसी पतली, आयताकार शीट की लम्बाई और चौड़ाई, किसी मीटर पैमाने से मापने पर क्रमशः 16.2 cm एवं 10.1 cm हैं, तो यहाँ प्रत्येक माप में तीन सार्थक अंक हैं। इसका अर्थ है कि लम्बाई को हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$l = 16.2 \pm 0.1\ cm$$
$$= 16.2\ cm \pm 0.6\ \%.$$

इसी प्रकार, चौड़ाई को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$b = 10.1 \pm 0.1\ cm$$
$$= 10.1\ cm \pm 1\ \%$$

तब, त्रुटि संयोजन के नियम का उपयोग करने पर, दो (या अधिक) प्रायोगिक मापों के गुणनफल की त्रुटि

$$lb = 163.62\ cm^2 \pm 1.6\%$$
$$= 163.62 \pm 2.6\ cm^2$$

इस उदाहरण के अनुसार हम अंतिम परिणाम को इस प्रकार लिखेंगे

$$lb = 164 \pm 3\ cm^2$$

यहाँ, $3\ cm^2$ आयताकार शीट के क्षेत्रफल के आकलन में की गई त्रुटि अथवा अनिश्चितता है।

(2) ***यदि किसी प्रायोगिक आंकड़े के समुच्चय में n सार्थक अंकों का उल्लेख है, तो आंकड़े के संयोजन से प्राप्त परिणाम भी n सार्थक अंकों तक वैध होगा।***

तथापि, यदि आंकड़े घटाये जाते हैं तो सार्थक अंकों की संख्या कम की जा सकती है। उदाहरणार्थ, 12.9 g – 7.06 g दोनों तीन सार्थक अंकों तक विनिर्दिष्ट हैं, परन्तु इसे 5.84 g के रूप में मूल्यांकित नहीं किया जा सकता है बल्कि केवल 5.8 g लिखा जाएगा, क्योंकि संकलन या व्यवकलन में अनिश्चितताएँ एक भिन्न प्रकार से संयोजित होती हैं। (संकलित या व्यवकलित की जाने वाली संख्याओं में दशमलव के बाद कम से कम अंकों वाली संख्या न कि कम से कम सार्थक अंकों वाली संख्या निर्णय का आधार होती है।)

(3) ***किसी संख्या के मान में आपेक्षिक त्रुटि, जो विनिर्दिष्ट सार्थक अंकों तक दी गई है, न केवल n पर, वरन, दी गई संख्या पर भी निर्भर करती है।***

उदाहरणार्थ, द्रव्यमान 1.02 g के मापन में यथार्थता ± 0.01 g है, जबकि दूसरी माप 9.89 g भी ± 0.01 g तक ही यथार्थ है।

1.02 में आपेक्षिक त्रुटि
$= (\pm 0.01/1.02) \times 100\ \%$
$= \pm 1\%$

इसी प्रकार 9.89 g में आपेक्षिक त्रुटि
$= (\pm 0.01/9.89) \times 100\ \%$
$= \pm 0.1\ \%$

© NCERT not to be republished

अंत में, याद रखिए कि **बहुपदीय अभिकलन के मध्यवर्ती परिणाम को परिकलित करने में प्रत्येक माप को, अल्पतम परिशुद्ध माप से एक सार्थक अंक अधिक रखना चाहिए।** आंकड़ों के अनुसार इसे तर्कसंगत करने के बाद ही इनकी अंकीय संक्रियाएँ करना चाहिए अन्यथा पूर्णांकन की त्रुटियाँ उत्पन्न हो जाएंगी। उदाहरणार्थ, 9.58 के व्युत्क्रम का तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकन करने पर मान 0.104 है, परन्तु 0.104 का व्युत्क्रम करने पर तीन सार्थक अंकों तक प्राप्त मान 9.62 है। पर यदि हमने $1/9.58 = 0.1044$ लिखा होता तो उसके व्युत्क्रम को तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने पर हमें मूल मान 9.58 प्राप्त होगा।

उपरोक्त उदाहरण, जटिल बहुपदी परिकलन के मध्यवर्ती पदों में (कम से कम परिशुद्ध माप में अंकों की संख्या की अपेक्षा) एक अतिरिक्त अंक रखने की धारणा को न्यायसंगत ठहराता है, जिससे कि संख्याओं की पूर्णांकन प्रक्रिया में अतिरिक्त त्रुटि से बचा जा सके।

1.4 भौतिक राशियों की विमाएँ

किसी भौतिक राशि की प्रकृति की व्याख्या उसकी विमाओं द्वारा की जाती है। व्युत्पन्न मात्रकों द्वारा व्यक्त होने वाली सभी भौतिक राशियाँ, सात मूल राशियों के संयोजन के पदों में प्रस्तुत की जा सकती हैं। इन मूल राशियों को हम भौतिक संसार की सात विमाएँ कह सकते हैं और इन्हें गुरु कोष्ठक के साथ निर्दिष्ट किया जाता है। इस प्रकार, लम्बाई की विमा [L], विद्युत धारा की [A], ऊष्मागतिकीय ताप की [K], ज्योति तीव्रता की [cd], और पदार्थ की मात्रा की [mol] है। ***किसी भौतिक राशि की विमाएँ उन घातों (या घातांकों) को कहते हैं, जिन्हें उस राशि को व्यक्त करने के लिए मूल राशियों पर चढ़ाना पड़ता है।*** ध्यान दीजिए किसी राशि को गुरु कोष्ठक [ ] से घेरने का यह अर्थ है कि हम उस राशि की विमा पर विचार कर रहे हैं।

यांत्रिकी में, सभी भौतिक राशियों को विमाओं [L], [M] और [T] के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु द्वारा घेरा गया आयतन उसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई अथवा तीन लम्बाइयों के गुणन द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसलिए, आयतन का विमीय सूत्र $= [L] \times [L] \times [L] = [L]^3 = [L^3]$। क्योंकि, आयतन, द्रव्यमान और समय पर निर्भर नहीं करता, इसलिए यह कहा जाता है कि आयतन में द्रव्यमान की शून्य विमा, [M°], समय की शून्य विमा [T°] तथा लम्बाई की 3 विमाएँ [L^3] हैं।

इसी प्रकार, बल को द्रव्यमान और त्वरण के गुणनफल के रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

बल = द्रव्यमान × त्वरण

= द्रव्यमान × (लम्बाई)/(समय)^2

बल की विमाएँ $[M][L]/[T]^2 = [M\,L\,T^{-2}]$ हैं। अतः बल में, द्रव्यमान की 1, लम्बाई की 1 और समय की –2 विमाएँ हैं। यहाँ अन्य सभी मूल राशियों की विमाएँ शून्य हैं।

ध्यान दीजिए, इस प्रकार के प्रस्तुतीकरण में परिमाणों पर विचार नहीं किया जाता। इसमें भौतिक राशियों के प्रकार की गुणता का समावेश होता है। इस प्रकार, इस संदर्भ में वेग परिवर्तन, प्रारंभिक वेग, औसत वेग, अंतिम वेग और चाल, ये सभी तुल्य राशियाँ हैं, क्योंकि ये सभी राशियाँ लम्बाई/समय के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं और इनकी विमाएँ [L]/[T] या [$L\,T^{-1}$] हैं।

1.5 विमीय सूत्र एवं विमीय समीकरणें

किसी दी हुई भौतिक राशि का **विमीय सूत्र** वह व्यंजक है जो यह दर्शाता है कि किसी भौतिक राशि में किस मूल राशि की कितनी विमाएँ हैं। उदाहरणार्थ, आयतन का विमीय सूत्र [$M^\circ\,L^3\,T^\circ$] और वेग या चाल का [$M^\circ\,L\,T^{-1}$] है। इसी प्रकार, [$M^\circ\,L\,T^{-2}$], त्वरण का तथा [$M\,L^{-3}\,T^\circ$] द्रव्यमान घनत्व का विमीय सूत्र है।

किसी भौतिक राशि को उसके विमीय सूत्र के बराबर लिखने पर प्राप्त समीकरण को उस राशि का **विमीय समीकरण** कहते हैं। अतः विमीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें किसी भौतिक राशि को मूल राशियों और उनकी विमाओं के पदों में निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, आयतन [V], चाल [v], बल [F] और द्रव्यमान घनत्व [ρ] की विमीय समीकरण को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$[V] = [M^0\,L^3\,T^0]$

$[v] = [M^0\,L\,T^{-1}]$

$[F] = [M\,L\,T^{-2}]$

$[\rho] = [M\,L^{-3}\,T^0]$

भौतिक राशियों के बीच संबंध निरूपित करने वाले समीकरण के आधार पर विमीय समीकरण, व्युत्पन्न की जा सकती है। विविध प्रकार की बहुत सी भौतिक राशियों के विमीय सूत्र, जिन्हें अन्य भौतिक राशियों के मध्य संबंधों को निरूपित करने वाले समीकरणों से व्युत्पन्न तथा मूल राशियों के पदों में व्यक्त किया गया है, आपके मार्गदर्शन एवं तात्कालिक संदर्भ के लिए परिशिष्ट–9 में दिए गए हैं।

1.6 विमीय विश्लेषण एवं इसके अनुप्रयोग

विमाओं की संकल्पना की स्वीकृति, जो भौतिक व्यवहार के वर्णन में मार्गदर्शन करती है, अपना एक आधारिक महत्व रखती है क्योंकि इसके अनुसार केवल वही भौतिक राशियाँ संकलित या व्यवकलित की जा सकती हैं जिनकी विमाएँ समान हैं।

© NCERT not to be republished

विमीय विश्लेषण का व्यापक ज्ञान, विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंधों के निगमन में सहायता करता है और विभिन्न गणितीय व्यंजकों की व्युत्पत्ति, यथार्थता तथा विमीय संगतता की जाँच करने में सहायक है। जब दो या अधिक भौतिक राशियों के परिमाणों को गुणा (या भाग) किया जाता है, तो उनके मात्रकों के साथ उस प्रकार का व्यवहार किया जाना चाहिए जैसा हम सामान्य बीज-गणितीय प्रतीकों के साथ करते हैं। अंश और हर से सर्वसम मात्रकों को हम निरसित कर सकते हैं। यही बात भौतिक राशि की विमाओं के साथ भी लागू होती है। इसी प्रकार, किसी गणितीय समीकरण में पक्षों में प्रतीकों द्वारा निरूपित भौतिक राशियों की विमाएँ समान होनी चाहिए।

1.6.1 समीकरणों की विमीय संगति की जाँच

भौतिक राशियों के परिमाण केवल तभी संकलित या व्यवकलित किए जा सकते हैं यदि उनकी विमाएँ समान हों। दूसरे शब्दों में, हम केवल एक ही प्रकार की राशियों का संकलन या व्यवकलन कर सकते हैं। अतः बल को वेग के साथ संकलित या ऊष्मा गतिक ताप में से विद्युत धारा को व्यवकलित नहीं किया जा सकता। इस सरल सिद्धांत को **विमाओं की समघातता सिद्धांत** कहते हैं और इसकी सहायता से किसी समीकरण की संशुद्धि की जाँच कर सकते हैं। यदि किसी समीकरण के सभी पदों की विमाएँ समान नहीं हैं तो वह समीकरण गलत होती है। अतः यदि हम किसी पिण्ड की लम्बाई (या दूरी) के लिए व्यंजक व्युत्पन्न करें, तो चाहे उसमें सम्मिलित प्रतीक कुछ भी हों, उनकी विमाओं को सरल करने पर अंत में प्रत्येक पद में लम्बाई की विमा ही शेष रहनी चाहिए। इसी प्रकार, यदि हम चाल के लिए समीकरण व्युत्पन्न करें, तो इसके दोनों पक्षों के पदों का विमीय-सूत्र सरलीकरण के बाद $[L\,T^{-1}]$ ही पाया जाना चाहिए।

यदि किसी समीकरण की संशुद्धि में संदेह हो तो उस समीकरण की संगति की प्राथमिक जांच के लिए मान्य प्रथा के अनुसार विमाओं का उपयोग किया जाता है। किन्तु, विमीय संगति किसी समीकरण के सही होने की गारंटी नहीं है। यह अविम राशियों या फलनों की अनिश्चितता सीमा तक अनिश्चित होती है। त्रिकोणमितीय, लघुगणकीय और चरघातांकी फलनों जैसे विशिष्ट फलनों के कोणांक अविम होने चाहिए। एक शुद्ध संख्या, समान भौतिक राशियों का अनुपात, जैसे अनुपात के रूप में कोण (लम्बाई/लम्बाई), अनुपात के रूप में अपवर्तनांक (निर्वात में प्रकाश का वेग/माध्यम में प्रकाश का वेग) आदि की कोई विमाएँ नहीं होतीं।

अब, हम निम्नलिखित समीकरण की विमीय संगति या समांगता की जाँच कर सकते हैं

$$x = x_0 + v_0\,t + (1/2)\,a\,t^2$$

जहाँ x किसी कण अथवा पिण्ड द्वारा t सेकंड में चलित वह दूरी है, जो कण या पिण्ड समय $t = 0$ पर स्थिति x_0 से प्रारंभिक वेग v_0 से आरम्भ करके तय करता है, और इसका गति की दिशा में एकसमान त्वरण a रहता है।

प्रत्येक पद के लिए विमीय समीकरण लिखने पर,

$$[x] = [L]$$
$$[x_0] = [L]$$
$$[v_0\,t] = [L\,T^{-1}]\ [T] = [L]$$
$$[1/2\ a\,t^2] = [L\,T^{-2}]\ [T^2] = [L]$$

क्योंकि इस समीकरण के सभी पदों की विमाएँ समान (लम्बाई की) हैं, इसलिए यह विमीय दृष्टि से संगत समीकरण है।

यहाँ ध्यान देने योग्य तथ्य यह है, कि विमीय संगति परीक्षण, मात्रकों की संगति से कम या अधिक कुछ नहीं बताता। लेकिन, इसका लाभ यह है कि हम मात्रकों के किसी विशेष चयन के लिए बाध्य नहीं हैं और न ही हमें मात्रकों के पारस्परिक गुणजों या अपवर्तकों में रूपांतरण की चिन्ता करने की आवश्यकता है। **यह बात भी हमें स्पष्ट करनी चाहिए कि यदि कोई समीकरण संगति परीक्षण में असफल हो जाती है तो वह गलत सिद्ध हो जाती है, परन्तु यदि वह परीक्षण में सफल हो जाती है तो इससे वह सही सिद्ध नहीं हो जाती। इस प्रकार कोई विमीय रूप से सही समीकरण आवश्यक रूप से यथार्थ (सही) समीकरण नहीं होती, जबकि विमीय रूप से गलत या असंगत समीकरण गलत होनी चाहिए।**

उदाहरण 1.3 आइए निम्नलिखित समीकरण पर विचार करें

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = m\,g\,h$$

यहाँ m वस्तु का द्रव्यमान, v इसका वेग है, g गुरुत्वीय त्वरण और h ऊँचाई है। जाँचिए कि क्या यह समीकरण विमीय दृष्टि से सही है।

हल यहाँ वाम पक्ष की विमाएँ

$$[M]\ [L\,T^{-1}]^2 = [M]\ [L^2\,T^{-2}]$$

तथा

$$= [M\,L^2\,T^{-2}]$$

दक्षिण पक्ष की विमाएँ

$$[M][L\,T^{-2}]\ [L] = [M][L^2\,T^{-2}]$$
$$= [M\,L^2\,T^{-2}]$$

चूँकि, दोनों पक्षों की विमाएँ समान हैं, इसलिए यह समीकरण विमीय दृष्टि से सही है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 1.4 ऊर्जा का SI मात्रक J = kg m^2 s^{-2}; है, चाल v का m s^{-1} और त्वरण a का m s^{-2} है। गतिज ऊर्जा (k) के लिए निम्नलिखित सूत्रों में आप किस-किस को विमीय दृष्टि से गलत बताएँगे? (m पिण्ड का द्रव्यमान है)।

(a) $K = m^2 v^3$
(b) $K = (1/2)mv^2$
(c) $K = ma$
(d) $K = (3/16)mv^2$
(e) $K = (1/2)mv^2 + ma$

हल प्रत्येक सही समीकरण में दोनों पक्षों का विमीय सूत्र समान होना चाहिए। यह भी कि केवल समान विमाओं वाली राशियों का ही संकलन या व्यवकलन किया जा सकता है। दक्षिण पक्ष की राशि की विमाएँ (a) के लिए [M^2 L^3 T^{-3}]; (b) तथा (d) के लिए [M L^2 T^{-2}]; (c) के लिए [M L T^{-2}] है। समीकरण (e) के दक्षिण पक्ष की राशि की कोई उचित विमाएँ नहीं हैं क्योंकि इसमें भिन्न विमाओं वाली दो राशियों को संकलित किया गया है। अब क्योंकि K की विमाएँ [M L^2 T^{-2}] है, इसलिए सूत्र (a), (c) एवं (e) विमीय रूप से संगत नहीं हैं। ध्यान दें, कि विमीय तर्कों से यह पता नहीं चलता कि (b) व (d) में कौन सा सूत्र सही है। इसके लिए गतिज ऊर्जा की वास्तविक परिभाषा को देखना पड़ेगा (देखें अध्याय 5)। गतिज ऊर्जा के लिए सही सूत्र (b) में दिया गया है। ◀

1.6.2 विभिन्न भौतिक राशियों के मध्य संबंध व्युत्पन्न करना

कभी-कभी विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंध व्युत्पन्न करने के लिए विमाओं की विधि का उपयोग किया जा सकता है। इसके लिए हमें यह ज्ञात होना चाहिए कि एक भौतिक राशि किन-किन दूसरी भौतिक राशियों पर निर्भर करती है (तीन भौतिक राशियों या एकघातत: स्वतंत्र चरों तक)। इसके लिए, हम दी गई राशि को निर्भर राशियों की विभिन्न घातों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। आइये, एक उदाहरण द्वारा इस प्रक्रिया को समझें।

उदाहरण 1.5 एक सरल लोलक पर विचार कीजिए, जिसमें गोलक को एक धागे से बाँध कर लटकाया गया है और जो गुरुत्व बल के अधीन दोलन कर रहा है। मान लीजिए कि इस लोलक का दोलन काल इसकी लम्बाई (l), गोलक के द्रव्यमान (m) और गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है। विमाओं की विधि का उपयोग करके इसके दोलन-काल के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

हल दोलन काल T की, राशियों l, g और m पर निर्भरता को एक गुणनफल के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$T = k\, l^x\, g^y\, m^z$

जहाँ, k एक विमाहीन स्थिरांक है, एवं x, y, z घातांक हैं। दोनों ओर की राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[L^0 M^0 T^1] = [L^1]^x [L^1 T^{-2}]^y [M^1]^z$$

$$= L^{x+y} T^{-2y} M^z$$

दोनों ओर की विमाएँ समीकृत करने पर

$x + y = 0$; $-2y = 1$; एवं $z = 0$

अत: $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0$

$\therefore \quad T = k\, l^{½}\, g^{-½}$

या $\quad T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$

ध्यान दीजिए, यहाँ स्थिरांक k का मान विमीय विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता है। यहाँ इसका कोई अर्थ नहीं है कि सूत्र के दक्षिण पक्ष को किसी संख्या से गुणा किया गया है, क्योंकि ऐसा करने से विमाएँ प्रभावित नहीं होतीं।

वास्तव में, $k = 2\pi$, अत: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ◀

परस्पर संबंधित राशियों के बीच संबंध व्युत्पन्न करने के लिए विमीय विश्लेषण काफी उपयोगी है। तथापि विमाहीन स्थिरांकों के मान इस विधि द्वारा ज्ञात नहीं किए जा सकते। विमीय विधि द्वारा किसी समीकरण की केवल विमीय वैधता ही जांची जा सकती है, किसी समीकरण में विभिन्न भौतिक राशियों के बीच यथार्थ संबंध नहीं जांचे जा सकते। यह समान विमा वाली राशियों में विभेद नहीं कर सकती।

इस अध्याय के अंत में दिए गए कई अभ्यास प्रश्न, आपकी विमीय विश्लेषण की कुशलता विकसित करने में सहायक होंगे।

© NCERT not to be republished

सारांश

1. भौतिक विज्ञान भौतिक राशियों के मापन पर आधारित एक परिमाणात्मक विज्ञान है । कुछ भौतिक राशियां जैसे लंबाई, द्रव्यमान, समय, विद्युत धारा, ऊष्मागतिक ताप, पदार्थ की मात्रा और ज्योति-तीव्रता, मूल राशियों के रूप में चुनी गई हैं।
2. प्रत्येक मूल राशि किसी मूल मात्रक (जैसे मीटर, किलोग्राम, सेकंड, ऐम्पियर, केल्विन, मोल और कैंडेला) के पद में परिभाषित है । मूल मात्रक स्वेच्छा से चयनित परंतु समुचित रूप से मानकीकृत निर्देश मानक होते हैं । मूल राशियों के मात्रकों को मूल मात्रक कहते हैं।
3. मूल राशियों से व्युत्पन्न अन्य भौतिक राशियों को मूल मात्रकों के संयोजन के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जिन्हें व्युत्पन्न मात्रक कहते हैं । मूल और व्युत्पन्न दोनों मात्रकों के पूर्ण समुच्चय को, मात्रक प्रणाली कहते हैं ।
4. सात मूल मात्रकों पर आधारित मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली (SI) वर्तमान में अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत प्रणाली है । यह प्रणाली समस्त संसार में व्यापक रूप से प्रयोग में लाई जाती है ।
5. मूल राशियों और व्युत्पन्न राशियों से प्राप्त सभी भौतिक मापों में SI मात्रकों का प्रयोग किया जाता है। कुछ व्युत्पन्न मात्रकों को SI मात्रकों में विशेष नामों (जैसे जूल, न्यूटन, वाट आदि) से व्यक्त किया जाता है ।
6. SI मात्रकों के सुपरिभाषित एवं अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत मात्रक प्रतीक हैं (जैसे मीटर के लिए m, किलोग्राम के लिए kg, सेकंड के लिए s, ऐम्पियर के लिए A, न्यूटन के लिए N, इत्यादि)।
7. प्राय: छोटी एवं बड़ी राशियों की भौतिक मापों को वैज्ञानिक संकेत में 10 की घातों में व्यक्त किया जाता है । माप संकेतों तथा आंकिक अभिकलनों की सरलता हेतु संख्याओं की परिशुद्धता का संकेत करते हुए वैज्ञानिक संकेत एवं पूर्वलग्नों का प्रयोग किया जाता है ।
8. भौतिक राशियों के संकेतन और SI मात्रकों के प्रतीकों, कुछ अन्य मात्रकों, भौतिक राशियों और मापों को उचित रूप से व्यक्त करने हेतु पूर्वलग्न के लिए कुछ सामान्य नियमों और निर्देशों का पालन करना चाहिए ।
9. किसी भी भौतिक राशि के अभिकलन में उसके मात्रक की प्राप्ति हेतु संबंध (संबंधों) में सम्मिलित व्युत्पन्न राशियों के मात्रकों को वांछित मात्रकों की प्राप्ति तक बीजगणितीय राशियों की भांति समझना चाहिए ।
10. मापित एवं अभिकलित राशियों में केवल उचित सार्थक अंकों को ही रखा रहने देना चाहिए । किसी भी संख्या में सार्थक अंकों की संख्या का निर्धारण, उनके साथ अंकीय संक्रियाओं को करने और अनिश्चित अंकों का निकटन करने में इनके लिए बनाए गए नियमों का पालन करना चाहिए ।
11. मूल राशियों की विमाओं और इन विमाओं का संयोजन भौतिक राशियों की प्रकृति का वर्णन करता है । समीकरणों की विमीय संगति की जांच और भौतिक राशियों में संबंध व्युत्पन्न करने में विमीय विश्लेषण का प्रयोग किया जा सकता है। कोई विमीय संगत समीकरण वास्तव में सही हो, यह आवश्यक नहीं है परंतु विमीय रूप से गलत या असंगत समीकरण गलत ही होगी ।

अभ्यास

टिप्पणी : संख्यात्मक उत्तरों को लिखते समय, सार्थक अंकों का ध्यान रखिये।

1.1 रिक्त स्थान भरिए

(a) किसी 1 cm भुजा वाले घन का आयतन.....m^3 के बराबर है ।

(b) किसी 2 cm त्रिज्या व 10 cm ऊंचाई वाले सिलिंडर का पृष्ठ क्षेत्रफल.....$(mm)^2$ के बराबर है।

(c) कोई गाड़ी 18 km/h की चाल से चल रही है तो यह 1 s में.....m चलती है ।

(d) सीसे का आपेक्षिक घनत्व 11.3 है । इसका घनत्व.....g cm^{-3} या.....kg m^{-3} है ।

© NCERT not to be republished

1.2 रिक्त स्थानों को मात्रकों के उचित परिवर्तन द्वारा भरिए
(a) 1 kg m^2 s^{-2} =..... g cm^2 s^{-2}
(b) 1 m =..... ly
(c) 3.0 m s^{-2} =..... km h^{-2}
(d) G = 6.67 10^{-11} N m^2 $(kg)^{-2}$ =..... $(cm)^3$ s^{-2} g^{-1}

1.3 ऊष्मा (परागमन में ऊर्जा) का मात्रक कैलोरी है और यह लगभग 4.2 J के बराबर है, जहां 1 J = 1 kg m^2 s^{-2}। मान लीजिए कि हम मात्रकों की कोई ऐसी प्रणाली उपयोग करते हैं जिससे द्रव्यमान का मात्रक α kg के बराबर है, लंबाई का मात्रक β m के बराबर है, समय का मात्रक γ s के बराबर है । यह प्रदर्शित कीजिए कि नए मात्रकों के पदों में कैलोरी का परिमाण 4.2 $\alpha^{-1}\beta^{-2}\gamma^2$ है ।

1.4 इस कथन की स्पष्ट व्याख्या कीजिए : तुलना के मानक का विशेष उल्लेख किए बिना "किसी विमीय राशि को 'बड़ा' या 'छोटा' कहना अर्थहीन है" । इसे ध्यान में रखते हुए नीचे दिए गए कथनों को जहां कहीं भी आवश्यक हो, दूसरे शब्दों में व्यक्त कीजिए :
(a) परमाणु बहुत छोटे पिण्ड होते हैं ।
(b) जेट वायुयान अत्यधिक गति से चलता है ।
(c) बृहस्पति का द्रव्यमान बहुत ही अधिक है ।
(d) इस कमरे के अंदर वायु में अणुओं की संख्या बहुत अधिक है ।
(e) इलेक्ट्रॉन, प्रोटॉन से बहुत भारी होता है ।
(f) ध्वनि की गति प्रकाश की गति से बहुत ही कम होती है ।

1.5 लंबाई का कोई ऐसा नया मात्रक चुना गया है जिसके अनुसार निर्वात में प्रकाश की चाल 1 है। लम्बाई के नए मात्रक के पदों में सूर्य तथा पृथ्वी के बीच की दूरी कितनी है, प्रकाश इस दूरी को तय करने में8 min और 20 s लगाता है ।

1.6 लंबाई मापने के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा सबसे परिशुद्ध यंत्र है :
(a) एक वर्नियर केलिपर्स जिसके वर्नियर पैमाने पर 20 विभाजन हैं ।
(b) एक स्क्रूगेज जिसका चूड़ी अंतराल 1 mm और वृत्तीय पैमाने पर 100 विभाजन हैं ।
(c) कोई प्रकाशिक यंत्र जो प्रकाश की तरंगदैर्घ्य की सीमा के अंदर लंबाई माप सकता है ।

1.7 कोई छात्र 100 आवर्धन के एक सूक्ष्मदर्शी के द्वारा देखकर मनुष्य के बाल की मोटाई मापता है। वह 20 बार प्रेक्षण करता है और उसे ज्ञात होता है कि सूक्ष्मदर्शी के दृश्य क्षेत्र में बाल की औसत मोटाई 3.5 mm है । बाल की मोटाई का अनुमान क्या है?

1.8 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :
(a) आपको एक धागा और मीटर पैमाना दिया जाता है । आप धागे के व्यास का अनुमान किस प्रकार लगाएंगे ?
(b) एक स्क्रूगेज का चूड़ी अंतराल 1.0 mm है और उसके वृत्तीय पैमाने पर 200 विभाजन हैं । क्या आप यह सोचते हैं कि वृत्तीय पैमाने पर विभाजनों की संख्या स्वेच्छा से बढ़ा देने पर स्क्रूगेज की यथार्थता में वृद्धि करना संभव है ?
(c) वर्नियर केलिपर्स द्वारा पीतल की किसी पतली छड़ का माध्य व्यास मापा जाना है । केवल 5 मापनों के समुच्चय की तुलना में व्यास के 100 मापनों के समुच्चय के द्वारा अधिक विश्वसनीय अनुमान प्राप्त होने की संभावना क्यों है ?

1.9 किसी मकान का फोटोग्राफ 35 mm स्लाइड पर 1.75 cm^2 क्षेत्र घेरता है । स्लाइड को किसी स्क्रीन पर प्रक्षेपित किया जाता है और स्क्रीन पर मकान का क्षेत्रफल 1.55 m^2 है । प्रक्षेपित्र-परदा व्यवस्था का रेखीय आवर्धन क्या है ?

1.10 निम्नलिखित में सार्थक अंकों की संख्या लिखिए :
(a) 0.007 m^2 (b) 2.64 10^{24} kg (c) 0.2370 g cm^{-3}
(d) 6.320 J (e) 6.032 N m^{-2} (f) 0.0006032 m^2

1.11 धातु की किसी आयताकार शीट की लंबाई, चौड़ाई व मोटाई क्रमशः 4.234 m, 1.005 m व 2.01 cm है । उचित सार्थक अंकों तक इस शीट का क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात कीजिए ।

1.12 पंसारी की तुला द्वारा मापे गए डिब्बे का द्रव्यमान 2.30 kg है । सोने के दो टुकड़े जिनका द्रव्यमान 20.15 g व 20.17 g है, डिब्बे में रखे जाते हैं । (a) डिब्बे का कुल द्रव्यमान कितना है, (b) उचित सार्थक अंकों तक टुकड़ों के द्रव्यमानों में कितना अंतर है ?

© NCERT not to be republished

1.13 भौतिकी का एक प्रसिद्ध संबंध किसी कण के 'चल द्रव्यमान (moving mass)' m, 'विराम द्रव्यमान (rest mass)' m_0, इसकी चाल v, और प्रकाश की चाल c के बीच है । (यह संबंध सबसे पहले अल्बर्ट आइंस्टाइन के विशेष आपेक्षिकता के सिद्धांत के परिणामस्वरूप उत्पन्न हुआ था ।) कोई छात्र इस संबंध को लगभग सही याद करता है लेकिन स्थिरांक c को लगाना भूल जाता है । वह लिखता है : $m = \frac{m_0}{(1 - v^2)^{1/2}}$ । अनुमान लगाइए कि c कहां लगेगा ।

1.14 परमाण्विक पैमाने पर लंबाई का सुविधाजनक मात्रक एंगस्ट्रम है और इसे Å : $1\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है । हाइड्रोजन के परमाणु का आमाप लगभग 0.5Å है । हाइड्रोजन परमाणुओं के एक मोल का m^3 में कुल आण्विक आयतन कितना होगा?

1.15 किसी आदर्श गैस का एक मोल (ग्राम अणुक) मानक ताप व दाब पर 22.4 L आयतन (ग्राम अणुक आयतन) घेरता है । हाइड्रोजन के ग्राम अणुक आयतन तथा उसके एक मोल के परमाण्विक आयतन का अनुपात क्या है? (हाइड्रोजन के अणु की आमाप लगभग 1Å मानिए) । यह अनुपात इतना अधिक क्यों है?

1.16 इस सामान्य प्रेक्षण की स्पष्ट व्याख्या कीजिए : यदि आप तीव्र गति से गतिमान किसी रेलगाड़ी की खिड़की से बाहर देखें तो समीप के पेड़, मकान आदि रेलगाड़ी की गति की विपरीत दिशा में तेजी से गति करते प्रतीत होते हैं, परन्तु दूरस्थ पिण्ड (पहाड़ियां, चंद्रमा, तारे आदि) स्थिर प्रतीत होते हैं । (वास्तव में, क्योंकि आपको ज्ञात है कि आप चल रहे हैं, इसलिए, ये दूरस्थ वस्तुएं आपको अपने साथ चलती हुई प्रतीत होती हैं)।

1.17 सूर्य एक ऊष्म प्लैज़्मा (आयनीकृत पदार्थ) है जिसके आंतरिक क्रोड का ताप 10^7 K से अधिक और बाह्य पृष्ठ का ताप लगभग 6000 K है । इतने अधिक ताप पर कोई भी पदार्थ ठोस या तरल प्रावस्था में नहीं रह सकता। आपको सूर्य का द्रव्यमान घनत्व किस परिसर में होने की आशा है ? क्या यह ठोसों, तरलों या गैसों के घनत्वों के परिसर में है ? क्या आपका अनुमान सही है, इसकी जांच आप निम्नलिखित आंकड़ों के आधार पर कर सकते हैं : सूर्य का द्रव्यमान = 2.0×10^{30} kg; सूर्य की त्रिज्या = 7.0×10^8 m ।

© NCERT not to be republished

अध्याय 2

सरल रेखा में गति

2.1 भूमिका
2.2 तात्क्षणिक वेग एवं चाल
2.3 त्वरण
2.4 एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु का शुद्धगतिकी संबंधी समीकरण

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

2.1 भूमिका

विश्व की प्रत्येक वस्तु प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से गतिमान रहती है । हमारा चलना, दौड़ना, साइकिल सवारी आदि दैनिक जीवन में दिखाई देने वाली क्रियाएँ गति के कुछ उदाहरण हैं । इतना ही नहीं, निद्रावस्था में भी हमारे फेफड़ों में वायु का प्रवेश एवं निष्कासन तथा हमारी धमनियों एवं शिराओं में रुधिर का संचरण होता रहता है । हम पेड़ों से गिरते हुए पत्तों को तथा बाँध से बहते हुए पानी को देखते हैं । मोटरगाड़ी और वायुयान यात्रियों को एक स्थान से दूसरे स्थान को ले जाते हैं । पृथ्वी 24 घंटे में एक बार अपनी अक्ष के परितः घूर्णन करती है तथा वर्ष में एक बार सूर्य की परिक्रमा पूरी करती है । सूर्य अपने ग्रहों सहित हमारी आकाशगंगा नामक मंदाकिनी में विचरण करता है, तथा जो स्वयं भी स्थानीय मंदाकिनियों के समूह में गति करती है ।

इस प्रकार समय के सापेक्ष वस्तु की स्थिति में परिवर्तन को गति कहते हैं। समय के साथ स्थिति कैसे परिवर्तित होती है ? इस अध्याय में हम गति के बारे में पढ़ेंगे । इसके लिए हमें वेग तथा त्वरण की धारणा को समझना होगा । इस अध्याय में हम अपना अध्ययन वस्तु के एक सरल रेखा के अनुदिश गति तक ही सीमित रखेंगे । इस प्रकार की गति को **सरल रेखीय गति** भी कहते हैं । एकसमान त्वरित सरल रेखीय गति के लिए कुछ सरल समीकरण प्राप्त किए जा सकते हैं। अंततः गति की आपेक्षिक प्रकृति को समझने के लिए हम आपेक्षिक गति की धारणा प्रस्तुत करेंगे ।

इस अध्ययन में हम सभी गतिमान वस्तुओं को अतिसूक्ष्म मानकर बिंदु रूप में निरूपित करेंगे । यह सन्निकटन तब तक मान्य होता है जब तक वस्तु का आकार निश्चित समय अंतराल में वस्तु द्वारा चली गई दूरी की अपेक्षा पर्याप्त रूप से कम होता है । वास्तविक जीवन में बहुत-सी स्थितियों में वस्तुओं के आमाप (साइज़) की उपेक्षा की जा सकती है और बिना अधिक त्रुटि के उन्हें एक बिंदु-वस्तु माना जा सकता है ।

शुद्धगतिकी में, हम वस्तु की गति के कारणों पर ध्यान न देकर केवल उसकी गति का ही अध्ययन करते हैं । इस अध्याय एवं अगले अध्याय में विभिन्न प्रकार की गतियों का वर्णन किया गया है । इन गतियों के कारणों का अध्ययन हम पाँचवें अध्याय में करेंगे ।

© NCERT not to be republished

2.2 तात्क्षणिक वेग एवं चाल

जैसा कि हम पढ़ चुके हैं कि औसत वेग से हमें यह ज्ञात होता है कि कोई वस्तु किसी दिए गए समय अंतराल में किस गति से चल रही है, किन्तु इससे यह पता नहीं चल पाता कि इस समय अंतराल के भिन्न-भिन्न क्षणों पर वह किस गति से चल रही है। अतः किसी क्षण t पर वेग के लिए हम **तात्क्षणिक वेग** या केवल वेग v को परिभाषित करते हैं ।

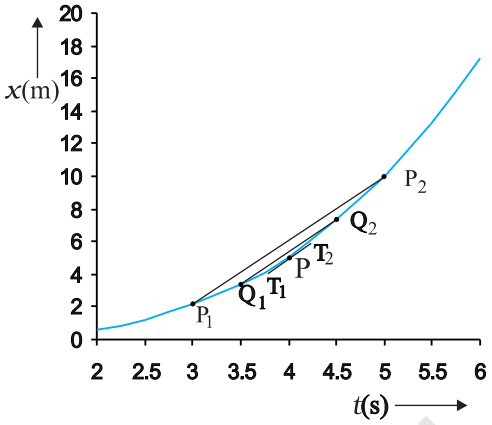
गतिमान वस्तु का तात्क्षणिक वेग उसके औसत वेग के बराबर होगा यदि उसके दो समयों (t तथा $t+\Delta t$) के बीच का अंतराल (Δt) अनन्तः सूक्ष्म हो । गणितीय विधि से हम इस कथन को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं-

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.1a)$$

$$= \frac{dx}{dt} \qquad (2.1b)$$

यहाँ प्रतीक $\lim_{\Delta t \to 0}$ का तात्पर्य उसके दायीं ओर स्थित राशि (जैसे $\frac{\Delta x}{\Delta t}$) का वह मान है जो Δt के मान को शून्य की ओर ($\Delta t \to 0$) प्रवृत्त करने पर प्राप्त होगा । कलन गणित की भाषा में समीकरण में दायीं ओर की राशि $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ x का t के सापेक्ष अवकलन गुणांक है। यह गुणांक उस क्षण पर वस्तु की स्थिति परिवर्तन की दर होती है ।

किसी क्षण पर वस्तु का वेग निकालने के लिए हम समीकरण (2.1a) का उपयोग कर सकते हैं । इसके लिए **ग्राफिक** या **गणितीय विधि** को प्रयोग में लाते हैं । मान लीजिए कि हम गतिमान कार का वेग $t = 4$ s (बिंदु P) पर निकालना चाहते हैं । पहले हम $t = 4$ s को केंद्र में रखकर Δt को 2 s लें । औसत वेग की परिभाषा के अनुसार सरल रेखा P_1P_2 (चित्र 2.1) की प्रवणता 3 s से 5 s के अंतराल में वस्तु के औसत वेग को



चित्र 2.1 स्थिति-समय ग्राफ से वेग ज्ञात करना । $t = 4$ s पर वेग उस क्षण पर ग्राफ की स्पर्श रेखा की प्रवणता है ।

व्यक्त करेगी । अब हम Δt का मान 2 s से घटाकर 1 s कर देते हैं तो P_1P_2 रेखा Q_1Q_2 हो जाती है और इसकी प्रवणता 3.5 s से 4.5 s अंतराल में औसत वेग का मान देगी । अंततः सीमांत मान $\Delta t \to 0$ की परिस्थिति में रेखा P_1P_2 स्थिति-समय वक्र के बिंदु P पर स्पर्श रेखा हो जाती है । इस प्रकार $t = 4$ s क्षण पर कार का वेग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होगा । **यद्यपि ग्राफिक विधि से इसे प्रदर्शित करना कुछ कठिन है तथापि यदि इसके लिए हम गणितीय विधि का उपयोग करें तो सीमांत प्रक्रिया आसानी से समझी जा सकती है ।** चित्र 2.1 में खींचे गए ग्राफ के लिए $x = 0.8\ t^3$ है । सारणी 2.1 में $t = 4$ s को केंद्र में रखकर $\Delta t = 2.0$ s, 1.0 s, 0.5 s, 0.1 s तथा 0.01 s के लिए $\Delta x/\Delta t$ के मूल्यों को दर्शाया गया है । दूसरे और तीसरे कॉलम में $t_1 (= t - \Delta t/2)$ तथा $t_2 (= t - \Delta t/2)$ और चौथे एवं पाँचवें कॉलम में x के तदनुरूप मानों अर्थात $x(t_1) = 0.08\ t_1^3$ तथा $x(t_2) = 0.03\ t_2^3$ को दिखलाया गया है । छठे कॉलम में अंतर $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ को तथा अंतिम कॉलम में Δx व Δt के अनुपात को व्यक्त किया गया

सारणी 2.1 $t = 4$ s के लिए $\Delta x/\Delta t$ का सीमांत मान

Δt (s)	t_1 (s)	t_2 (s)	$x(t_1)$ (m)	$x(t_2)$ (m)	Δx (m)	$\Delta x/\Delta t$ (m s^{-1})
2.0	3.0	5.0	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.21875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

© NCERT not to be republished

है । यह अनुपात प्रथम कॉलम में अंकित Δt के भिन्न-भिन्न मानों के संगत औसत वेग का मान है ।

सारणी 2.1 से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे Δt का मान 2.0 s से घटाते-घटाते 0.01 s करते हैं तो औसत वेग अंततः सीमांत मान 3.84 ms^{-1} के बराबर हो जाता है जो t=4 s पर कार का वेग है अर्थात t=4 s पर dx/dt का मान । इस प्रकार गति के हर क्षण के लिए हम कार का वेग निकाल सकते हैं ।

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि वस्तु का तात्क्षणिक वेग निकालने के लिए ग्राफिक विधि सदैव सुविधाजनक नहीं होती है । इस विधि (ग्राफिक विधि) में हम गतिमान वस्तु के स्थिति-समय ग्राफ को सावधानीपूर्वक खींचते हैं तथा Δt को उत्तरोत्तर कम करते हुए वस्तु के औसत वेग ($\bar{v}$) की गणना करते जाते हैं । भिन्न-भिन्न क्षणों पर वस्तु का वेग निकालना तब बहुत आसान हो जाता है जब विभिन्न समयों पर हमारे पास वस्तु की स्थिति के पर्याप्त आँकड़े उपलब्ध हों अथवा वस्तु की स्थिति का समय के फलन के रूप में हमारे पास यथार्थ व्यंजक उपलब्ध हो । ऐसी स्थिति में उपलब्ध आँकड़ों का उपयोग करते हुए समय अंतराल Δt को क्रमशः सूक्ष्म करते हुए $\Delta x/\Delta t$ का मान निकालते जाएँगे और अंततः सारणी 2.1 में दर्शाई गई विधि के अनुसार $\Delta x/\Delta t$ का सीमांत मान प्राप्त कर लेंगे । अन्यथा किसी दिए गए व्यंजक के लिए अवकल गणित का प्रयोग करके गतिमान वस्तु के भिन्न-भिन्न क्षणों के लिए dx/dt की गणना कर लेंगे जैसा कि उदाहरण 2.1 में बताया गया है ।

▶ ***उदाहरण 2.1*** x-अक्ष के अनुदिश किसी गतिमान वस्तु की स्थिति निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है : $x=a+bt^2$ । यहाँ a = 8.5 m, b = 2.5 $m\,s^{-2}$ तथा समय t को सेकंड में व्यक्त किया गया है । t=0 s तथा t=2.0 s क्षणों पर वस्तु का वेग क्या होगा ? t=2.0 s तथा t=4.0 s के मध्य के समय अंतराल में वस्तु का औसत वेग क्या होगा ?

हल अवकल गणित की पद्धति के अनुसार वस्तु का वेग

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(a+bt^2)=2bt=5.0\,t\ m\,s^{-1}$$

t =0 s क्षण के लिए v = 0 m/s, तथा t =2.0 s समय पर, v=10 $m\,s^{-1}$

$$\text{औसत वेग} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{x(4.0)-x(2.0)}{4.0-2.0}$$

$$=\frac{(a+16b)-(a+4b)}{2.0}=6.0b$$

$$= 6.0\ 2.5 = 15\ m\,s^{-1}$$ ◀

ध्यान दीजिए कि एकसमान गति में हर समय (तात्क्षणिक) वेग का वही मान होता है जो औसत वेग का होता है।

तात्क्षणिक चाल या केवल *चाल* गतिमान वस्तु के वेग का परिमाण है । उदाहरण के तौर पर, वेग + 24.0 $m\,s^{-1}$ तथा –24.0 $m\,s^{-1}$ दोनों में प्रत्येक का परिमाण 24.0 $m\,s^{-1}$ होगा। यहाँ यह तथ्य ध्यान में रखना है कि जहाँ किसी सीमित समय अंतराल में वस्तु की औसत चाल उसके औसत वेग के परिमाण के या तो बराबर होती है या उससे अधिक होती है वहीं किसी क्षण पर वस्तु की तात्क्षणिक चाल उस क्षण पर उसके तात्क्षणिक वेग के परिमाण के बराबर होती है । ऐसा क्यों होता है ?

2.3 त्वरण

सामान्यतः वस्तु की गति की अवधि में उसके वेग में परिवर्तन होता रहता है । वेग में हो रहे इस परिवर्तन को कैसे व्यक्त करें । वेग में हो रहे इस परिवर्तन को **समय के सापेक्ष** व्यक्त करना चाहिए या **दूरी के सापेक्ष** ? यह समस्या गैलीलियो के समय भी थी । गैलीलियो ने पहले सोचा कि वेग में हो रहे परिवर्तन की इस दर को दूरी के सापेक्ष व्यक्त किया जा सकता है परंतु जब उन्होंने मुक्त रूप से गिरती हुई तथा नत समतल पर गतिमान वस्तुओं की गति का विधिवत् अध्ययन किया तो उन्होंने पाया कि समय के सापेक्ष वेग परिवर्तन की दर का मान मुक्त रूप से गिरती हुई वस्तुओं के लिए, स्थिर रहता है जबकि दूरी के सापेक्ष वस्तु का वेग परिवर्तन स्थिर नहीं रहता वरन जैसे-जैसे गिरती हुई वस्तु की दूरी बढ़ती जाती है वैसे-वैसे यह मान घटता जाता है। इस अध्ययन ने त्वरण की वर्तमान धारणा को जन्म दिया जिसके अनुसार त्वरण को हम समय के सापेक्ष वेग परिवर्तन के रूप में परिभाषित करते हैं ।

जब किसी वस्तु का वेग समय के सापेक्ष बदलता है तो हम कहते हैं कि उसमें त्वरण हो रहा है । वेग में परिवर्तन तथा तत्संबंधित समय अंतराल के अनुपात को हम औसत त्वरण कहते हैं । इसे $\bar{a}$ से प्रदर्शित करते हैं :

$$\bar{a}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

यहां t_1, t_2 क्षणों पर वस्तु का वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 है । यह एकांक समय में वेग में औसत परिवर्तन होता है । त्वरण का SI मात्रक $m\,s^{-2}$ है ।

वेग-समय (v-t) ग्राफ से हम वस्तु का औसत त्वरण निकाल सकते हैं । यह इस प्रकार के ग्राफ में उस सरल रेखा की प्रवणता के बराबर होता है जो बिंदु (v_2, t_2) को बिंदु (v_1, t_1) से जोड़ती है ।

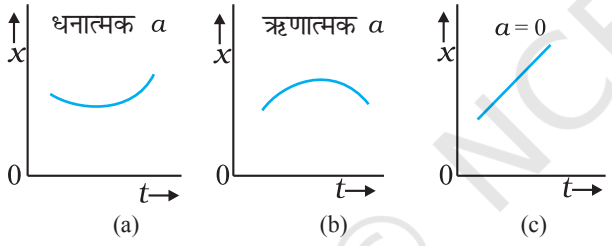
© NCERT not to be republished

तात्क्षणिक त्वरण : जिस प्रकार हमने पूर्व में तात्क्षणिक वेग की व्याख्या की है, उसी प्रकार हम तात्क्षणिक त्वरण को भी परिभाषित करते हैं । वस्तु के तात्क्षणिक त्वरण को a से चिह्नित करते हैं, अर्थात

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (2.3)$$

v–t ग्राफ में किसी क्षण वस्तु का त्वरण उस क्षण वक्र पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है ।

चूँकि वेग एक सदिश राशि है जिसमें दिशा एवं परिमाण दोनों होते हैं अतएव वेग परिवर्तन में इनमें से कोई एक अथवा दोनों निहित हो सकते हैं । अत: या तो चाल (परिमाण) में परिवर्तन, दिशा में परिवर्तन अथवा इन दोनों में परिवर्तन से त्वरण का उद्भव हो सकता है । वेग के समान ही त्वरण भी धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकता है । इसी प्रकार के त्वरण संबंधी स्थिति-समय ग्राफों को चित्रों 2.2 (a), 2.2 (b) तथा 2.2 (c) में दर्शाया गया है । चित्रों से स्पष्ट है कि धनात्मक त्वरण के लिए x–t ग्राफ ऊपर की ओर वक्रित है किन्तु ऋणात्मक त्वरण के लिए ग्राफ नीचे की ओर वक्रित है । शून्य त्वरण के लिए x–t ग्राफ एक सरल रेखा है ।



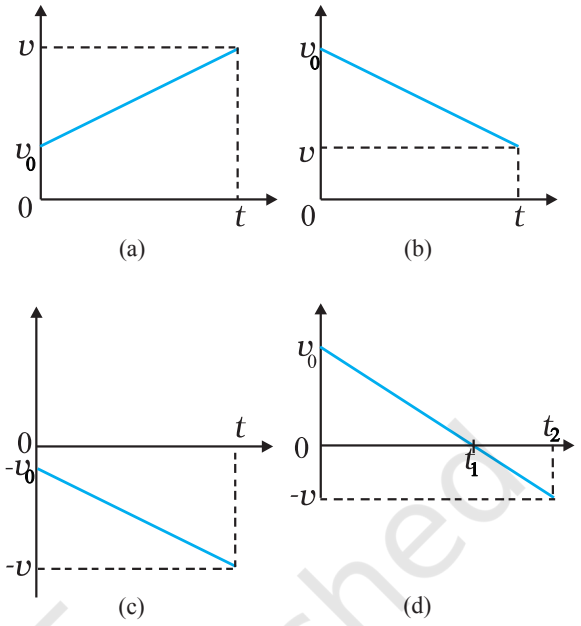
चित्र 2.2 ऐसी गति के लिए स्थिति-समय ग्राफ जिसके लिए (a) त्वरण धनात्मक है, (b) त्वरण ऋणात्मक है तथा (c) त्वरण शून्य है ।

यद्यपि गतिमान वस्तु का त्वरण समय के साथ-साथ बदल सकता है, परंतु सुविधा के लिए इस अध्याय में गति संबंधी हमारा अध्ययन मात्र स्थिर त्वरण तक ही सीमित रहेगा । ऐसी स्थिति में औसत त्वरण $\bar{a}$ का मान गति की अवधि में स्थिर त्वरण के मान के बराबर होगा ।

यदि क्षण t=0 पर वस्तु का वेग v_0 तथा t क्षण पर उसका वेग v हो, तो त्वरण $a = \bar{a} = \dfrac{v - v_0}{t - 0}$ होगा ।

अतएव, $v = v_0 + at$ (2.4)

अब हम यह देखेंगे कि कुछ सरल उदाहरणों में वेग-समय ग्राफ कैसा दिखलाई देता है । चित्र 2.3 में स्थिर त्वरण के लिए चार अलग-अलग स्थितियों में $v - t$ ग्राफ दिखाए गए हैं:



चित्र 2.3 स्थिर त्वरण के साथ गतिमान वस्तु का वेग-समय ग्राफ (a) धनात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति, (b) ऋणात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति, (c) ऋणात्मक त्वरण से ऋणात्मक दिशा में गति, (d) ऋणात्मक त्वरण के साथ वस्तु की गति जो समय t_1 पर दिशा बदलती है । 0 से t_1 समयावधि में यह धनात्मक x की दिशा में गति करती है जबकि t_1 व t_2 के मध्य वह विपरीत दिशा में गतिमान है ।

(*a*) कोई वस्तु धनात्मक दिशा में धनात्मक त्वरण से गतिमान है ।

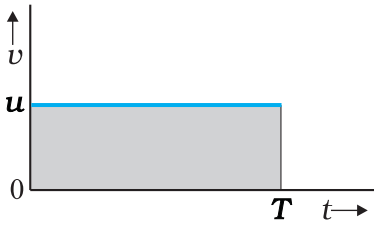
(*b*) कोई वस्तु धनात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण से गतिमान है ।

(*c*) कोई वस्तु ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण से गतिमान है ।

(*d*) कोई वस्तु पहले t_1 समय तक धनात्मक दिशा में चलती है और फिर ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण के साथ गतिमान है ।

किसी गतिमान वस्तु के वेग-समय ग्राफ का एक महत्त्वपूर्ण लक्षण है कि v–t ***ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु का विस्थापन व्यक्त करता है***। इस कथन की सामान्य उपपत्ति के लिए अवकल गणित की आवश्यकता पड़ती है तथापि सुगमता के लिए एक स्थिर वेग u से गतिमान वस्तु पर विचार करके इस कथन की सत्यता प्रमाणित कर सकते हैं । इसका वेग-समय ग्राफ चित्र 2.4 में दिखाया गया है ।

© NCERT not to be republished



चित्र 2.4 *v-t ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु द्वारा निश्चित समय अंतराल में विस्थापन व्यक्त करता है ।*

चित्र में v-t वक्र समय अक्ष के समांतर एक सरल रेखा है । t=0 से t=T के मध्य इस रेखा के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है जिसकी ऊँचाई u तथा आधार T है । अतएव क्षेत्रफल = $u \times T = uT$, जो इस समय में वस्तु के विस्थापन को व्यक्त करता है । कोई क्षेत्रफल दूरी के बराबर कैसे हो सकता है ? सोचिए ! दोनों निर्देशांक अक्षों के अनुदिश जो राशियाँ अंकित की गई हैं, यदि आप उनकी विमाओं पर ध्यान देंगे तो आपको इस प्रश्न का उत्तर मिल जाएगा।

ध्यान दीजिए कि इस अध्याय में अनेक स्थानों पर खींचे गए *x–t*, *v–t* तथा *a–t* ग्राफों में कुछ बिंदुओं पर तीक्ष्ण मोड़ हैं । इसका आशय यह है कि दिए गए फलनों का इन बिंदुओं पर अवकलन नहीं निकाला जा सकता । परंतु किसी वास्तविक परिस्थिति में सभी ग्राफ निष्कोण वक्र होंगे और उनके सभी बिंदुओं पर फलनों का अवकलन प्राप्त किया जा सकता है।

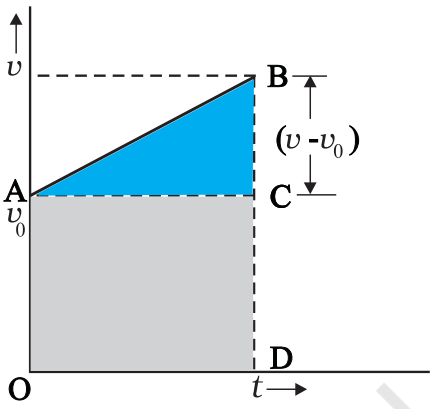
इसका अभिप्राय है कि वेग तथा त्वरण किसी क्षण सहसा नहीं बदल सकते। परिवर्तन सदैव सतत होता है।

2.4 एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु का शुद्धगतिकी संबंधी समीकरण

अब हम एकसमान त्वरण 'a' से गतिमान वस्तु के लिए कुछ गणितीय समीकरण व्युत्पन्न कर सकते हैं जो पाँचों राशियों को किसी प्रकार एक दूसरे से संबंधित करते हैं । ये राशियाँ हैं: विस्थापन (x), लिया गया समय (t), $t = 0$ समय पर वस्तु का प्रारंभिक वेग (v_0), समय t बीत जाने पर अंतिम वेग (v), तथा त्वरण (a) । हम पहले ही v_0 और v के मध्य एक समीकरण (2.4) प्राप्त कर चुके हैं जिसमें एकसमान त्वरण a तथा समय t निहित हैं । यह समीकरण है :

$$v = v_0 + at \qquad (2.4)$$

इस समीकरण को चित्र 2.5 में ग्राफ के रूप में निरूपित किया गया है ।



चित्र 2.5 *एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के लिए v-t वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ।*

इस वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल :

0 से t समय के बीच का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + आयत OACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(v - v_0)\, t + v_0 t$$

जैसे कि पहले स्पष्ट किया जा चुका है, v-t ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु का विस्थापन होता है। अत: वस्तु का विस्थापन x होगा:

$$x = \frac{1}{2}(v - v_0)\, t + v_0 t \qquad (2.5)$$

परंतु $v - v_0 = at$

अत: $x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$

अथवा $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad (2.6)$

समीकरण (2.5) को हम निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$x = \frac{v + v_0}{2} t$$

$$= \bar{v}.t \qquad (2.7a)$$

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \quad \textbf{(मात्र स्थिर त्वरण के लिए)} \qquad (2.7b)$$

समीकरण (2.7a) तथा (2.7b) का अभिप्राय है कि वस्तु का विस्थापन x माध्य वेग $\bar{v}$ से होता है जो प्रारंभिक एवं अंतिम वेगों के समांतर माध्य के बराबर होता है ।

समीकरण (2.4) से $t = (v - v_0)/a$ । यह मान समीकरण (2.7a) में रखने पर

© NCERT not to be republished

$$x = \bar{v}\, t = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (2.8)$$

यदि हम समीकरण (2.4) से t का मान समीकरण (2.6) में रख दें तो भी उपरोक्त समीकरण को प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार पांचों राशियों v_0, v, a, t तथा x के बीच संबंध स्थापित करनेवाले हमें तीन महत्त्वपूर्ण समीकरण प्राप्त हुए–

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (2.9a)$$

ये सभी एकसमान त्वरित सरल रेखीय गति के शुद्धगतिक समीकरण हैं ।

व्यंजक (2.9a) में जो समीकरण दिए गए हैं, उसकी व्युत्पत्ति के लिए हमने माना है कि क्षण $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति 0 है (अर्थात् $x = 0$) । परंतु यदि हम यह मान लें कि क्षण $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति शून्य न हो, वरन् अशून्य यानी x_0 हो तो समीकरण (2.9a) और व्यापक समीकरण में रूपांतरित हो जाएगी (यदि हम x के स्थान पर $x–x_0$ लिखें):

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (2.9b)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (2.9c)$$

▶ ***उदाहरण 2.2*** कलन-विधि का उपयोग कर एकसमान त्वरण के लिए शुद्धगतिक समीकरण प्राप्त कीजिए।

हल परिभाषा से

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\, dt$$

दोनों पक्षों के समाकलन से

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\ dt$$

$$= a \int_0^t dt \qquad (a \text{ अचर है})$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

पुनः

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v\, dt$$

दोनों पक्षों के समाकलन से

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\, dt$$

$$\int_0^t (v_0 + at)\, dt$$

$$x - x_0 = v_0\ t + \frac{1}{2} a\ t^2$$

$$x\ = x_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2$$

हम लिख सकते हैं :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

अथवा, $v\, dv = a\, dx$

दोनों पक्षों के समाकलन से

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{x_0}^{x} a\, dx$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2}\ = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

इस विधि का लाभ यह है कि इसका प्रयोग असमान त्वरण वाले गति के लिए भी कर सकते हैं।

अब हम उपरोक्त समीकरणों का उपयोग कुछ महत्त्वपूर्ण उदाहरणों में करेंगे ।

▶ ***उदाहरण 2.3*** किसी बहुमंजिले भवन की ऊपरी छत से कोई गेंद 20 m s^{-1} के वेग से ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में फेंकी गई है । जिस बिंदु से गेंद फेंकी गई है धरती से उसकी ऊँचाई 25.0 m है । (a) गेंद कितनी ऊपर जाएगी ?, तथा (b) गेंद धरती से टकराने के पहले कितना समय लेगी? g = 10 m s^{-2} ।

हल (a) y – अक्ष को चित्र 2.6 में दिखाए गए अनुसार ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर इस प्रकार चुनते हैं कि अक्ष का शून्य बिंदु धरती पर हो ।

अब, v_o = + 20 m s^{-1},

a = – g = –10 m s^{-2},

v = 0 m s^{-1}

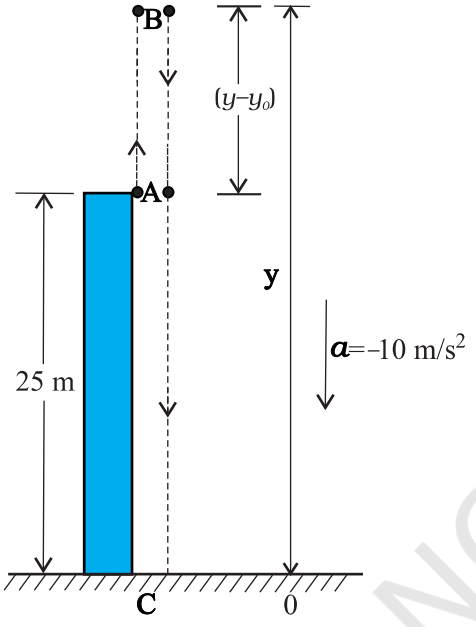
© NCERT not to be republished

यदि फेंके गए बिंदु से गेंद y ऊँचाई तक जाती है तो समीकरण $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$ से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलेगा–

$0 = (20)^2 + 2(-10)(y - y_0)$, हल करने पर,

$\therefore y - y_0 = 20$ m

(b) इस खण्ड का उत्तर हम दो प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं। **इन दोनों विधियों को ध्यानपूर्वक समझें ।**



चित्र 2.6

पहली विधि : इसमें, हम गेंद के मार्ग को दो भागों में विभाजित करते हैं : ऊपर की ओर गति (A से B) तथा नीचे की ओर गति (B से C) तथा संगत समय t_1 व t_2 निकाल लेते हैं। क्योंकि B पर वेग शून्य है, इसलिए :

$$v = v_0 + at$$
$$0 = 20 - 10\, t_1$$

या $t_1 = 2$ s

इस समय में गेंद बिंदु A से B पर पहुंचती है । B अर्थात अधिकतम ऊँचाई से गेंद गुरुत्वजनित त्वरण से मुक्त रूप से नीचे की ओर गिरती है । क्योंकि गेंद y की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश चलती है, इसलिए निम्नलिखित समीकरण का उपयोग करके हम t_2 का मान निकाल लेते हैं–

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

हमें $y_0 = 45$ m दिया है तथा $y = 0$, $v_0 = 0$, $a = -g = -10$ m s^{-2}

$\therefore 0 = 45 + (1/2)(-10)\, t_2^2$

अत: $t_2 = 3$ s

इसलिए धरती पर टकराने के पहले गेंद द्वारा लिया गया कुल समय $t_1 + t_2 = 2$ s + 3 s = 5 s होगा ।

दूसरी विधि : मूल बिंदु के सापेक्ष गेंद के प्रारंभिक तथा अंतिम स्थितियों के निर्देशांकों को निम्नलिखित समीकरण में उपयोग करके हम गेंद द्वारा लिए गए कुल समय की गणना कर सकते हैं :

$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$y = 0$ m, $y_0 = 25$ m, $v_0 = 20$ m s^{-1}, $a = -10$ m s^{-2}, $t = ?$

$$0 = 25 + 20\, t + (1/2)(-10) t^2$$

या $5t^2 - 20t - 25 = 0$

t के लिए यदि इस द्विघाती समीकरण को हल करें, तो

$t = 5$ s

ध्यान दीजिए कि दूसरी विधि पहली से श्रेष्ठ है क्योंकि इसमें हमें गति के पथ की चिंता नहीं करनी है क्योंकि वस्तु स्थिर त्वरण से गतिमान है । ◀

▶ ***उदाहरण 2.4*** **मुक्त पतन** : स्वतंत्रतापूर्वक नीचे की ओर गिरती हुई वस्तु की गति का वर्णन कीजिए । वायुजनित प्रतिरोध की उपेक्षा की जा सकती है ।

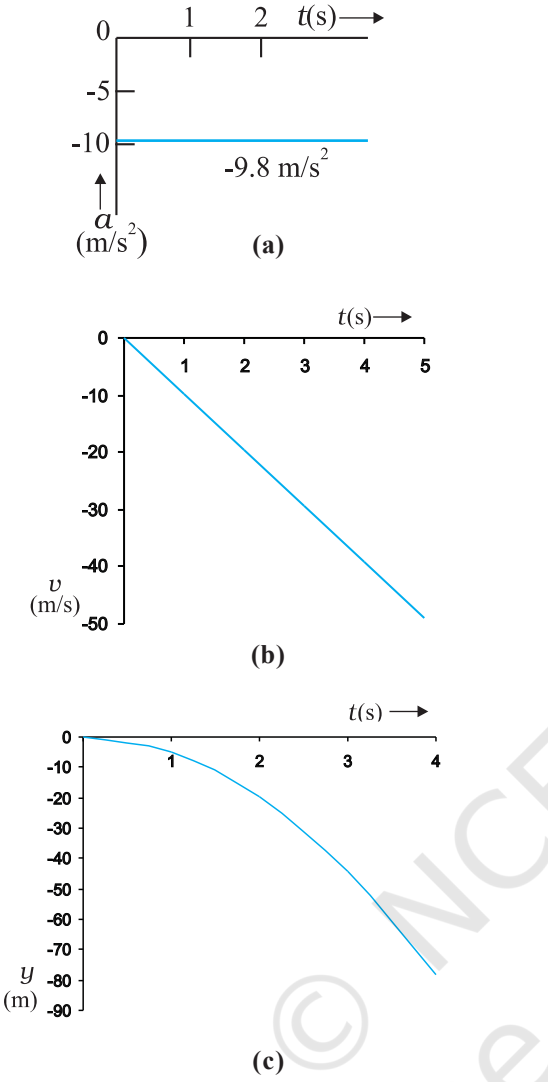
हल यदि धरती की सतह से थोड़ी ऊंचाई पर से कोई वस्तु छोड़ दी जाए तो वह पृथ्वी की ओर गुरुत्व बल के कारण त्वरित होगी। गुरुत्वजनित त्वरण को हम g से व्यक्त करते हैं । यदि वस्तु पर वायु के प्रतिरोध को हम नगण्य मानें तो हम कहेंगे कि वस्तु का पतन **मुक्त रूप** से हो रहा है । यदि गिरती हुई वस्तु द्वारा चली गई दूरी पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में बहुत कम है, तो हम g के मान को स्थिर अर्थात 9.8 m s^{-2} ले सकते हैं। इस प्रकार मुक्त पतन एकसमान त्वरण वाली गति का एक उदाहरण है ।

हम यह मानेंगे कि वस्तु की गति $-y$ दिशा में है, क्योंकि ऊपर की दिशा को हम धनात्मक मानते हैं । गुरुत्वीय त्वरण की दिशा सदैव नीचे की ओर होती है, इसलिए इसे हम ऋणात्मक दिशा में लेते हैं ।

अतएव, $a = -g = -9.8$ m s^{-2}

वस्तु को $y = 0$ स्थिति में विरामावस्था से गिराते हैं । इसलिए $v_0 = 0$ और वस्तु के लिए गति संबंधी (2.9a) में दिए गए

© NCERT not to be republished



चित्र 2.7 *मुक्त पतन में वस्तु की गति । (a) समय के अनुरूप वस्तु के त्वरण में परिवर्तन, (b) समय के अनुरूप वस्तु के वेग में परिवर्तन, (c) समय के अनुरूप वस्तु की स्थिति में परिवर्तन ।*

समीकरण निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किए जा सकते हैं-

$$v = 0 - g\,t = -9.8\,t \text{ m s}^{-1}$$

$$y = 0 - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 = -4.9\,t^2 \text{ m}$$

$$v^2 = 0 - 2\,g\,y = -19.6\,y \text{ m}^2\text{ s}^{-2}$$

ये समीकरण वस्तु के वेग, और उसके द्वारा चली गई दूरी को समय के फलन के रूप में तथा दूरी के सापेक्ष उसके वेग में परिवर्तन को व्यक्त करते हैं । समय के सापेक्ष त्वरण, वेग तथा दूरी के परिवर्तन को चित्र 2.7(a), (b) तथा (c) में दिखलाया गया है ।

उदाहरण 2.5 गैलीलियो का विषम अंक संबंधित नियम : इस नियम के अनुसार "विरामावस्था से गिरती हुई किसी वस्तु द्वारा समान समय अंतरालों में चली गई दूरियाँ एक दूसरे से उसी अनुपात में होती हैं जिस अनुपात में एक से प्रारंभ होने वाले विषम अंक [अर्थात 1 : 3 : 5 : 7,.....]"। इस कथन को सिद्ध कीजिए ।

हल हम विरामावस्था से गिरती हुई किसी वस्तु के समय अंतराल को बहुत-से समान समय अंतरालों τ में विभक्त कर लेते हैं तथा क्रमशः इन समय अंतरालों में वस्तु द्वारा चली गई दूरी निकालते जाते हैं । इस स्थिति में वस्तु का प्रारंभिक वेग शून्य है, अतः

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

इस समीकरण की सहायता से हम भिन्न-भिन्न समय अंतरालों $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots\ldots$ में वस्तु की स्थितियों की गणना कर सकते हैं जिन्हें सारणी 2.2 के दूसरे कॉलम में दिखाया है । यदि प्रथम समय अंतराल τ पर वस्तु का स्थिति निर्देशांक y_o लें ($y_o = (-1/2)g\tau^2$) तो आगे के समय अंतरालों के बाद वस्तु की स्थितियों को y_o के मात्रक में कॉलम तीन में दिए गए तरीके से व्यक्त कर सकते हैं । क्रमिक समय अंतरालों (प्रत्येक τ) में चली गई दूरियों को कॉलम चार में व्यक्त किया गया है । स्पष्ट है कि क्रमशः समय अंतरालों में वस्तु द्वारा चली गई दूरियाँ 1:3:5:7:9:11..... के सरल अनुपात में हैं जैसा कि अंतिम कॉलम में दिखाया गया है ।

इस नियम को सर्वप्रथम गैलीलियो गैलिली (1564-1642) ने प्रतिपादित किया था जिन्होंने मुक्त रूप से गिरती हुई वस्तु का पहली बार विधिवत परिमाणात्मक अध्ययन किया था ।

उदाहरण 2.6 वाहनों की अवरोधन दूरी : अवरोधन दूरी से हमारा अभिप्राय उस दूरी से है जो गतिमान वस्तु ब्रेक लगाने के कारण रुकने से पहले चल चुकी होती है । सड़क पर गतिमान वाहनों की सुरक्षा के संबंध में यह एक महत्त्वपूर्ण कारक है । यह दूरी वाहन के प्रारंभिक वेग (v_o) तथा उसके ब्रेक की क्षमता या ब्रेक लगाए जाने के परिणामस्वरूप वाहन में उत्पन्न मंदन $-a$ पर निर्भर करती है। किसी वाहन की अवरोधन दूरी के लिए v_o तथा a के पदों में व्यंजक निकालिए ।

© NCERT not to be republished

सारिणी 2.2

t	y	y का मान, y_0 के पदों में y_o [=(–1/2)g τ^2]	क्रमिक समय अंतरालों में चली गई दूरी	चली गई दूरियों का अनुपात
0	0	0		
τ	$-(1/2)g\tau^2$	y_o	y_o	1
2τ	$-4(1/2)g\tau^2$	$4y_o$	$3y_o$	3
3τ	$-9(1/2)g\tau^2$	$9y_o$	$5y_o$	5
4τ	$-16(1/2)g\tau^2$	$16y_o$	$7y_o$	7
5τ	$-25(1/2)g\tau^2$	$25y_o$	$9y_o$	9
6τ	$-36(1/2)g\tau^2$	$36y_o$	$11y_o$	11

हल मान लीजिए कि वाहन रुकने के पूर्व d_s दूरी चल चुका है । गति संबंधी समीकरण $v^2 = v_0^2 + 2ax$ में यदि अंतिम वेग $v = 0$ तो अवरोधन दूरी

$$d_s = \frac{-v_0^2}{2a}$$

होगी। अत: अवरोधन दूरी वाहन के प्रारंभिक वेग के वर्ग के समानुपाती होती है । यदि प्रारंभिक वेग को दूना कर दिया जाए तो उसी मंदन के लिए अवरोधन दूरी चार गुनी हो जाएगी।

कार के किसी विशिष्ट मॉडल के लिए विभिन्न वेगों 11, 15, 20 तथा 25 m s^{-1} के संगत अवरोधन दूरियाँ क्रमश: 10 m, 20 m, 34 m तथा 50 m पाई गई हैं जो उपरोक्त समीकरण से प्राप्त मानों के लगभग संगत हैं ।

कुछ क्षेत्रों, जैसे किसी विद्यालय के निकट वाहनों की चाल की सीमा के निर्धारण में अवरोधन दूरी का ज्ञान एक महत्त्वपूर्ण कारक होता है ।

▶ ***उदाहरण 2.7 प्रतिक्रिया काल*** : कभी-कभी हमारे सामने ऐसी परिस्थिति पैदा हो जाती है कि हमसे तत्क्षण कार्यवाही की अपेक्षा की जाती है किंतु अनुक्रिया व्यक्त करने में हमसे कुछ समय लग जाता है । प्रतिक्रिया काल किसी व्यक्ति को कोई घटनाक्रम देखने में, उसके विषय में सोचने में तथा कार्यवाही करने में लगने वाला समय है । उदाहरणस्वरूप, मान लीजिए कि कोई व्यक्ति सड़क पर कार चला रहा है और अचानक रास्ते में एक लड़का सामने आ जाता है तो कार में तेजी से ब्रेक लगाने के पहले व्यक्ति को जो समय लग जाता है, उसे प्रतिक्रिया काल कहेंगे । प्रतिक्रिया काल परिस्थिति की जटिलता एवं व्यक्ति विशेष पर निर्भर करता है ।

आप स्वयं का प्रतिक्रिया काल एक साधारण प्रयोग द्वारा माप सकते हैं । आप अपने मित्र को एक रूलर दें और उससे कहें कि वह आपके हाथ के अंगूठे और तर्जनी के बीच की खाली जगह से रूलर ऊर्ध्वाधर दिशा में गिरा दे (चित्र 2.8) । ज्योंही रूलर को छोड़ा जाए आप उसे पकड़ लें । इन दोनों घटनाओं (रूलर को छोड़ने तथा आपके द्वारा पकड़ने) के बीच लगे समय t_r तथा रूलर द्वारा चली गई दूरी d को नाप लें । किसी विशेष उदाहरण में $d = 21.0$ cm है तो प्रतिक्रिया काल की गणना कीजिए ।

हल रूलर मुक्त रूप से गिरता है, अत: $v_0 = 0$, $a = -g = -9.8$ ms^{-2} प्रतिक्रिया काल t_r तथा तय की गई दूरी (d) में संबंध है,

$$d = -\frac{1}{2} g t_r^2$$

या $$t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}}\ \text{s}$$



चित्र 2.8 प्रतिक्रिया काल का मापन ।

यदि $d = 21.0$ cm और $g = 9.8$ ms^{-2} है, तो

$$t_r = \sqrt{\frac{2\times 0.21}{9.8}}\ \text{s} \cong 0.2\ \text{s}$$

© NCERT not to be republished

सारांश

1. यदि किसी वस्तु की स्थिति समय के साथ बदलती है तो हम कहते हैं कि वस्तु *गतिमान* है। एक सरल रैखिक गति में वस्तु की स्थिति को सुगमता के दृष्टिकोण से चुने गए किसी मूल बिंदु के सापेक्ष निर्दिष्ट किया जा सकता है । मूल बिंदु के दायीं ओर की स्थितियों को धनात्मक तथा बायीं ओर की स्थितियों को ऋणात्मक कहा जाता है ।
2. किसी वस्तु द्वारा चली गई दूरी की लंबाई को *पथ-लंबाई* के रूप में परिभाषित करते हैं ।
3. वस्तु की स्थिति में परिवर्तन को हम *विस्थापन* कहते हैं और इसे Δx से निरूपित करते हैं;
   $\Delta x = x_2 - x_1$
   x_1 और x_2 वस्तु की क्रमशः प्रारंभिक तथा अंतिम स्थितियाँ हैं ।
   पथ-लंबाई उन्हीं दो बिंदुओं के बीच विस्थापन के परिणाम के बराबर या उससे अधिक हो सकती है ।
4. जब कोई वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरियाँ तय करती है तो ऐसी गति को *एकसमान गति* कहते हैं । यदि ऐसा नहीं है तो गति *असमान* होती है ।
5. विस्थापन की अवधि के समय अंतराल द्वारा विस्थापन को विभाजित करने पर जो राशि प्राप्त होती है, उसे *औसत वेग* कहते हैं तथा इसे $\bar{v}$ द्वारा चिह्नित करते हैं;
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
   $x - t$ ग्राफ में किसी दिए गए अंतराल की अवधि में औसत वेग उस सरल रेखा की प्रवणता है जो समय अंतराल की प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियों को जोड़ती है ।
6. वस्तु की यात्रा की अवधि में चली गई कुल पथ-लंबाई एवं इसमें लगे समय अंतराल अनुपात को *औसत चाल* कहते हैं । किसी वस्तु की औसत चाल किसी दिए गए समय अन्तराल में उसके औसत वेग के परिणाम के बराबर अथवा अधिक होती है ।
7. जब समय अतंराल Δt अत्यल्प हो तो वस्तु के औसत वेग के सीमान्त मान को *तात्क्षणिक वेग* या केवल *वेग* कहते हैं :
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$
   किसी क्षण वस्तु का वेग उस क्षण स्थान समय-ग्राफ की प्रवणता के बराबर होता है ।
8. वस्तु के वेग में परिवर्तन को संगत समय अंतराल से विभाजित करने पर जो राशि प्राप्त होती है, उसे *औसत त्वरण* कहते हैं :
$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
9. जब समय अंतराल अत्यल्प $\Delta t \to 0$ हो तो, वस्तु के औसत त्वरण के सीमान्त मान को *तात्क्षणिक त्वरण* या केवल *त्वरण* कहते हैं :
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$
   किसी क्षण वस्तु का त्वरण उस क्षण वेग-समय ग्राफ की प्रवणता के बराबर होता है । एकसमान गति के लिए त्वरण शून्य होता है तथा $x - t$ ग्राफ समय-अक्ष पर आनत एक सरल रेखा होती है । इसी प्रकार एकसमान गति के लिए $v - t$ ग्राफ समय-अक्ष के समांतर सरल रेखा होती है । एकसमान त्वरण के लिए $x - t$ ग्राफ परवलय होता है जबकि $v - t$ ग्राफ समय-अक्ष के आनत एक सरल रेखा होती है ।
10. किन्हीं दो क्षणों t_1 तथा t_2 के मध्य खींचे गए वेग-समय वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु के विस्थापन के बराबर होता है ।
11. एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के लिए कुछ सामान्य समीकरणों का एक समूह होता है जिससे पाँच राशियाँ यथा विस्थापन x, तत्संबंधित समय t, प्रारंभिक वेग v_0, अंतिम वेग v तथा त्वरण a एक दूसरे से संबंधित होते हैं । इन समीकरणों को वस्तु के शुद्धगतिक समीकरणों के नाम से जाना जाता है :
$$v = v_0 + at$$

© NCERT not to be republished

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

इन समीकरणों में क्षण $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति $x = 0$ ली गई है । यदि वस्तु $x = x_o$ से चलना प्रारंभ करे तो उपर्युक्त समीकरणों में x के स्थान पर $(x - x_o)$ लिखेंगे ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
पथ-लंबाई		[L]	m	
विस्थपन	Δx	[L]	m	$= x_2 - x_1$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है ।
वेग (a) औसत (b) तात्क्षणिक	 $\bar{v}$ v	$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है
चाल (a) औसत (b) तात्क्षणिक		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	$= \frac{\text{पथ - लंबाई}}{\text{समय अंतराल}}$ $= \frac{dx}{dt}$
त्वरण (a) औसत (b) तात्क्षणिक	 $\bar{a}$ a	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$= \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है

विचारणीय विषय

1. मूल बिंदु तथा किसी अक्ष की धनात्मक दिशा का चयन अपनी रुचि का विषय है । आपको सबसे पहले इस चयन का उल्लेख कर देना चाहिए और इसी के बाद राशियों; जैसे- विस्थापन, वेग तथा त्वरण के चिह्नों का निर्धारण करना चाहिए ।
2. यदि किसी वस्तु की चाल बढ़ती जा रही है तो त्वरण वेग की दिशा में होगा परंतु यदि चाल घटती जाती है तो त्वरण वेग की विपरीत दिशा में होगा । यह कथन मूल बिंदु तथा अक्ष के चुनाव पर निर्भर नहीं करता ।
3. त्वरण के चिह्न से हमें यह पता नहीं चलता कि वस्तु की चाल बढ़ रही है या घट रही है । त्वरण का चिह्न (जैसा कि उपरोक्त बिंदु 1 में बतलाया गया है) अक्ष के धनात्मक दिशा के चयन पर निर्भर करता है । उदाहरण के तौर पर यदि ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा को अक्ष की धनात्मक दिशा माना जाए तो गुरुत्वजनित त्वरण ऋणात्मक होगा । यदि कोई वस्तु गुरुत्व के कारण नीचे की ओर गिर रही है तो भी वस्तु की चाल बढ़ती जाएगी यद्यपि त्वरण का मान ऋणात्मक है। वस्तु ऊपर की दिशा में फेंकी जाए तो उसी ऋणात्मक (गुरुत्वजनित) त्वरण के कारण वस्तु की चाल में कमी आती जाएगी।

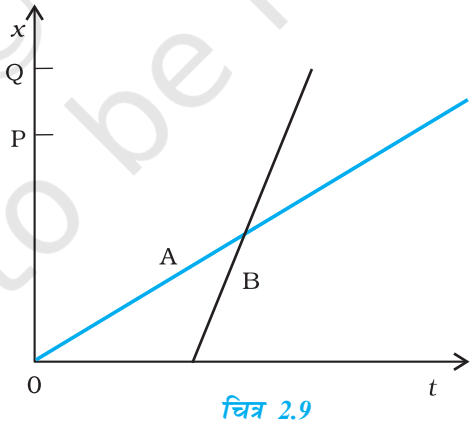
© NCERT not to be republished

4. यदि किसी क्षण वस्तु का वेग शून्य है तो यह आवश्यक नहीं है कि उस क्षण उसका त्वरण भी शून्य हो । कोई वस्तु क्षणिक रूप से विरामावस्था में हो सकती है तथापि उस क्षण उसका त्वरण शून्य नहीं होगा । उदाहरणस्वरूप, यदि किसी वस्तु को ऊपर की ओर फेंका जाए तो शीर्षस्थ बिंदु पर उसका वेग तो शून्य होगा परंतु इस अवसर पर उसका त्वरण गुरुत्वजनित त्वरण ही होगा ।
5. गति संबंधी शुद्धगतिक समीकरणों [समीकरण (2.9)] की विभिन्न राशियाँ बीजगणितीय हैं अर्थात वे धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती हैं । ये समीकरण सभी परिस्थितियों (स्थिर त्वरण वाली एकविमीय गति) के लिए उपयुक्त होते हैं बशर्ते समीकरणों में विभिन्न राशियों के मान उपयुक्त चिह्नों के साथ रखे जाएँ ।
6. तात्क्षणिक वेग तथा त्वरण की परिभाषाएँ [समीकरण (2.1) तथा समीकरण (2.3)] यथार्थ हैं और सदैव सही हैं जबकि शुद्धगतिक समीकरण [समीकरण (2.9)] उन्हीं गतियों के लिए सही है जिनमें गति की अवधि में त्वरण का परिमाण और दिशा स्थिर रहते हैं ।

अभ्यास

2.1 नीचे दिए गए गति के कौन से उदाहरणों में वस्तु को लगभग बिंदु वस्तु माना जा सकता है :
(a) दो स्टेशनों के बीच बिना किसी झटके के चल रही कोई रेलगाड़ी ।
(b) किसी वृत्तीय पथ पर साइकिल चला रहे किसी व्यक्ति के ऊपर बैठा कोई बंदर ।
(c) जमीन से टकरा कर तेजी से मुड़ने वाली क्रिकेट की कोई फिरकती गेंद ।
(d) किसी मेज के किनारे से फिसल कर गिरा कोई बीकर ।

2.2 दो बच्चे A व B अपने विद्यालय O से लौट कर अपने-अपने घर क्रमशः P तथा Q को जा रहे हैं । उनके स्थिति-समय (x - t) ग्राफ चित्र 2.9 में दिखाए गए हैं । नीचे लिखे कोष्ठकों में सही प्रविष्टियों को चुनिए :
(a) B/A की तुलना में A/B विद्यालय से निकट रहता है ।
(b) B/A की तुलना में A/B विद्यालय से पहले चलता है ।
(c) B/A की तुलना A/B तेज चलता है ।
(d) A और B घर (एक ही/भिन्न) समय पर पहुँचते हैं ।
(e) A/B सड़क पर B/A से (एक बार/दो बार) आगे हो जाते हैं ।



चित्र 2.9

2.3 एक महिला अपने घर से प्रातः 9.00 बजे 2.5 km दूर अपने कार्यालय के लिए सीधी सड़क पर 5 km h^{-1} चाल से चलती है । वहाँ वह सायं 5.00 बजे तक रहती है और 25 km h^{-1} की चाल से चल रही किसी ऑटो रिक्शा द्वारा अपने घर लौट आती है । उपयुक्त पैमाना चुनिए तथा उसकी गति का x - t ग्राफ खींचिए ।

2.4 कोई शराबी किसी तंग गली में 5 कदम आगे बढ़ता है और 3 कदम पीछे आता है, उसके बाद फिर 5 कदम आगे बढ़ता है और 3 कदम पीछे आता है, और इसी तरह वह चलता रहता है । उसका हर कदम 1m लंबा है और 1s समय लगता है। उसकी गति का x - t ग्राफ खींचिए । ग्राफ से तथा किसी अन्य विधि से यह ज्ञात कीजिए कि वह जहां से चलना प्रारंभ करता है वहाँ से 13 m दूर किसी गड्ढे में कितने समय पश्चात गिरता है ।

© NCERT not to be republished

2.5 कोई जेट वायुयान 500 km h^{-1} की चाल से चल रहा है और यह जेट यान के सापेक्ष 1500 km h^{-1} की चाल से अपने दहन उत्पादों को बाहर निकालता है । जमीन पर खड़े किसी प्रेक्षक के सापेक्ष इन दहन उत्पादों की चाल क्या होगी ?

2.6 सीधे राजमार्ग पर कोई कार 126 km h^{-1} की चाल से चल रही है । इसे 200 m की दूरी पर रोक दिया जाता है । कार के मंदन को एकसमान मानिए और इसका मान निकालिए । कार को रुकने में कितना समय लगा ?

2.7 कोई खिलाड़ी एक गेंद को ऊपर की ओर आरंभिक चाल 29 m s^{-1} से फेंकता है,

(i) गेंद की ऊपर की ओर गति के दौरान त्वरण की दिशा क्या होगी ?

(ii) इसकी गति के उच्चतम बिंदु पर गेंद के वेग व त्वरण क्या होंगे ?

(iii) गेंद के उच्चतम बिंदु पर स्थान व समय को $x = 0$ व $t = 0$ चुनिए, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर की दिशा को x-अक्ष की धनात्मक दिशा मानिए । गेंद की ऊपर की व नीचे की ओर गति के दौरान स्थिति, वेग व त्वरण के चिह्न बताइए ।

(iv) किस ऊँचाई तक गेंद ऊपर जाती है और कितनी देर के बाद गेंद खिलाड़ी के हाथों में आ जाती है ?

[$g = 9.8$ m s^{-2} तथा वायु का प्रतिरोध नगण्य है ।]

2.8 नीचे दिए गए कथनों को ध्यान से पढ़िए और कारण बताते हुए व उदाहरण देते हुए बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य, एकविमीय गति में किसी कण की

(a) किसी क्षण चाल शून्य होने पर भी उसका त्वरण अशून्य हो सकता है ।

(b) चाल शून्य होने पर भी उसका वेग अशून्य हो सकता है ।

(c) चाल स्थिर हो तो त्वरण अवश्य ही शून्य होना चाहिए ।

(d) चाल अवश्य ही बढ़ती रहेगी, यदि उसका त्वरण धनात्मक हो ।

2.9 किसी गेंद को 90 m की ऊँचाई से फर्श पर गिराया जाता है । फर्श के साथ प्रत्येक टक्कर में गेंद की चाल 1/10 कम हो जाती है । इसकी गति का $t = 0$ से 12 s के बीच चाल-समय ग्राफ खींचिए ।

2.10 उदाहरण सहित निम्नलिखित के बीच के अंतर को स्पष्ट कीजिए :

(a) किसी समय अंतराल में विस्थापन के परिमाण (जिसे कभी-कभी दूरी भी कहा जाता है) और किसी कण द्वारा उसी अंतराल के दौरान तय किए गए पथ की कुल लंबाई ।

(b) किसी समय अंतराल में औसत वेग के परिमाण और उसी अंतराल में औसत चाल (किसी समय अंतराल में किसी कण की औसत चाल को समय अंतराल द्वारा विभाजित की गई कुल पथ-लंबाई के रूप में परिभाषित किया जाता है) । प्रदर्शित कीजिए कि (a) व (b) दोनों में ही दूसरी राशि पहली से अधिक या उसके बराबर है । समता का चिह्न कब सत्य होता है ? (सरलता के लिए केवल एकविमीय गति पर विचार कीजिए ।)

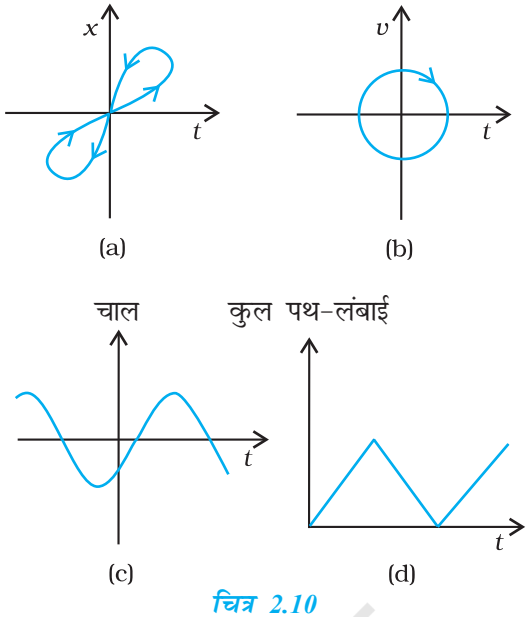
2.11 कोई व्यक्ति अपने घर से सीधी सड़क पर 5 km h^{-1} की चाल से 2.5 km दूर बाजार तक पैदल चलता है । परंतु बाजार बंद देखकर वह उसी क्षण वापस मुड़ जाता है तथा 7.5 km h^{-1} की चाल से घर लौट आता है ।

समय अंतराल (i) 0 - 30 मिनट, (ii) 0 - 50 मिनट, (iii) 0 - 40 मिनट की अवधि में उस व्यक्ति (a) के माध्य वेग का परिमाण, तथा (b) का माध्य चाल क्या है? (नोट : आप इस उदाहरण से समझ सकेंगे कि औसत चाल को औसत-वेग के परिमाण के रूप में परिभाषित करने की अपेक्षा समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लंबाई के रूप में परिभाषित करना अधिक अच्छा क्यों है । आप थक कर घर लौटे उस व्यक्ति को यह बताना नहीं चाहेंगे कि उसकी औसत चाल शून्य थी ।)

2.12 हमने अभ्यास 2.9 तथा 2.10 में औसत चाल व औसत वेग के परिमाण के बीच के अंतर को स्पष्ट किया है । यदि हम तात्क्षणिक चाल व वेग के परिमाण पर विचार करते हैं तो इस तरह का अंतर करना आवश्यक नहीं होता । तात्क्षणिक चाल हमेशा तात्क्षणिक वेग के बराबर होती है । क्यों ?

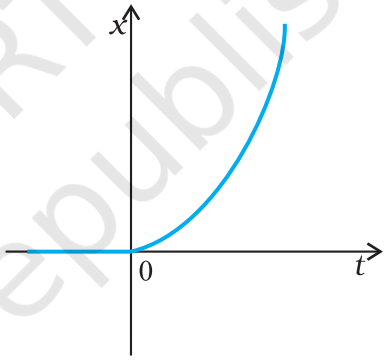
2.13 चित्र 2.10 में (a) से (d) तक के ग्राफों को ध्यान से देखिए और देखकर बताइए कि इनमें से कौन-सा ग्राफ एकविमीय गति को संभवत: नहीं दर्शा सकता ।

© NCERT not to be republished



चित्र 2.10

2.14 चित्र 2.11 में किसी कण की एकविमीय गति का x - t ग्राफ दिखाया गया है। ग्राफ से क्या यह कहना ठीक होगा कि यह कण $t < 0$ के लिए किसी सरल रेखा में और $t > 0$ के लिए किसी परवलीय पथ में गति करता है। यदि नहीं, तो ग्राफ के संगत किसी उचित भौतिक संदर्भ का सुझाव दीजिए ।

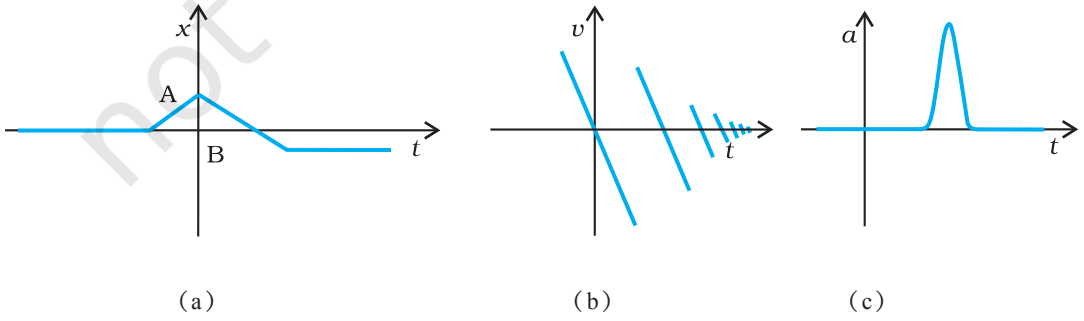


चित्र 2.11

2.15 किसी राजमार्ग पर पुलिस की कोई गाड़ी 30 km/h की चाल से चल रही है और यह उसी दिशा में 192 km/h की चाल से जा रही किसी चोर की कार पर गोली चलाती है। यदि गोली की नाल मुखी चाल 150 $m\,s^{-1}$ है तो चोर की कार को गोली किस चाल के साथ आघात करेगी ?

(नोट : उस चाल को ज्ञात कीजिए जो चोर की कार को हानि पहुँचाने में प्रासंगिक हो) ।

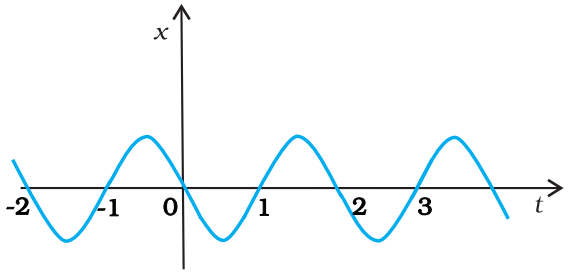
2.16 चित्र 2.12 में दिखाए गए प्रत्येक ग्राफ के लिए किसी उचित भौतिक स्थिति का सुझाव दीजिए :



चित्र 2.12

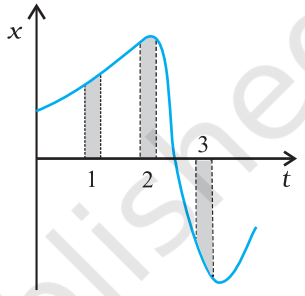
© NCERT not to be republished

2.17 चित्र 2.13 में किसी कण की एकविमीय सरल आवर्ती गति के लिए x - t ग्राफ दिखाया गया है । (इस गति के बारे में आप अध्याय 13 में पढ़ेंगे) समय $t = 0.3$ s, 1.2 s, –1.2 s पर कण के स्थिति, वेग व त्वरण के चिह्न क्या होंगे ?



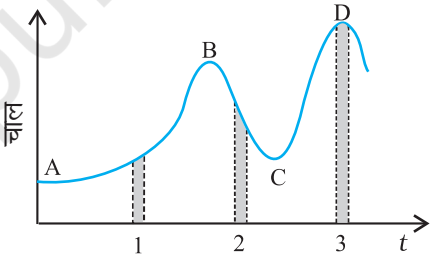
चित्र 2.13

2.18 चित्र 2.14 किसी कण की एकविमीय गति का x - t ग्राफ दर्शाता है । इसमें तीन समान अंतराल दिखाए गए हैं । किस अंतराल में औसत चाल अधिकतम है और किसमें न्यूनतम है ? प्रत्येक अंतराल के लिए औसत वेग का चिह्न बताइए ।



चित्र 2.14

2.19 चित्र 2.15 में किसी नियत (स्थिर) दिशा के अनुदिश चल रहे कण का चाल–समय ग्राफ दिखाया गया है । इसमें तीन समान समय अंतराल दिखाए गए हैं । किस अंतराल में औसत त्वरण का परिमाण अधिकतम होगा ? किस अंतराल में औसत चाल अधिकतम होगी ? धनात्मक दिशा को गति की स्थिर दिशा चुनते हुए तीनों अंतरालों में v तथा a के चिह्न बताइए । A, B, C, व D बिंदुओं पर त्वरण क्या होंगे ?



चित्र 2.15

© NCERT not to be republished

11088CH04

अध्याय 3

समतल में गति

3.1 भूमिका
3.2 अदिश एवं सदिश
3.3 सदिशों की वास्तविक संख्या से गुणा
3.4 सदिशों का संकलन व व्यवकलन – ग्राफी विधि
3.5 सदिशों का वियोजन
3.6 सदिशों का योग – विश्लेषणात्मक विधि
3.7 किसी समतल में गति
3.8 किसी समतल में एकसमान त्वरण से गति
3.9 प्रक्षेप्य गति
3.10 एकसमान वृत्तीय गति

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

3.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने स्थिति, विस्थापन, वेग एवं त्वरण की धारणाओं को विकसित किया था, जिनकी किसी वस्तु की सरल रेखीय गति का वर्णन करने के लिए आवश्यकता पड़ती है । क्योंकि एकविमीय गति में मात्र दो ही दिशाएँ संभव हैं, इसलिए इन राशियों के दिशात्मक पक्ष को + और – चिह्नों से व्यक्त कर सकते हैं । परंतु जब हम वस्तुओं की गति का द्विविमीय (एक समतल) या त्रिविमीय (दिक्स्थान) वर्णन करना चाहते हैं, तब हमें उपर्युक्त भौतिक राशियों का अध्ययन करने के लिए सदिशों की आवश्यकता पड़ती है । अतएव सर्वप्रथम हम सदिशों की भाषा (अर्थात सदिशों के गुणों एवं उन्हें उपयोग में लाने की विधियाँ) सीखेंगे । सदिश क्या है ? सदिशों को कैसे जोड़ा, घटाया या गुणा किया जाता है ? सदिशों को किसी वास्तविक संख्या से गुणा करें तो हमें क्या परिणाम मिलेगा ? यह सब हम इसलिए सीखेंगे जिससे किसी समतल में वस्तु के वेग एवं त्वरण को परिभाषित करने के लिए हम सदिशों का उपयोग कर सकें । इसके बाद हम किसी समतल में वस्तु की गति पर परिचर्चा करेंगे । किसी समतल में गति के सरल उदाहरण के रूप में हम एकसमान त्वरित गति का अध्ययन करेंगे तथा एक प्रक्षेप्य की गति के विषय में विस्तार से पढ़ेंगे । वृत्तीय गति से हम भलीभाँति परिचित हैं जिसका हमारे दैनिक जीवन में विशेष महत्त्व है । हम एकसमान वृत्तीय गति की कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे ।

हम इस अध्याय में जिन समीकरणों को प्राप्त करेंगे उन्हें आसानी से त्रिविमीय गति के लिए विस्तारित किया जा सकता है ।

3.2 अदिश एवं सदिश

हम भौतिक राशियों को अदिशों एवं सदिशों में वर्गीकृत करते हैं । दोनों में मूल अंतर यह है कि सदिश के साथ **दिशा** को संबद्ध करते हैं वहीं अदिश के साथ ऐसा नहीं करते । एक अदिश राशि वह राशि है जिसमें मात्र परिमाण होता है । इसे केवल एक संख्या एवं उचित मात्रक द्वारा पूर्ण रूप से व्यक्त किया जा सकता है । इसके उदाहरण हैं : दो बिंदुओं के बीच की दूरी, किसी वस्तु की संहति (द्रव्यमान), किसी वस्तु का तापक्रम, तथा वह समय जिस पर कोई घटना घटती है । अदिशों के जोड़ में वही नियम लागू होते हैं जो सामान्यतया बीजगणित में । अदिशों को हम ठीक वैसे ही जोड़ सकते हैं, घटा सकते हैं, गुणा या भाग कर सकते हैं जैसा कि हम सामान्य संख्याओं के साथ

© NCERT not to be republished

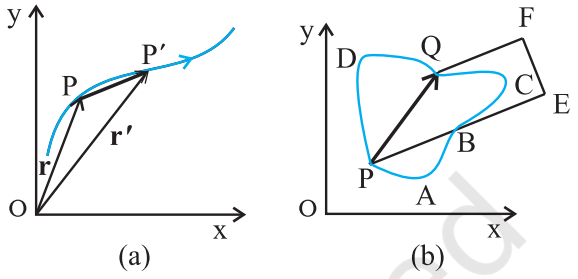
करते हैं* । उदाहरण के लिए, यदि किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 1.0 m तथा 0.5 m है तो उसकी परिमाप चारों भुजाओं के योग, 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m होगा। हर भुजा की लंबाई एक अदिश है तथा परिमाप भी एक अदिश है । हम एक दूसरे उदाहरण पर विचार करेंगे : यदि किसी एक दिन का अधिकतम एवं न्यूनतम ताप क्रमशः 35.6 °C तथा 24.2 °C है तो इन दोनों का अंतर 11.4 °C होगा । इसी प्रकार यदि एल्युमिनियम के किसी एकसमान ठोस घन की भुजा 10 cm है और उसका द्रव्यमान 2.7 kg है तो उसका आयतन 10^{-3} m^3 (एक अदिश) होगा तथा घनत्व 2.7×10^3 kg/m^3 भी एक अदिश है ।

एक **सदिश** राशि वह राशि है जिसमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं तथा वह **योग संबंधी त्रिभुज के नियम** अथवा **समानान्तर चतुर्भुज के योग संबंधी नियम** का पालन करती है । इस प्रकार, एक सदिश को उसके परिमाण की संख्या तथा दिशा द्वारा व्यक्त करते हैं । कुछ भौतिक राशियाँ जिन्हें सदिशों द्वारा व्यक्त करते हैं, वे हैं विस्थापन, वेग, त्वरण तथा बल ।

सदिश को व्यक्त करने के लिए इस पुस्तक में हम मोटे अक्षरों का प्रयोग करेंगे । जैसे कि वेग सदिश को व्यक्त करने के लिए **v** चिह्न का प्रयोग करेंगे । परंतु हाथ से लिखते समय क्योंकि मोटे अक्षरों का लिखना थोड़ा मुश्किल होता है, इसलिए एक सदिश को अक्षर के ऊपर तीर लगाकर व्यक्त करते हैं, जैसे $\vec{v}$ । इस प्रकार **v** तथा $\vec{v}$ दोनों ही वेग सदिश को व्यक्त करते हैं । किसी सदिश के परिमाण को प्रायः हम उसका 'परम मान' कहते हैं और उसे $|\mathbf{v}| = v$ द्वारा व्यक्त करते हैं । इस प्रकार एक सदिश को हम मोटे अक्षर यथा **A** या **a, p, q, r,** ..... **x, y** से व्यक्त करते हैं जबकि इनके परिमाणों को क्रमशः हम A या $a, p, q, r, ... x, y$ द्वारा व्यक्त करते हैं ।

3.2.1 स्थिति एवं विस्थापन सदिश

किसी समतल में गतिमान वस्तु की स्थिति व्यक्त करने के लिए हम सुविधानुसार किसी बिंदु O को मूल बिंदु के रूप में चुनते हैं । कल्पना कीजिए कि दो भिन्न-भिन्न समयों t और t' पर वस्तु की स्थिति क्रमशः P और P′ है (चित्र 3.1a) । हम P को O से एक सरल रेखा से जोड़ देते हैं । इस प्रकार **OP** समय t पर वस्तु की स्थिति सदिश होगी । इस रेखा के सिरे पर एक तीर का निशान लगा देते हैं । इसे किसी चिह्न (मान लीजिए) **r** से निरूपित करते हैं, अर्थात् **OP** = **r** । इसी प्रकार बिंदु P′ को एक दूसरे स्थिति सदिश **OP′** यानी **r′** से निरूपित करते हैं। सदिश **r** की लंबाई उसके परिमाण को निरूपित करती है तथा सदिश की दिशा वह होगी जिसके अनुदिश P (बिंदु O से देखने पर) स्थित होगा । यदि वस्तु P से चलकर P′ पर पहुंच जाती है तो सदिश **PP′** (जिसकी पुच्छ P पर तथा शीर्ष P′ पर है) बिंदु P (समय t) से P′ (समय t') तक गति के संगत **विस्थापन सदिश** कहलाता है ।



चित्र 3.1 (a) स्थिति तथा विस्थापन सदिश, (b) विस्थापन सदिश **PQ** *तथा गति के भिन्न-भिन्न मार्ग ।*

यहाँ यह बात महत्वपूर्ण है कि 'विस्थापन सदिश' को एक सरल रेखा से व्यक्त करते हैं जो वस्तु की अंतिम स्थिति को उसकी प्रारम्भिक स्थिति से जोड़ती है तथा यह उस वास्तविक पथ पर निर्भर नहीं करता जो वस्तु द्वारा बिंदुओं के मध्य चला जाता है । उदाहरणस्वरूप, जैसा कि चित्र 3.1b में दिखाया गया है, प्रारम्भिक स्थिति P तथा अंतिम स्थिति Q के मध्य विस्थापन सदिश **PQ** यद्यपि वही है परंतु दोनों स्थितियों के बीच चली गई दूरियां जैसे PABCQ, PDQ तथा PBEFQ अलग-अलग हैं । इसी प्रकार, ***किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य विस्थापन सदिश का परिमाण या तो गतिमान वस्तु की पथ-लंबाई से कम होता है या उसके बराबर होता है।*** पिछले अध्याय में भी एक सरल रेखा के अनुदिश गतिमान वस्तु के लिए इस तथ्य को भलीभांति समझाया गया था ।

3.2.2 सदिशों की समता

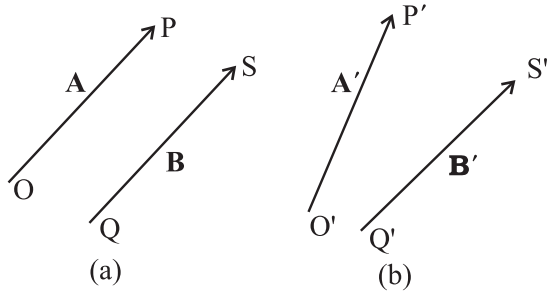
दो सदिशों **A** तथा **B** को केवल तभी बराबर कहा जा सकता है जब उनके परिमाण बराबर हों तथा उनकी दिशा समान हो** ।

चित्र 3.2(a) में दो समान सदिशों **A** तथा **B** को दर्शाया गया है । हम इनकी समानता की परख आसानी से कर सकते हैं । **B** को स्वयं के समांतर खिसकाइये ताकि उसकी पुच्छ Q सदिश **A** की पुच्छ O के संपाती हो जाए । फिर क्योंकि उनके शीर्ष S एवं P भी संपाती हैं अतः दोनों सदिश बराबर कहलाएंगे । सामान्यतया इस समानता को **A** = **B** के रूप में लिखते हैं । इस

* *केवल समान मात्रक वाली राशियों का जोड़ व घटाना सार्थक होता है । जबकि आप भिन्न मात्रकों वाले अदिशों का गुणा या भाग कर सकते हैं।*

** *हमारे अध्ययन में सदिशों की स्थितियां निर्धारित नहीं हैं । इसलिए जब एक सदिश को स्वयं के समांतर विस्थापित करते हैं तो सदिश अपरिवर्तित रहता है । इस प्रकार के सदिशों को हम 'मुक्त सदिश' कहते हैं । हालांकि कुछ भौतिक उपयोगों में सदिश की स्थिति या उसकी क्रिया रेखा महत्त्वपूर्ण होती है । ऐसे सदिशों को हम 'स्थानगत सदिश' कहते हैं।*

© NCERT not to be republished



चित्र 3.2 (a) दो समान सदिश **A** *तथा* **B**, *(b) दो सदिश* **A′** *व* **B′** *असमान हैं यद्यपि उनकी लंबाइयाँ वही हैं ।*

बात की ओर ध्यान दीजिए कि चित्र 3.2(b) में यद्यपि सदिशों **A′** तथा **B′** के परिमाण समान हैं फिर भी दोनों सदिश समान नहीं हैं क्योंकि उनकी दिशायें अलग-अलग हैं । यदि हम **B′** को उसके ही समांतर खिसकाएं जिससे उसकी पुच्छ Q′, **A′** की पुच्छ O′ से संपाती हो जाए तो भी **B′** का शीर्ष S′, **A′** के शीर्ष P′ का संपाती नहीं होगा ।

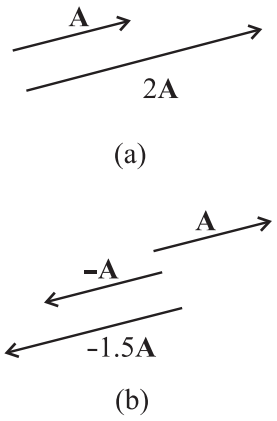
3.3 सदिशों की वास्तविक संख्या से गुणा

यदि एक सदिश **A** को किसी धनात्मक संख्या λ से गुणा करें तो हमें एक सदिश ही मिलता है जिसका परिमाण सदिश **A** के परिमाण का λ गुना हो जाता है तथा जिसकी दिशा वही है जो **A** की है । इस गुणनफल को हम λ**A** से लिखते हैं ।

$$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda |\mathbf{A}| \text{ यदि } \lambda > 0$$

उदाहरणस्वरूप, यदि **A** को 2 से गुणा किया जाए, तो परिणामी सदिश 2**A** होगा (चित्र 3.3a) जिसकी दिशा **A** की दिशा होगी तथा परिमाण $|\mathbf{A}|$ का दोगुना होगा । सदिश **A** को यदि एक ऋणात्मक संख्या $-\lambda$ से गुणा करें तो एक अन्य सदिश प्राप्त होता है जिसकी दिशा **A** की दिशा के विपरीत है और जिसका परिमाण $|\mathbf{A}|$ का λ गुना होता है ।

यदि किसी सदिश **A** को ऋणात्मक संख्याओं -1 व -1.5 से गुणा करें तो परिणामी सदिश चित्र 3.3(b) जैसे होंगे ।

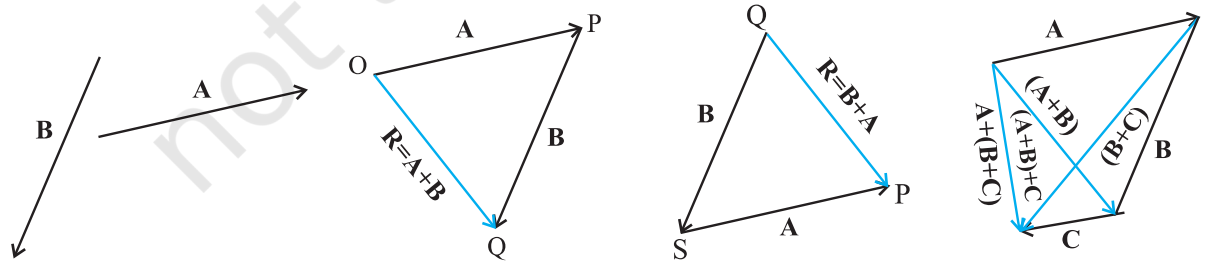


चित्र 3.3 (a) सदिश **A** *तथा उसे धनात्मक संख्या दो से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश, (b) सदिश* **A** *तथा उसे ऋणात्मक संख्याओं -1 तथा -1.5 से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश ।*

भौतिकी में जिस घटक λ द्वारा सदिश **A** को गुणा किया जाता है वह कोई अदिश हो सकता है जिसकी स्वयं की विमाएँ होती हैं । अतएव λ**A** की विमाएँ λ व **A** की विमाओं के गुणनफल के बराबर होंगी । उदाहरणस्वरूप, यदि हम किसी अचर वेग सदिश को किसी (समय) अंतराल से गुणा करें तो हमें एक विस्थापन सदिश प्राप्त होगा ।

3.4 सदिशों का संकलन व व्यवकलन : ग्राफी विधि

जैसा कि खण्ड 3.2 में बतलाया जा चुका है कि सदिश योग के त्रिभुज नियम या समान्तर चतुर्भुज के योग के नियम का पालन करते हैं । अब हम ग्राफी विधि द्वारा योग के इस नियम को समझाएंगे । हम चित्र 3.4 (a) में दर्शाए अनुसार किसी समतल में स्थित दो सदिशों **A** तथा **B** पर विचार करते हैं । इन सदिशों को व्यक्त करने वाली रेखा-खण्डों की लंबाइयाँ सदिशों के परिमाण के समानुपाती हैं । योग **A** + **B** प्राप्त करने के लिए चित्र 3.4(b) के अनुसार हम सदिश **B** इस प्रकार रखते हैं कि उसकी पुच्छ सदिश **A** के शीर्ष पर हो । फिर हम **A** की पुच्छ



चित्र 3.4 (a) सदिश **A** *तथा* **B**, *(b) सदिशों* **A** *व* **B** *का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (c) सदिशों* **B** *व* **A** *का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (d) सदिशों के जोड़ से संबंधित साहचर्य नियम का प्रदर्शन ।*

© NCERT not to be republished

को **B** के सिरे से जोड़ देते हैं । यह रेखा OQ परिणामी सदिश **R** को व्यक्त करती है जो सदिशों **A** तथा **B** का योग है। क्योंकि सदिशों के जोड़ने की इस विधि में सदिशों में से किसी एक के शीर्ष को दूसरे की पुच्छ से जोड़ते हैं, इसलिए इस ग्राफी विधि को **शीर्ष व पुच्छ विधि** के नाम से जाना जाता है । दोनों सदिश तथा उनका परिणामी सदिश किसी त्रिभुज की तीन भुजाएं बनाते हैं । इसलिए इस विधि को **सदिश योग के त्रिभुज नियम** भी कहते हैं । यदि हम **B+A** का परिणामी सदिश प्राप्त करें तो भी हमें वही सदिश **R** प्राप्त होता है (चित्र 3.4c)। इस प्रकार सदिशों का योग **'क्रम विनिमेय'** (सदिशों के जोड़ने में यदि उनका क्रम बदल दें तो भी परिणामी सदिश नहीं बदलता) है ।

$$\mathbf{A + B = B + A} \qquad (3.1)$$

सदिशों का योग *साहचर्य नियम* का भी पालन करता है जैसा कि चित्र 3.4 (d) में दर्शाया गया है । सदिशों **A** व **B** को पहले जोड़कर और फिर सदिश **C** को जोड़ने पर जो परिणाम प्राप्त होता है वह वही है जो सदिशों **B** और **C** को पहले जोड़कर फिर **A** को जोड़ने पर मिलता है, अर्थात्

$$\mathbf{(A + B) + C = A + (B + C)} \qquad (3.2)$$

दो समान और विपरीत सदिशों को जोड़ने पर क्या परिणाम मिलता है ? हम दो सदिशों **A** और **–A** जिन्हें चित्र 3.3(b) में दिखलाया है, पर विचार करते हैं । इनका योग **A** + (**–A**) है। क्योंकि दो सदिशों का परिमाण वही है किन्तु दिशा विपरीत है, इसलिए परिणामी सदिश का परिमाण **शून्य** होगा और इसे **0** से व्यक्त करते हैं।

$$\mathbf{A - A = 0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \qquad (3.3)$$

0 को हम **शून्य सदिश** कहते हैं । क्योंकि शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है, इसलिए इसकी दिशा का निर्धारण नहीं किया जा सकता है । दरअसल जब हम एक सदिश **A** को संख्या शून्य से गुणा करते हैं तो भी परिणामस्वरूप हमें एक सदिश ही मिलेगा किन्तु उसका परिमाण शून्य होगा । **O** सदिश के मुख्य गुण निम्न हैं:

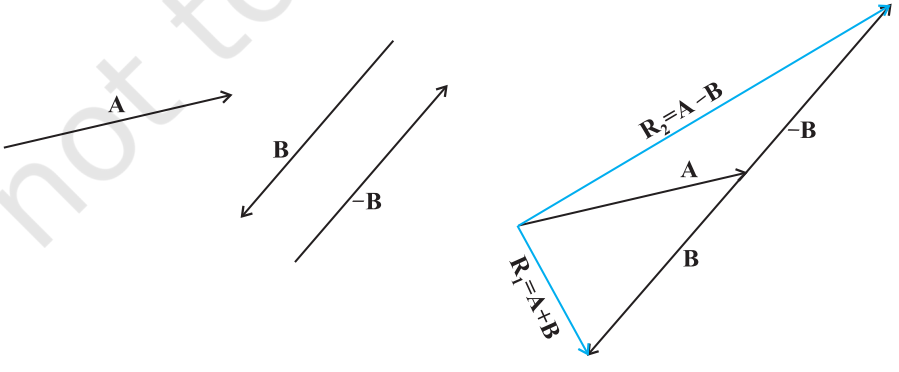
$$\mathbf{A + 0 = A}$$
$$\lambda\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\,\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (3.4)$$

शून्य सदिश का भौतिक अर्थ क्या है ? जैसाकि चित्र 3.1(a) में दिखाया गया है हम किसी समतल में स्थिति एवं विस्थापन सदिशों पर विचार करते हैं । मान लीजिए कि किसी क्षण t पर कोई वस्तु P पर है । वह P′ तक जाकर पुनः P पर वापस आ जाती है । इस स्थिति में वस्तु का विस्थापन क्या होगा ? चूंकि प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियां संपाती हो जाती हैं, इसलिए विस्थापन "शून्य सदिश" होगा ।

सदिशों का व्यवकलन सदिशों के योग के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है । दो सदिशों **A** व **B** के अंतर को हम दो सदिशों **A** व **–B** के योग के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

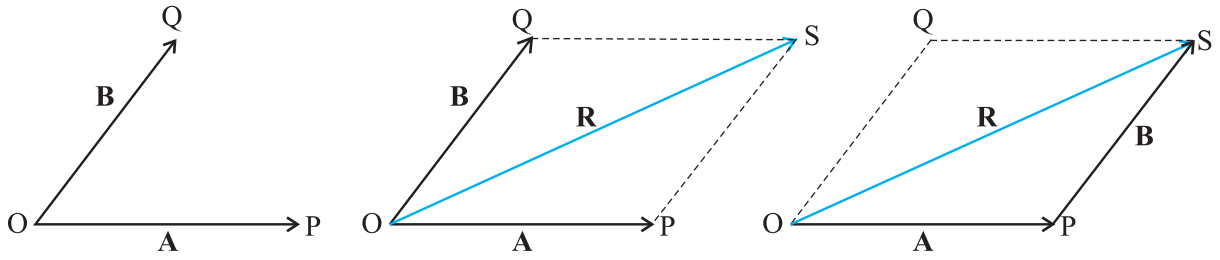
$$\mathbf{A - B = A + (-B)} \qquad (3.5)$$

इसे चित्र 3.5 में दर्शाया गया है । सदिश **–B** को सदिश **A** में जोड़कर $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{A - B})$ प्राप्त होता है । तुलना के लिए इसी चित्र में सदिश $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A + B}$ को भी दिखाया गया है । **समान्तर चतुर्भुज विधि** को प्रयुक्त करके भी हम दो सदिशों का योग ज्ञात कर सकते हैं । मान लीजिए हमारे पास दो सदिश **A** व **B** हैं। इन सदिशों को जोड़ने के लिए उनकी पुच्छ को एक उभयनिष्ठ मूल बिंदु O पर लाते हैं जैसा चित्र 3.6(a) में दिखाया गया है। फिर हम **A** के शीर्ष से **B** के समांतर एक रेखा खींचते हैं और **B** के शीर्ष से **A** के समांतर एक दूसरी रेखा खींचकर समांतर चतुर्भुज OQSP पूरा करते हैं । जिस बिंदु पर यह दोनों रेखाएं एक दूसरे को काटती हैं, उसे मूल बिंदु O से जोड़ देते हैं। परिणामी सदिश **R** की दिशा समान्तर चतुर्भुज के मूल बिंदु O से कटान बिंदु S की ओर खींचे गए विकर्ण OS के अनुदिश होगी [चित्र 3.6 (b)]। चित्र 3.6 (c) में सदिशों **A** व **B** का परिणामी निकालने के लिए त्रिभुज नियम का उपयोग दिखाया गया है । दोनों चित्रों से स्पष्ट है कि दोनों विधियों से एक ही परिणाम निकलता है । इस प्रकार दोनों विधियाँ समतुल्य हैं।



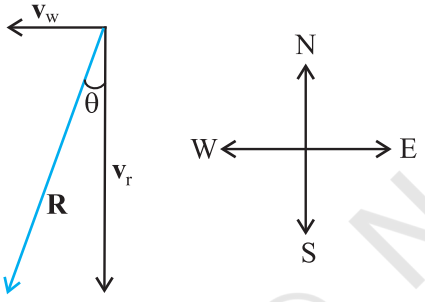
चित्र 3.5 *(a) दो सदिश* **A** *व* **B**, **–B** *को भी दिखाया गया है । (b) सदिश* **A** *से सदिश* **B** *का घटाना–परिणाम* $\mathbf{R}_2$ *है । तुलना के लिए सदिशों* **A** *व* **B** *का योग* $\mathbf{R}_1$ *भी दिखलाया गया है ।*

© NCERT not to be republished



चित्र 3.6 (a) एक ही उभयनिष्ठ बिंदु वाले दो सदिश **A** *व* **B** *पर, (b) समान्तर चतुर्भुज विधि द्वारा* **A**+**B** *योग प्राप्त करना, (c) दो सदिशों को जोड़ने की समान्तर चतुर्भुज विधि त्रिभुज विधि के समतुल्य है ।*

उदाहरण 3.1 किसी दिन वर्षा 35 m s^{-1} की चाल से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर हो रही है । कुछ देर बाद हवा 12 m s^{-1} की चाल से पूर्व से पश्चिम दिशा की ओर चलने लगती है । बस स्टाप पर खड़े किसी लड़के को अपना छाता किस दिशा में करना चाहिए ?



चित्र 3.7

हल : वर्षा एवं हवा के वेगों को सदिशों $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ से चित्र 3.7 में दर्शाया गया है। इनकी दिशाएं प्रश्न के अनुसार प्रदर्शित की गई हैं । सदिशों के योग के नियम के अनुसार $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ का परिणामी **R** चित्र में खींचा गया है । **R** का परिमाण होगा–

$$R = \sqrt{v_r^2 + v_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ \text{m s}^{-1} = 37\ \text{m s}^{-1}$$

ऊर्ध्वाधर से R की दिशा θ होगी–

$$\tan\theta = \frac{v_w}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

या $\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19$

अतएव लड़के को अपना छाता ऊर्ध्वाधर तल में ऊर्ध्वाधर से 19 का कोण बनाते हुए पूर्व दिशा की ओर रखना चाहिए । ◀

3.5 सदिशों का वियोजन

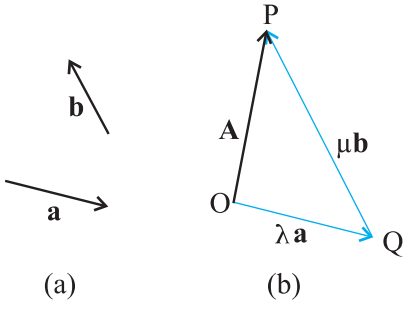
मान लीजिए कि **a** व **b** किसी समतल में भिन्न दिशाओं वाले दो शून्येतर (शून्य नहीं) सदिश हैं तथा **A** इसी समतल में कोई अन्य सदिश है । (चित्र 3.8) तब **A** को दो सदिशों के योग के रूप में वियोजित किया जा सकता है । एक सदिश **a** के किसी वास्तविक संख्या के गुणनफल के रूप में और इसी प्रकार दूसरा सदिश **b** के गुणनफल के रूप में है । ऐसा करने के लिए पहले **A** खींचिए जिसका पुच्छ O तथा शीर्ष P है । फिर O से **a** के समांतर एक सरल रेखा खींचिए तथा P से एक सरल रेखा **b** के समांतर खींचिए । मान लीजिए वे एक दूसरे को Q पर काटती हैं । तब,

$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \qquad (3.6)$$

परंतु क्योंकि **OQ, a** के समांतर है तथा **Q P, b** के समांतर है इसलिए

$$\mathbf{OQ} = \lambda\,\mathbf{a} \quad \text{तथा} \quad \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \qquad (3.7)$$

जहां λ तथा μ कोई वास्तविक संख्याएँ हैं ।



चित्र 3.8 (a) दो अरैखिक सदिश **a** *व* **b**, *(b) सदिश* **A** *का* **a** *व* **b** *के पदों में वियोजन ।*

अत: $\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$ (3.8)

हम कह सकते हैं कि **A** को **a** व **b** के अनुदिश दो

© NCERT not to be republished

सदिश-घटकों क्रमशः $\lambda\mathbf{a}$ तथा $\mu\mathbf{b}$ में वियोजित कर दिया गया है । इस विधि का उपयोग करके हम किसी सदिश को उसी समतल के दो सदिश-घटकों में वियोजित कर सकते हैं । एकांक परिमाण के सदिशों की सहायता से समकोणिक निर्देशांक निकाय के अनुदिश किसी सदिश का वियोजन सुविधाजनक होता है । ऐसे सदिशों को *एकांक सदिश* कहते हैं जिस पर अब हम परिचर्चा करेंगे ।

एकांक सदिश : एकांक सदिश वह सदिश होता है जिसका परिमाण एक हो तथा जो किसी विशेष दिशा के अनुदिश हो । न तो इसकी कोई विमा होती है और न ही कोई मात्रक । मात्र दिशा व्यक्त करने के लिए इसका उपयोग होता है । चित्र 3.9a में प्रदर्शित एक 'आयतीय निर्देशांक निकाय' की x, y तथा z अक्षों के अनुदिश एकांक सदिशों को हम क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा व्यक्त करते हैं । क्योंकि ये सभी एकांक सदिश हैं, इसलिए

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (3.9)$$

ये एकांक सदिश एक दूसरे के लंबवत् हैं । दूसरे सदिशों से इनकी अलग पहचान के लिए हमने इस पुस्तक में मोटे टाइप **i, j, k** के ऊपर एक कैप (^) लगा दिया है । क्योंकि इस अध्याय में हम केवल द्विविमीय गति का ही अध्ययन कर रहे हैं अतः हमें केवल दो एकांक सदिशों की आवश्यकता होगी ।

यदि किसी एकांक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ को एक अदिश λ से गुणा करें तो परिणामी एक सदिश $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ होगा । सामान्यतया किसी सदिश **A** को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{n}} \qquad (3.10)$$

यहाँ **A** के अनुदिश $\hat{\mathbf{n}}$ एकांक सदिश है ।

हम किसी सदिश **A** को एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में वियोजित कर सकते हैं । मान लीजिए कि चित्र (3.9b) के अनुसार सदिश **A** समतल x-y में स्थित है । चित्र 3.9(b) के अनुसार **A** के शीर्ष से हम निर्देशांक अक्षों पर लंब खींचते हैं । इससे हमें दो सदिश $\mathbf{A}_1$ व $\mathbf{A}_2$ इस प्रकार प्राप्त हैं कि $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$ । क्योंकि $\mathbf{A}_1$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ के समान्तर है तथा $\mathbf{A}_2$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{j}}$ के समान्तर है, अतः

$$\mathbf{A}_1 = A_x\,\hat{\mathbf{i}}\,,\ \mathbf{A}_2 = A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.11)$$

यहाँ A_x तथा A_y वास्तविक संख्याएँ हैं ।

इस प्रकार $\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ (3.12)

इसे चित्र (3.9c) में दर्शाया गया है । राशियों A_x व A_y को हम सदिश **A** के x- व y- घटक कहते हैं । यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि A_x सदिश नहीं है, वरन् $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ एक सदिश है । इसी प्रकार $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ एक सदिश है ।

त्रिकोणमिति का उपयोग करके A_x व A_y को **A** के परिमाण तथा उसके द्वारा x-अक्ष के साथ बनने वाले कोण θ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं :

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta \qquad (3.13)$$

समीकरण (3.13) से स्पष्ट है कि किसी सदिश का घटक कोण θ पर निर्भर करता है तथा वह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है ।

किसी समतल में एक सदिश **A** को व्यक्त करने के लिए अब हमारे पास दो विधियाँ हैं :

(i) उसके परिमाण A तथा उसके द्वारा x-अक्ष के साथ बनाए गए कोण θ द्वारा, अथवा

(ii) उसके घटकों A_x तथा A_y द्वारा ।

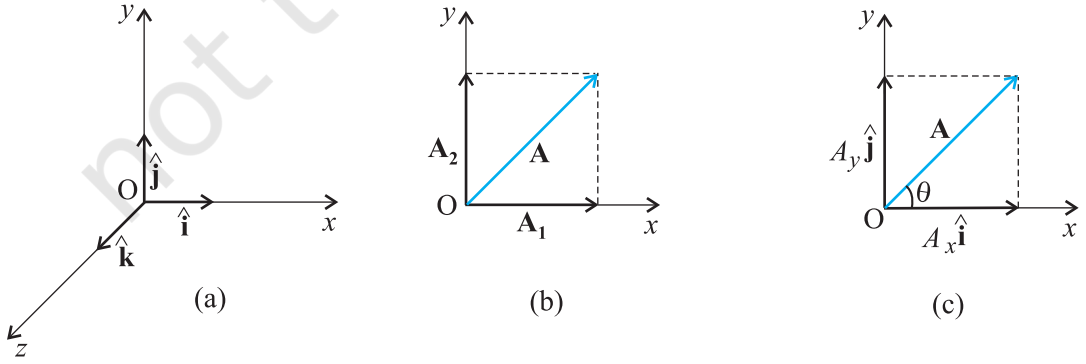
यदि A तथा θ हमें ज्ञात हैं तो A_x और A_y का मान समीकरण (3.13) से ज्ञात किया जा सकता है । यदि A_x एवं A_y ज्ञात हों तो A तथा θ का मान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = A^2$$

अथवा $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ (3.14)

एवं $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x},\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$ (3.15)

अभी तक इस विधि में हमने एक (x-y)समतल में किसी सदिश को उसके घटकों में वियोजित किया है किन्तु इसी

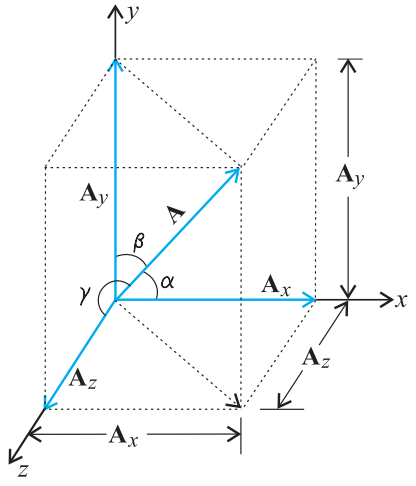


*चित्र 3.9 (a) एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ अक्षों x, y, z के अनुदिश है, (b) किसी सदिश **A** को x एवं y अक्षों के अनुदिश घटकों A_1 तथा A_2 में वियोजित किया है, (c) A_1 तथा A_2 को $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में व्यक्त किया है ।*

© NCERT not to be republished

विधि द्वारा किसी सदिश **A** को तीन विमाओं में x, y तथा z अक्षों के अनुदिश तीन घटकों में वियोजित किया जा सकता है । यदि **A** व x-, y-, व z- अक्षों के मध्य कोण क्रमशः α, β तथा γ हो* [चित्र 3.9 (d)] तो

$$A_x = A\cos\alpha, A_y = A\cos\beta, A_z = A\cos\gamma \qquad 3.16(a)$$



(d)

चित्र 3.9(d) सदिश A का x, y एवं z - अक्षों के अनुदिश घटकों में वियोजन ।

सामान्य रूप से,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (3.16b)$$

सदिश **A** का परिमाण

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (3.16c)$$

होगा ।

एक स्थिति सदिश **r** को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \qquad (3.17)$$

यहां x, y तथा z सदिश **r** के अक्षों x-, y-, z- के अनुदिश घटक हैं ।

3.6 सदिशों का योग : विश्लेषणात्मक विधि

यद्यपि सदिशों को जोड़ने की ग्राफी विधि हमें सदिशों तथा उनके परिणामी सदिश को स्पष्ट रूप से समझने में सहायक होती है, परन्तु कभी-कभी यह विधि जटिल होती है और इसकी शुद्धता भी सीमित होती है । भिन्न-भिन्न सदिशों को उनके संगत घटकों को मिलाकर जोड़ना अधिक आसान होता है। मान लीजिए कि किसी समतल में दो सदिश **A** तथा **B** हैं जिनके घटक क्रमशः A_x, A_y तथा B_x, B_y हैं तो

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.18)$$

मान लीजिए कि **R** इनका योग है, तो

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (3.19)$$

क्योंकि सदिश क्रमविनिमेय तथा साहचर्य नियमों का पालन करते हैं, इसलिए समीकरण (3.19) में व्यक्त किए गए सदिशों को निम्न प्रकार से पुनः व्यवस्थित कर सकते हैं :

$$\mathbf{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.19a)$$

क्योंकि $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ (3.20)

इसलिए $R_x = A_x + B_x$, $R_y = A_y + B_y$ (3.21)

इस प्रकार परिणामी सदिश **R** का प्रत्येक घटक सदिशों **A** और **B** के संगत घटकों के योग के बराबर होता है ।

तीन विमाओं के लिए सदिशों **A** और **B** को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहाँ घटकों R_x, R_y तथा R_z के मान निम्न प्रकार से हैं:

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$
$$R_z = A_z + B_z \qquad (3.22)$$

इस विधि को अनेक सदिशों को जोड़ने व घटाने के लिए उपयोग में ला सकते हैं । उदाहरणार्थ, यदि **a, b** तथा **c** तीनों सदिश निम्न प्रकार से दिए गए हों :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (3.23a)$$

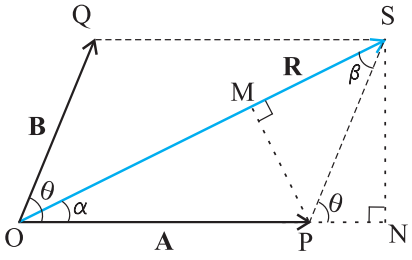
तो सदिश $\mathbf{T} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ के घटक निम्नलिखित होंगे:

$$T_x = a_x + b_x - c_x$$
$$T_y = a_y + b_y - c_y$$
$$T_z = a_z + b_z - c_z \qquad (3.23b)$$

उदाहरण 3.2 चित्र 3.10 में दिखाए गए दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण θ है । इनके परिणामी सदिश का परिमाण तथा दिशा उनके परिमाणों तथा θ के पद में निकालिए ।

* इस बात पर ध्यान दीजिए कि α, β, व γ कोण दिक्स्थान में हैं । ये ऐसी दो रेखाओं के बीच के कोण हैं जो एक समतल में नहीं हैं ।

© NCERT not to be republished



चित्र 3.10

हल चित्र 3.10 के अनुसार मान लीजिए कि **OP** तथा **OQ** दो सदिशों **A** तथा **B** को व्यक्त करते हैं, जिनके बीच का कोण θ है । तब सदिश योग के समान्तर चर्तुभुज नियम द्वारा हमें परिणामी सदिश **R** प्राप्त होगा जिसे चित्र में **OS** द्वारा दिखाया गया है । इस प्रकार

$$\mathbf{R = A + B}$$

चित्र में SN, OP के लंबवत् है तथा PM, OS के लंबवत् है ।

$$\therefore OS^2 = ON^2 + SN^2$$

किन्तु $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$SN = B\sin\theta$

$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

अथवा $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (3.24a)$$

त्रिभुज OSN में, $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$

एवं त्रिभुज PSN में, $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

अतएव $R\sin\alpha = B\sin\theta$

अथवा $$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (3.24b)$$

इसी प्रकार, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

अथवा $$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (3.24c)$$

समीकरणों (3.24b) तथा (3.24c) से हमें प्राप्त होता है–

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (3.24d)$$

समीकरण (3.24d) के द्वारा हम निम्नांकित सूत्र प्राप्त करते हैं–

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (3.24e)$$

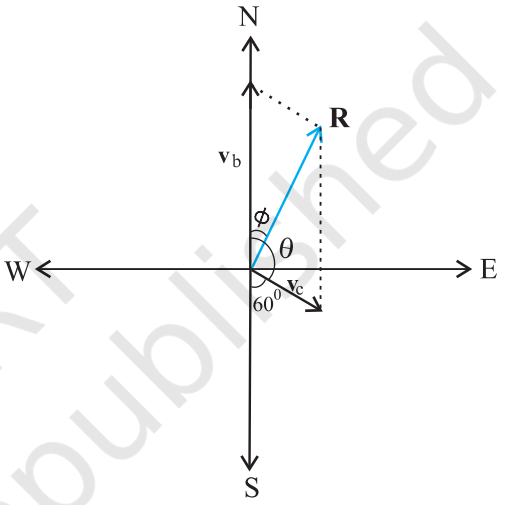
यहाँ R का मान समीकरण (3.24a) में दिया गया है ।

या, $$\tan\alpha = \frac{SN}{OP + PN} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \qquad (3.24f)$$

समीकरण (3.24a) से परिणामी **R** का परिमाण तथा समीकरण (3.24e) से इसकी दिशा मालूम की जा सकती है । समीकरण (3.24a) को **कोज्या-नियम** तथा समीकरण (3.24d) को **ज्या-नियम** कहते हैं । ◀

▶ ***उदाहरण 3.3*** एक मोटरबोट उत्तर दिशा की ओर 25 km/h के वेग से गतिमान है । इस क्षेत्र में जल-धारा का वेग 10 km/h है । जल-धारा की दिशा दक्षिण से पूर्व की ओर 60° पर है । मोटरबोट का परिणामी वेग निकालिए ।

हल चित्र 3.11 में सदिश v_b मोटरबोट के वेग को तथा v_c जल धारा के वेग को व्यक्त करते हैं । प्रश्न के अनुसार चित्र में इनकी दिशायें दर्शाई गई हैं । सदिश योग के समांतर चतुर्भुज नियम के अनुसार प्राप्त परिणामी **R** की दिशा चित्र में दर्शाई



चित्र 3.11

गई है । कोज्या-नियम का उपयोग करके हम **R** का परिमाण निकाल सकते हैं ।

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c\cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times 25\times 10(-1/2)} \cong 22 \text{ km/h}$$

R की दिशा ज्ञात करने के लिए हम 'ज्या-नियम' का उपयोग करते हैं–

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_c}{\sin\phi} \quad \text{या,} \quad \sin\phi = \frac{v_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin 120^\circ}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 21.8} \cong 0.397$$

$$\phi \cong 23.4^\circ$$ ◀

3.7 किसी समतल में गति

इस खण्ड में हम सदिशों का उपयोग कर दो या तीन विमाओं में गति का वर्णन करेंगे ।

© NCERT not to be republished

3.7.1 स्थिति सदिश तथा विस्थापन

किसी समतल में स्थित कण P का x-y निर्देशतंत्र के मूल बिंदु के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ [चित्र (3.12)] को निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त करते हैं :

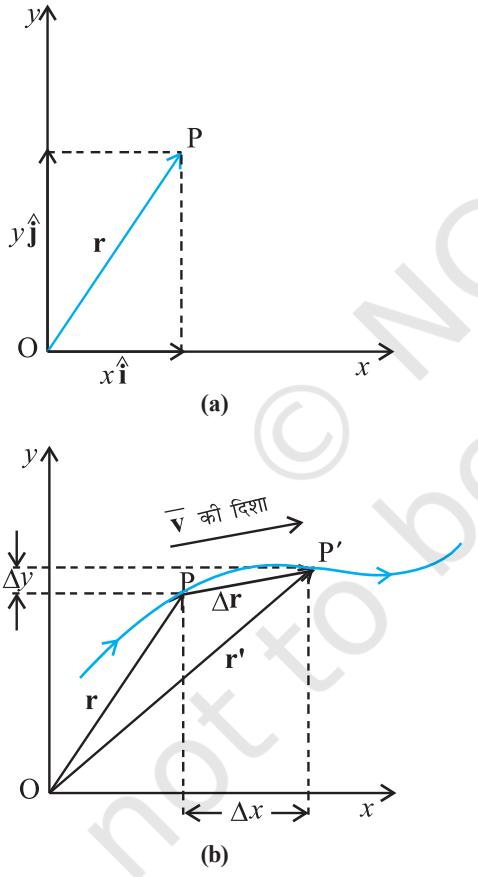
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

यहाँ x तथा y अक्षों x-तथा y- के अनुदिश $\mathbf{r}$ के घटक हैं । इन्हें हम कण के निर्देशांक भी कह सकते हैं ।

मान लीजिए कि चित्र (3.12b) के अनुसार कोई कण मोटी रेखा से व्यक्त वक्र के अनुदिश चलता है । किसी क्षण t पर इसकी स्थिति P है तथा दूसरे अन्य क्षण t' पर इसकी स्थिति P′ है । कण के विस्थापन को हम निम्नलिखित प्रकार से लिखेंगे,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (3.25)$$

इसकी दिशा P से P' की ओर है ।



चित्र 3.12 (a) स्थिति सदिश $\mathbf{r}$, *(b) विस्थापन* $\Delta\mathbf{r}$ *तथा कण का औसत वेग* $\bar{\mathbf{v}}$

समीकरण (3.25) को हम सदिशों के घटक के रूप में निम्नांकित प्रकार से व्यक्त करेंगे,

$$\Delta\mathbf{r} = \left(x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}\right) - \left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y$$

यहाँ $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$ (3.26)

वेग

वस्तु के विस्थापन और संगत समय अंतराल के अनुपात को हम औसत वेग ($\bar{\mathbf{v}}$) कहते हैं, अत:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (3.27)$$

अथवा, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \bar{v}_y\,\hat{\mathbf{j}}$

क्योंकि $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, इसलिए चित्र (3.12) के अनुसार औसत वेग की दिशा वही होगी, जो $\Delta\mathbf{r}$ की है ।

गतिमान वस्तु का **वेग** (तात्क्षणिक वेग) अति सूक्ष्म समयान्तराल ($\Delta t \to 0$ की सीमा में)विस्थापन $\Delta\mathbf{r}$ का समय अन्तराल Δt से अनुपात है । इसे हम $\mathbf{v}$ से व्यक्त करेंगे, अत:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \qquad (3.28)$$

चित्रों 3.13(a) से लेकर 3.13(d) की सहायता से इस सीमान्त प्रक्रम को आसानी से समझा जा सकता है । इन चित्रों में मोटी रेखा उस पथ को दर्शाती है जिस पर कोई वस्तु क्षण t पर बिंदु P से चलना प्रारम्भ करती है । वस्तु की स्थिति Δt_1, Δt_2, Δt_3, समयों के उपरांत क्रमश: P_1, P_2, P_3, से व्यक्त होती है । इन समयों में कण का विस्थापन क्रमश: $\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$, $\Delta\mathbf{r}_3$, है । चित्रों (a), (b) तथा (c) में क्रमश: घटते हुए Δt के मानों अर्थात् Δt_1, Δt_2, Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) के लिए कण के औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ की दिशा को दिखाया गया है । जैसे ही $\Delta t \to 0$ तो $\Delta r \to 0$ एवं $\Delta\mathbf{r}$ पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश हो जाता है (चित्र 3.13d)। इस प्रकार ***पथ के किसी बिंदु पर वेग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा द्वारा व्यक्त होता है जिसकी दिशा वस्तु की गति के अनुदिश होती है।***

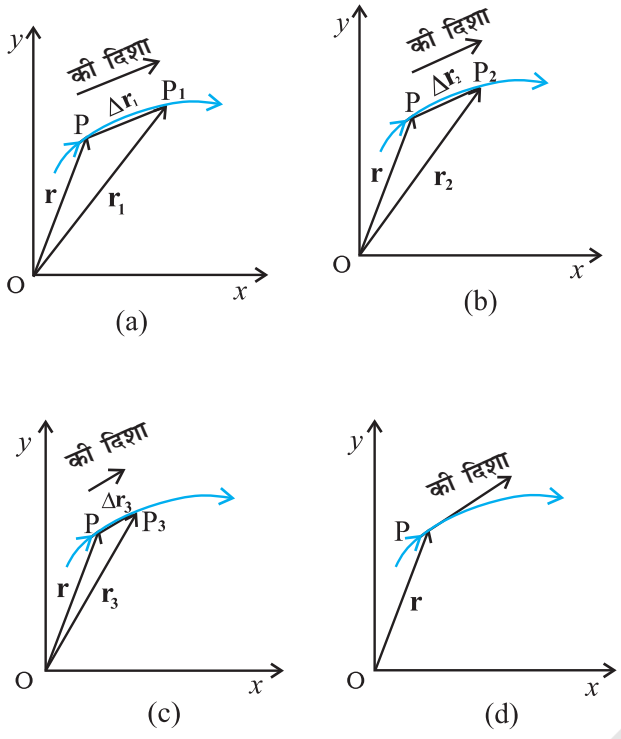
सुविधा के लिए $\mathbf{v}$ को हम प्राय: घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (3.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

© NCERT not to be republished



चित्र 3.13 *जैसे ही समय अंतराल Δt शून्य की सीमा को स्पर्श कर लेता है, औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ वस्तु के वेग $\mathbf{v}$ के बराबर हो जाता है । $\mathbf{v}$ की दिशा किसी क्षण पथ पर स्पर्श रेखा के समांतर है।*

या, $$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}.$$

यहाँ $$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt} \qquad (3.30a)$$

अत: यदि समय के फलन के रूप में हमें निर्देशांक x और y ज्ञात हैं तो हम उपरोक्त समीकरणों का उपयोग v_x और v_y निकालने में कर सकते हैं ।

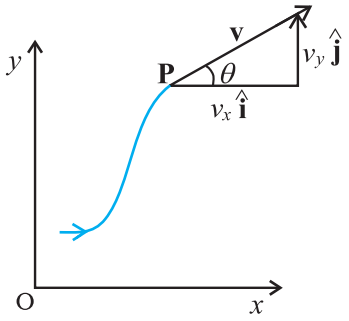
सदिश $\mathbf{v}$ का परिमाण निम्नलिखित होगा,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (3.30b)$$

तथा इसकी दिशा कोण θ द्वारा निम्न प्रकार से व्यक्त होगी :

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \qquad (3.30c)$$

चित्र 3.14 में बिन्दु P पर किसी वेग सदिश $\mathbf{v}$ के लिए v_x, v_y तथा कोण θ को दर्शाया गया है ।



चित्र 3.14 *वेग $\mathbf{v}$ के घटक v_x, v_y तथा कोण θ जो x-अक्ष से बनाता है । चित्र में $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$*

त्वरण

x-y समतल में गतिमान वस्तु का **औसत त्वरण (a)** उसके वेग में परिवर्तन तथा संगत समय अंतराल Δt के अनुपात के बराबर होता है :

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.31a)$$

अथवा $$\bar{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}. \qquad (3.31b)$$

त्वरण (*तात्क्षणिक त्वरण*) औसत त्वरण के सीमान्त मान के बराबर होता है जब समय अंतराल शून्य हो जाता है :

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (3.32a)$$

क्योंकि $\Delta\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\Delta v_x + \hat{\mathbf{j}}\Delta v_y$, इसलिए

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

अथवा $$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}a_x + \hat{\mathbf{j}}a_y \qquad (3.32b)$$

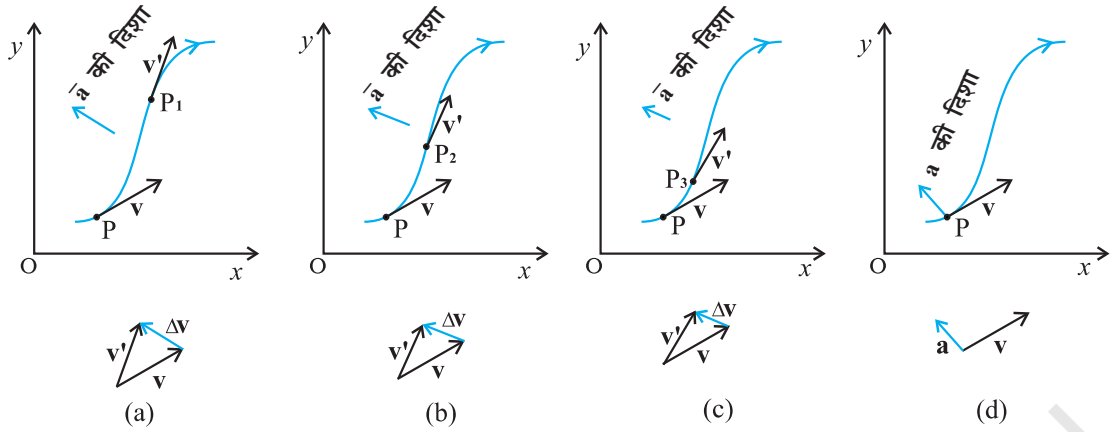
जहाँ $$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \; a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad (3.32c)^*$$

वेग की भाँति यहाँ भी वस्तु के पथ को प्रदर्शित करने वाले किसी आलेख में त्वरण की परिभाषा के लिए हम ग्राफी विधि से सीमान्त प्रक्रम को समझ सकते हैं । इसे चित्रों (3.15a) से (3.15d) तक में समझाया गया है । किसी क्षण t पर कण की स्थिति बिंदु P द्वारा दर्शाई गई है । Δt_1, Δt_2, Δt_3, $(\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3)$ समय के बाद कण की स्थिति क्रमश: बिंदुओं P_1, P_2, P_3 द्वारा व्यक्त की

* x व y के पदों में a_x तथा a_y को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

© NCERT not to be republished



चित्र 3.15 *तीन समय अंतरालों (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) के लिए औसत त्वरण $\bar{\mathbf{a}}$ (d) $\Delta t \to 0$ सीमा के अंतर्गत औसत त्वरण वस्तु के त्वरण के बराबर होता है ।*

गई है । चित्रों (3.15) a, b और c में इन सभी बिंदुओं P, P_1, P_2, P_3 पर वेग सदिशों को भी दिखाया गया है । प्रत्येक Δt के लिए सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करके $\Delta \mathbf{v}$ का मान निकालते हैं । परिभाषा के अनुसार औसत त्वरण की दिशा वही है जो $\Delta \mathbf{v}$ की होती है । हम देखते हैं कि जैसे-जैसे Δt का मान घटता जाता है वैसे-वैसे $\Delta \mathbf{v}$ की दिशा भी बदलती जाती है और इसके परिणामस्वरूप त्वरण की भी दिशा बदलती है । अंततः $\Delta t \to 0$ सीमा में [चित्र 3.15 (d)] औसत त्वरण, तात्क्षणिक त्वरण के बराबर हो जाता है और इसकी दिशा चित्र में दर्शाए अनुसार होती है ।

ध्यान दें कि एक विमा में वस्तु का वेग एवं त्वरण सदैव एक सरल रेखा में होते हैं (वे या तो एक ही दिशा में होते हैं अथवा विपरीत दिशा में) । परंतु दो या तीन विमाओं में गति के लिए वेग एवं त्वरण सदिशों के बीच 0° से 180° के बीच कोई भी कोण हो सकता है।

उदाहरण 3.4 किसी कण की स्थिति $\mathbf{r} = 3.0\,t\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}}$ है । जहां t सेकंड में व्यक्त किया गया है । अन्य गुणकों के मात्रक इस प्रकार हैं कि $\mathbf{r}$ मीटर में व्यक्त हो जाएँ। (a) कण का $\mathbf{v}(t)$ व $\mathbf{a}(t)$ ज्ञात कीजिए; (b) $t = 1.0$ s पर $\mathbf{v}(t)$ का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए ।

हल

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0\,t\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}})$$

$$= 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0\,t\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 4.0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0\ \text{m s}^{-2}$ y- दिशा में

$t = 1.0$ s पर $\mathbf{v} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$

इसका परिमाण $v = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0\ \text{m s}^{-1}$ है, तथा

इसकी दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ$ ◀

3.8 किसी समतल में एकसमान त्वरण से गति

मान लीजिए कि कोई वस्तु एक समतल x-y में एक समान त्वरण $\mathbf{a}$ से गति कर रही है अर्थात् $\mathbf{a}$ का मान नियत है । किसी समय अंतराल में औसत त्वरण इस स्थिर त्वरण के मान $\bar{\mathbf{a}}$ के बराबर होगा $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ । अब मान लीजिए किसी क्षण $t = 0$ पर वस्तु का वेग $\mathbf{v}_0$ तथा दूसरे अन्य क्षण t पर उसका वेग $\mathbf{v}$ है ।

तब परिभाषा के अनुसार

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t - 0} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t}$$

अथवा $$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}\,t \qquad (3.33a)$$

उपर्युक्त समीकरण को सदिशों के घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं-

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \qquad (3.33b)$$

अब हम देखेंगे कि समय के साथ स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ किस प्रकार बदलता है । यहाँ एकविमीय गति के लिए बताई गई विधि का उपयोग करेंगे । मान लीजिए कि $t = 0$ तथा $t = t$ क्षणों पर कण के स्थिति के सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_0$ तथा $\mathbf{r}$ हैं तथा इन क्षणों पर कण के वेग $\mathbf{v}_0$ तथा $\mathbf{v}$ हैं । तब समय अंतराल $t - 0 = t$ में कण का औसत वेग $(\mathbf{v_0} + \mathbf{v})/2$ तथा विस्थापन $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ होगा । क्योंकि विस्थापन औसत तथा समय अंतराल का गुणनफल होता है,

© NCERT not to be republished

अर्थात्

$$\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = \left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{v_0}}{2}\right) t = \left(\frac{(\mathbf{v_0} + \mathbf{a}t) + \mathbf{v_0}}{2}\right) t$$

$$= \mathbf{v_0} + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

अतएव,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad (3.34a)$$

यह बात आसानी से सत्यापित की जा सकती है कि समीकरण (3.34a) का अवकलन $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ समीकरण (3.33a) है तथा साथ ही $t = 0$ क्षण पर $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ की शर्त को भी पूरी करता है। समीकरण (3.34a) को घटकों के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$x = x_0 + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad (3.34b)$$

समीकरण (3.34b) की सीधी व्याख्या यह है कि x व y दिशाओं में गतियाँ एक दूसरे पर निर्भर नहीं करती हैं। अर्थात्, ***किसी समतल (दो विमा) में गति को दो अलग-अलग समकालिक एकविमीय एकसमान त्वरित गतियों के रूप में समझ सकते हैं जो परस्पर लंबवत् दिशाओं के अनुदिश हों।*** यह महत्वपूर्ण परिणाम है जो दो विमाओं में वस्तु की गति के विश्लेषण में उपयोगी होता है। यहाँ परिणाम त्रिविमीय गति के लिए भी है। बहुत-सी भौतिक स्थितियों में दो लंबवत् दिशाओं का चुनाव सुविधाजनक होता है जैसा कि हम प्रक्षेप्य गति के लिए खण्ड (3.10) में देखेंगे।

उदाहरण 3.5 $t = 0$ क्षण पर कोई कण मूल बिंदु से $5.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s के वेग से चलना शुरू करता है। x-y समतल में उस पर एक ऐसा बल लगता है जो उसमें एकसमान त्वरण $(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2 उत्पन्न करता है। (a) जिस क्षण पर कण का x निर्देशांक 84 m हो उस क्षण उसका y निर्देशांक कितना होगा ? (b) इस क्षण कण की चाल क्या होगी?

हल समीकरण (3.34a) से $\mathbf{r}_0 = 0$ पर प्रश्नानुसार कण की स्थिति निम्नांकित समीकरण से व्यक्त होगी,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\, t^2$$

$$= 5.0\hat{\mathbf{i}}\, t + \frac{1}{2}(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

अतएव, $x(t) = 5.0\, t + 1.5\, t^2$

$$y(t) = 1.0\, t^2$$

जब $x(t) = 84$ m तब $t = ?$

$$\therefore\ 84 = 5.0\, t + 1.5\, t^2$$

हल करने पर

$t = 6.0$ s पर $y = 1.0(6)^2 = 36.0$ m

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (5.0 + 3.0t)\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$t = 6$ s के लिए, $\mathbf{v} = 23.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$

अत: कण की चाल, $|\mathbf{v}| = \sqrt{23^2 + 12^2} \cong 26$ m s^{-1} ◀

3.9 प्रक्षेप्य गति

इससे पहले खण्ड में हमने जो विचार विकसित किए हैं, उदाहरणस्वरूप उनका उपयोग हम प्रक्षेप्य की गति के अध्ययन के लिए करेंगे। जब कोई वस्तु उछालने के बाद उड़ान में हो या प्रक्षेपित की गई हो तो उसे **प्रक्षेप्य** कहते हैं। ऐसा प्रक्षेप्य फुटबॉल, क्रिकेट की बॉल, बेस-बॉल या अन्य कोई भी वस्तु हो सकती है। किसी प्रक्षेप्य की गति को दो अलग-अलग समकालिक गतियों के घटक के परिणाम के रूप में लिया जा सकता है। इनमें से एक घटक बिना किसी त्वरण के क्षैतिज दिशा में होता है तथा दूसरा गुरुत्वीय बल के कारण एकसमान त्वरण से ऊर्ध्वाधर दिशा में होता है।

सर्वप्रथम गैलीलियो ने अपने लेख **डायलॉग आन दि ग्रेट वर्ल्ड सिस्टम्स** (1632) में प्रक्षेप्य गति के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर घटकों की स्वतंत्र प्रकृति का उल्लेख किया था।

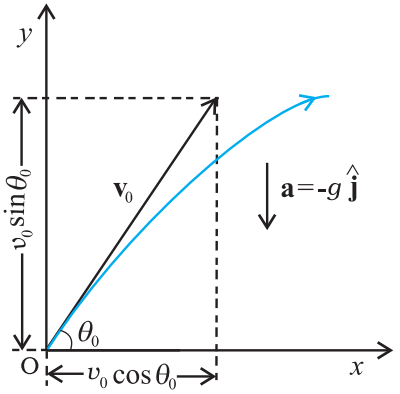
इस अध्ययन में हम यह मानेंगे कि प्रक्षेप्य की गति पर वायु का प्रतिरोध नगण्य प्रभाव डालता है। माना कि प्रक्षेप्य को ऐसी दिशा की ओर $\mathbf{v}_0$ वेग से फेंका गया है जो x-अक्ष से (चित्र 3.16 के अनुसार) θ_0 कोण बनाता है।

फेंकी गई वस्तु को प्रक्षेपित करने के बाद उस पर गुरुत्व के कारण लगने वाले त्वरण की दिशा नीचे की ओर होती है :

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}$$

अर्थात् $a_x = 0$, तथा $a_y = -g$ (3.35)

© NCERT not to be republished



चित्र 3.16 v_0 *वेग से* θ_0 *कोण पर प्रक्षेपित किसी वस्तु की गति ।*

प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ के घटक निम्न प्रकार होंगे :

$$v_{ox} = v_o \cos\theta_o$$
$$v_{oy} = v_o \sin\theta_o \qquad (3.36)$$

यदि चित्र 3.16 के अनुसार वस्तु की प्रारंभिक स्थिति निर्देश तंत्र के मूल बिंदु पर हो, तो

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

इस प्रकार समीकरण (3.34b) को निम्न प्रकार से लिखेंगे :

$$x = v_{ox}\, t = (v_o \cos\theta_o)t$$

तथा,
$$y = (v_o \sin\theta_o)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad (3.37)$$

समीकरण (3.33b) का उपयोग करके किसी समय t के लिए वेग के घटकों को नीचे लिखे गए समीकरणों से व्यक्त करेंगे :

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos\theta_o$$
$$v_y = v_o \sin\theta_o - g\, t \qquad (3.38)$$

समीकरण (3.37) से हमें किसी क्षण t पर प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ तथा प्रक्षेप्य कोण θ_0 के पदों में प्रक्षेप्य के निर्देशांक x- और y- प्राप्त हो जाएँगे । इस बात पर ध्यान दीजिए कि x व y दिशाओं के परस्पर लंबवत् होने के चुनाव से प्रक्षेप्य गति के विश्लेषण में पर्याप्त सरलता हो गई है । वेग के दो घटकों में से एक x- घटक गति की पूरी अवधि में स्थिर रहता है जबकि दूसरा y- घटक इस प्रकार परिवर्तित होता है मानो प्रक्षेप्य स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिर रहा हो । चित्र 3.17 में विभिन्न क्षणों के लिए इसे आलेखी विधि से दर्शाया गया है । ध्यान दीजिए कि अधिकतम ऊँचाई वाले बिंदु के लिए $v_y = 0$ तथा

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = 0$$

प्रक्षेपक के पथ का समीकरण

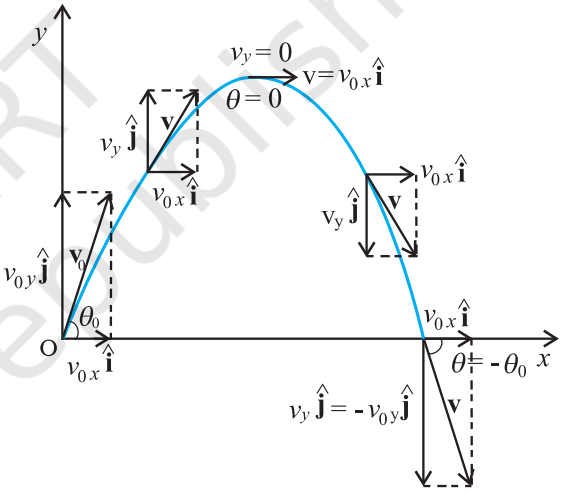
प्रक्षेप्य द्वारा चले गए पथ की आकृति क्या होती है ? इसके लिए हमें पथ का समीकरण निकालना होगा । समीकरण (3.37) में दिए गए x व y व्यंजकों से t को विलुप्त करने से निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$y = (\tan\theta_o)x - \frac{g}{2(v_o\cos\theta_o)^2}x^2 \qquad (3.39)$$

यह प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण है और इसे चित्र 3.17 में दिखाया गया है । क्योंकि g, θ_0 तथा v_0 अचर हैं, समीकरण (3.39) को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$y = ax + bx^2$$

इसमें a तथा b नियतांक हैं । यह एक परवलय का समीकरण है, अर्थात् प्रक्षेप्य का पथ परवलयिक होता है ।



चित्र 3.17 प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है ।

अधिकतम ऊँचाई का समय

प्रक्षेप्य अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने के लिए कितना समय लेता है? मान लीजिए कि यह समय t_m है । क्योंकि इस बिंदु पर $v_y = 0$ इसलिए समीकरण (3.38) से हम t_m का मान निकाल सकते हैं :

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - g t_m = 0$$

अथवा
$$t_m = v_o \sin\theta_o / g \qquad (3.40a)$$

प्रक्षेप्य की उड़ान की अवधि में लगा कुल समय T_f हम समीकरण (3.38) में $y = 0$ रखकर निकाल लेते हैं । इसलिए,

$$T_f = 2\,(v_o \sin\theta_o)/g \qquad (3.40b)$$

T_f को प्रक्षेप्य का **उड्डयन काल** कहते हैं । यह ध्यान देने की बात है कि $T_f = 2t_m$ । पथ की सममिति से हम ऐसे ही परिणाम की आशा करते हैं ।

© NCERT not to be republished

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई

समीकरण (3.37) में $t = t_m$ रखकर प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई h_m की गणना की जा सकती है ।

$$y = h_m = (v_0 \sin\theta_0)\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

या $$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g} \qquad (3.41)$$

प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास

प्रारंभिक स्थिति ($x = y = 0$) से चलकर उस स्थिति तक जब $y = 0$ हो प्रक्षेप्य द्वारा चली गई दूरी को **क्षैतिज परास**, R, कहते हैं। क्षैतिज परास उड्डयन काल T_f में चली गई दूरी है । इसलिए, परास R होगा :

$$R = (v_0 \cos\theta_0)(T_f)$$
$$= (v_0 \cos\theta_0)\ (2\, v_0 \sin\theta_0)/g$$

अथवा $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (3.42)$$

समीकरण (3.42) से स्पष्ट है कि किसी प्रक्षेप्य के वेग v_0 लिए R अधिकतम तब होगा जब $\theta_0 = 45^0$ क्योंकि $\sin 90^0 = 1$ (जो $\sin 2\theta_0$ का अधिकतम मान है) । इस प्रकार अधिकतम क्षैतिज परास होगा

$$R_m = \frac{v_0^2}{g} \qquad (3.42a)$$

उदाहरण 3.6 : गैलीलियो ने अपनी पुस्तक "टू न्यू साइंसेज़" में कहा है कि "उन उन्नयनों के लिए जिनके मान 45° से बराबर मात्रा द्वारा अधिक या कम हैं, क्षैतिज परास बराबर होते हैं" । इस कथन को सिद्ध कीजिए ।

हल यदि कोई प्रक्षेप्य θ_0 कोण पर प्रारंभिक वेग v_0 से फेंका जाए, तो उसका परास

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \text{ होगा।}$$

अब कोणों ($45^0 + \alpha$) तथा ($45^0 - \alpha$) के लिए $2\theta_0$ का मान क्रमशः ($90^0 + 2\alpha$) तथा ($90^0 - 2\alpha$) होगा । $\sin(90^0 + 2\alpha)$ तथा $\sin(90^0 - 2\alpha)$ दोनों का मान समान अर्थात् $\cos 2\alpha$ होता है । अतः उन उन्नयनों के लिए जिनके मान 45^0 से बराबर मात्रा द्वारा कम या अधिक हैं, क्षैतिज परास बराबर होते हैं । ◀

उदाहरण 3.7 : एक पैदल यात्री किसी खड़ी चट्टान के कोने पर खड़ा है । चट्टान जमीन से 490 m ऊंची है । वह एक पत्थर को क्षैतिज दिशा में 15 m s^{-1} की आरंभिक चाल से फेंकता है । वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि पत्थर को जमीन तक पहुँचने में कितना समय लगा तथा जमीन से टकराते समय उसकी चाल कितनी थी? ($g = 9.8$ m s^{-2})।

हल हम खड़ी चट्टान के कोने को x- तथा y- अक्ष का मूल बिंदु तथा पत्थर फेंके जाने के समय को $t = 0$ मानेंगे । x- अक्ष की धनात्मक दिशा आरंभिक वेग के अनुदिश तथा y-अक्ष की धनात्मक दिशा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर चुनते हैं । जैसा कि हम पहले कह चुके हैं कि गति के x- व y- घटक एक दूसरे पर निर्भर नहीं करते, इसलिए

$$x(t) = x_0 + v_{ox}\, t$$
$$y(t) = y_0 + v_{oy}\, t + (1/2)\, a_y\, t^2$$

यहाँ $x_0 = y_0 = 0$, $v_{oy} = 0$, $a_y = -g = -9.8$ m s^{-2}

$v_{ox} = 15$ m s^{-1}.

पत्थर उस समय जमीन से टकराता है जब $y(t) = -490$ m

$$\therefore -490 \text{ m} = -(1/2)\,(9.8)t^2$$

अर्थात् $t = 10$ s

वेग घटक $v_x = v_{ox}$ तथा $v_y = v_{oy} - g\,t$ होंगे ।

अतः, जब पत्थर जमीन से टकराता है, तब

$v_{ox} = 15$ m s^{-1}

$v_{oy} = 0 - 9.8 \times 10 = -98$ m s^{-1}

इसलिए पत्थर की चाल

$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} = 99$ m s^{-1} होगी । ◀

उदाहरण 3.8 : क्षैतिज से ऊपर की ओर 30° का कोण बनाते हुए एक क्रिकेट गेंद 28 m s^{-1} की चाल से फेंकी जाती है । (a) अधिकतम ऊँचाई की गणना कीजिए, (b) उसी स्तर पर वापस पहुँचने में लगे समय की गणना कीजिए, तथा (c) फेंकने वाले बिंदु से उस बिंदु की दूरी जहाँ गेंद उसी स्तर पर पहुँची है, की गणना कीजिए ।

हल (a) अधिकतम ऊँचाई

$$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30^0)^2}{2(9.8)} \text{ m}$$

$= 10.0$ m होगी ।

(b) उसी धरातल पर वापस आने में लगा समय

$$T_f = (2\, v_0 \sin\theta_0)/g = (2 \times 28 \times \sin 30°)/9.8$$
$$= 28/9.8 \text{ s} = 2.9 \text{ s} \text{ होगा ।}$$

© NCERT not to be republished

(c) फेंकने वाले बिंदु से उस बिंदु की दूरी जहाँ गेंद उसी स्तर पर पहुँचती है:

$$R = \frac{\left(v_o^2 \sin 2\theta_o\right)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60^o}{9.8} = 69 \text{ m}$$ होगी।

3.10 एकसमान वृत्तीय गति

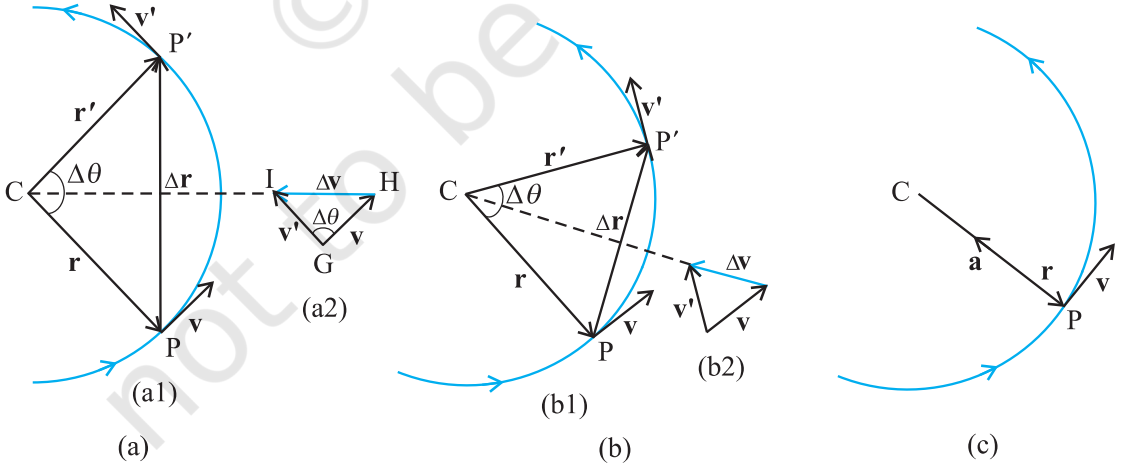
जब कोई वस्तु एकसमान चाल से एक वृत्ताकार पथ पर चलती है, तो वस्तु की गति को **एकसमान वृत्तीय गति** कहते हैं। शब्द "एकसमान" उस चाल के संदर्भ में प्रयुक्त हुआ है जो वस्तु की गति की अवधि में एकसमान (नियत) रहती है। माना कि चित्र 3.18 के अनुसार कोई वस्तु एकसमान चाल v से R त्रिज्या वाले वृत्त के अनुदिश गतिमान है। क्योंकि वस्तु के वेग की दिशा में निरन्तर परिवर्तन हो रहा है, अत: उसमें त्वरण उत्पन्न हो रहा है। हमें त्वरण का परिमाण तथा उसकी दिशा ज्ञात करनी है।

माना **r** व **r′** तथा **v** व **v′**कण की स्थिति तथा गति सदिश हैं जब वह गति के दौरान क्रमश: बिंदुओं P व P' पर है (चित्र 3.18a)। परिभाषा के अनुसार, किसी बिंदु पर कण का वेग उस बिंदु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश गति की दिशा में होता है। चित्र 3.18(a1) में वेग सदिशों **v** व **v′**को दिखाया गया है। चित्र 3.18(a2) में सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करके $\Delta\mathbf{v}$ निकाल लेते हैं। क्योंकि पथ वृत्तीय है, इसलिए चित्र में, ज्यामिति से स्पष्ट है कि **v**, **r** के तथा **v′**, **r′** के लंबवत् हैं। इसलिए, $\Delta\mathbf{v}$, $\Delta\mathbf{r}$ के लंबवत् होगा। पुन: क्योंकि औसत त्वरण $\Delta\mathbf{v}\left(\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right)$ के अनुदिश है, इसलिए $\bar{\mathbf{a}}$ भी $\Delta\mathbf{r}$ के लंबवत् होगा। अब यदि हम $\Delta\mathbf{v}$ को उस रेखा पर रखें जो **r** व **r′** के बीच के कोण को द्विभाजित करती है तो हम देखेंगे कि इसकी दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होगी। इन्ही राशियों को चित्र 3.18(b) में छोटे समय अंतराल के लिए दिखाया गया है। $\Delta\mathbf{v}$, अत: $\bar{\mathbf{a}}$ की दिशा पुन: केंद्र की ओर होगी। चित्र (3.18c) में $\Delta t \to 0$ है, इसलिए औसत त्वरण, तात्क्षणिक त्वरण के बराबर हो जाता है। इसकी दिशा केंद्र की ओर होती है* । इस प्रकार, यह निष्कर्ष निकलता है कि एकसमान वृत्तीय गति के लिए वस्तु के त्वरण की दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होती है। अब हम इस त्वरण का परिमाण निकालेंगे।

परिभाषा के अनुसार, **a** का परिमाण निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त होता है,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t}$$

मान लीजिए **r** व **r′** के बीच का कोण $\Delta\theta$ है। क्योंकि वेग सदिश **v** व **v′**सदैव स्थिति सदिशों के लंबवत् होते हैं, इसलिए उनके बीच का कोण भी $\Delta\theta$ होगा। अतएव स्थिति सदिशों द्वारा निर्मित त्रिभुज ($\Delta CPP'$) तथा वेग सदिशों **v, v′** व $\Delta\mathbf{v}$ द्वारा निर्मित त्रिभुज (ΔGHI) समरूप हैं (चित्र 3.18a)। इस प्रकार एक त्रिभुज के आधार की लंबाई व किनारे की भुजा की लंबाई का अनुपात दूसरे त्रिभुज की तदनुरूप लंबाइयों के अनुपात के बराबर होगा, अर्थात्



चित्र 3.18 किसी वस्तु की एकसमान वृत्तीय गति के लिए वेग तथा त्वरण। चित्र (a) से (c) तक Δt घटता जाता है (चित्र c में शून्य हो जाता है)। वृत्ताकार पथ के प्रत्येक बिंदु पर त्वरण वृत्त के केंद्र की ओर होता है।

$\Delta t \to 0$ सीमा में Δr, r के लंबवत् हो जाता है। इस सीमा में क्योंकि $\Delta v \to 0$ होता है, फलस्वरूप यह भी v के लंबवत् होगा। अत: वृत्तीय पथ के प्रत्येक बिंदु पर त्वरण की दिशा केंद्र की ओर होती है।

© NCERT not to be republished

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R} \quad \text{या} \quad |\Delta \mathbf{v}| = v\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

इसलिए,

$$|\mathbf{a}| = \underset{\Delta t \to 0}{} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{} \frac{v|\Delta \mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{v}{R} \underset{\Delta t \to 0}{} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

यदि Δt छोटा है, तो $\Delta\theta$ भी छोटा होगा । ऐसी स्थिति में चाप PP′ को लगभग $|\Delta \mathbf{r}|$ के बराबर ले सकते हैं ।

अर्थात्, $|\Delta \mathbf{r}| \cong v\,\Delta t$

$$\text{या} \quad \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \cong v \quad \text{अथवा} \quad \underset{\Delta t \to 0}{} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = v$$

इस प्रकार, अभिकेंद्र त्वरण a_c का मान निम्नलिखित होगा,

$$a_c = \left(\frac{v}{R}\right) v = v^2/R \qquad (3.43)$$

इस प्रकार किसी R त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ के अनुदिश v चाल से गतिमान वस्तु के त्वरण का परिमाण v^2/R होता है जिसकी **दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होती है** । इसी कारण इस प्रकार के त्वरण को **अभिकेंद्र त्वरण** कहते हैं (यह पद न्यूटन ने सुझाया था) । अभिकेंद्र त्वरण से संबंधित संपूर्ण विश्लेषणात्मक लेख सर्वप्रथम 1673 में एक डच वैज्ञानिक क्रिस्चियान हाइगेन्स (1629-1695) ने प्रकाशित करवाया था, किन्तु संभवतया न्यूटन को भी कुछ वर्षों पूर्व ही इसका ज्ञान हो चुका था । अभिकेंद्र को अंग्रेजी में सेंट्रीपीटल कहते हैं जो एक ग्रीक शब्द है जिसका अभिप्राय केंद्र-अभिमुख (केंद्र की ओर) है । क्योंकि v तथा R दोनों अचर हैं इसलिए अभिकेंद्र त्वरण का परिमाण भी अचर होता है। परंतु दिशा बदलती रहती है और सदैव केंद्र की ओर होती है। इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि अभिकेंद्र त्वरण एकसमान सदिश नहीं होता है ।

किसी वस्तु के एकसमान वृत्तीय गति के वेग तथा त्वरण को हम एक दूसरे प्रकार से भी समझ सकते हैं । चित्र 3.18 में दिखाए गए अनुसार Δt (=$t'-t$) समय अंतराल में जब कण P से P′ पर पहुँच जाता है तो रेखा CP कोण $\Delta\theta$ से घूम जाती है । $\Delta\theta$ को हम कोणीय दूरी कहते हैं । कोणीय वेग ω (ग्रीक अक्षर 'ओमेगा') को हम कोणीय दूरी के समय परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित करते हैं । इस प्रकार,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (3.44)$$

अब यदि Δt समय में कण द्वारा चली दूरी को Δs से व्यक्त करें (अर्थात् PP'=Δs) तो,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

किंतु $\Delta s = R\Delta\theta$, इसलिए $v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\,\omega$

अतः $v = \omega R$ (3.45)

अभिकेंद्र त्वरण को हम कोणीय चाल के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं । अर्थात्,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

या $a_c = \omega^2 R$ (3.46)

वृत्त का एक चक्कर लगाने में वस्तु को जो समय लगता है उसे हम आवर्तकाल T कहते हैं । एक सेकंड में वस्तु जितने चक्कर लगाती है, उसे हम वस्तु की आवृत्ति ν कहते हैं । परंतु इतने समय में वस्तु द्वारा चली गई दूरी $s = 2\pi R$ होती है, इसलिए

$$v = 2\pi R/T = 2\pi R\nu \qquad (3.47)$$

इस प्रकार ω, v तथा a_c को हम आवृति ν के पद में व्यक्त कर सकते हैं, अर्थात्

$$\omega = 2\pi\nu$$
$$v = 2\pi\nu R$$
$$a_c = 4\pi^2\nu^2 R \qquad (3.48)$$

उदाहरण 3.9 : कोई कीड़ा एक वृत्तीय खाँचे में जिसकी त्रिज्या 12cm है, फँस गया है । वह खाँचे के अनुदिश स्थिर चाल से चलता है और 100 सेकंड में 7 चक्कर लगा लेता है। (a) कीड़े की कोणीय चाल व रैखिक चाल कितनी होगी? (b) क्या त्वरण सदिश एक अचर सदिश है। इसका परिणाम कितना होगा?

हल यह एकसमान वृत्तीय गति का एक उदाहरण है । यहाँ R = 12 cm है । कोणीय चाल ω का मान

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

है तथा रैखिक चाल v का मान

$$v = \omega\, R = 0.44 \times 12 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm s}^{-1}$$

होगा । वृत्त के हर बिंदु पर वेग v की दिशा उस बिंदु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश होगी तथा त्वरण की दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होगी । क्योंकि यह दिशा लगातार बदलती रहती है, इसलिए त्वरण एक अचर सदिश नहीं है । परंतु त्वरण का परिमाण अचर है, जिसका मान

$a = \omega^2 R = (0.44 \text{ s}^{-1})^2\,(12 \text{ cm}) = 2.3 \text{ cm s}^{-2}$ होगा। ◀

© NCERT not to be republished

सारांश

1. *अदिश राशियाँ* वे राशियाँ हैं जिनमें केवल परिमाण होता है । दूरी, चाल, संहति (द्रव्यमान) तथा ताप अदिश राशियों के कुछ उदाहरण हैं ।
2. *सदिश राशियाँ* वे राशियाँ हैं जिनमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं । विस्थापन, वेग तथा त्वरण आदि इस प्रकार की राशि के कुछ उदाहरण हैं । ये राशियाँ सदिश बीजगणित के विशिष्ट नियमों का पालन करती हैं ।
3. यदि किसी सदिश **A** को किसी वास्तविक संख्या λ से गुणा करें तो हमें एक दूसरा सदिश **B** प्राप्त होता है जिसका परिमाण **A** के परिमाण का λ गुना होता है । नए सदिश की दिशा या तो **A** के अनुदिश होती है या इसके विपरीत । दिशा इस बात पर निर्भर करती है कि λ धनात्मक है या ऋणात्मक ।
4. दो सदिशों **A** व **B** को जोड़ने के लिए या तो *शीर्ष व पुच्छ* की ग्राफी विधि का या *समान्तर चतुर्भुज विधि* का उपयोग करते हैं ।
5. सदिश योग *क्रम-विनिमेय* नियम का पालन करता है-
$$\mathbf{A + B = B + A}$$
साथ ही यह *साहचर्य के नियम* का भी पालन करता है अर्थात् $\mathbf{(A + B) + C = A + (B + C)}$
6. *शून्य सदिश* एक ऐसा सदिश होता है जिसका परिमाण शून्य होता है। क्योंकि परिमाण शून्य होता है इसलिए इसके साथ दिशा बतलाना आवश्यक नहीं है ।
इसके निम्नलिखित गुण होते हैं :
$$\mathbf{A + 0 = A}$$
$$\lambda\mathbf{0 = 0}$$
$$0\mathbf{A = 0}$$
7. सदिश **B** को **A** से घटाने की क्रिया को हम **A** व **–B** को जोड़ने के रूप में परिभाषित करते हैं-
$$\mathbf{A - B = A + (-B)}$$
8. किसी सदिश **A** को उसी समतल में स्थित दो सदिशों **a** तथा **b** के अनुदिश दो घटक सदिशों में वियोजित कर सकते हैं:
$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$
यहाँ λ व μ वास्तविक संख्याएँ हैं ।
9. किसी सदिश **A** से संबंधित *एकांक सदिश* वह सदिश है जिसका परिमाण एक होता है और जिसकी दिशा सदिश **A** के अनुदिश होती है । एकांक सदिश $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$
एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ इकाई परिमाण वाले वे सदिश हैं जिनकी दिशाएँ दक्षिणावर्ती निकाय की अक्षों क्रमशः x-, y- व z- के अनुदिश होती हैं ।
10. दो विमा के लिए सदिश **A** को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं-
$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$
यहाँ A_x तथा A_y क्रमशः x-, y-अक्षों के अनुदिश **A** के घटक हैं । यदि सदिश **A,** x-अक्ष के साथ θ कोण बनाता है, तो $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$ तथा
$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2},\ \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}.$$
11. *विश्लेषणात्मक विधि* से भी सदिशों को आसानी से जोड़ा जा सकता है । यदि x-y समतल में दो सदिशों **A** व **B** का योग **R** हो, तो
$$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} \quad \text{जहाँ } R_x = A_x + B_x \text{ तथा } R_y = A_y + B_y$$
12. समतल में किसी वस्तु की स्थिति सदिश **r** को प्रायः निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$
स्थिति सदिशों **r** व **r′** के बीच के विस्थापन को निम्न प्रकार से लिखते हैं :
$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$
$$= (x' - x)\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}}$$
$$= \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}$$

© NCERT not to be republished

13. यदि कोई वस्तु समय अंतराल Δt में $\Delta \mathbf{r}$ से विस्थापित होती है तो उसका औसत वेग $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ होगा । किसी क्षण t पर वस्तु का वेग उसके औसत वेग के सीमान्त मान के बराबर होता है जब Δt शून्य के सन्निकट हो जाता है । अर्थात्

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

इसे एकांक सदिशों के रूप में भी व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}}$$

जहाँ $$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

जब किसी निर्देशांक निकाय में कण की स्थिति को दर्शाते हैं, तो $\mathbf{v}$ की दिशा कण के पथ के वक्र की उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है ।

14. यदि वस्तु का वेग Δt समय अंतराल में $\mathbf{v}$ से $\mathbf{v}'$ में बदल जाता है, तो उसका औसत त्वरण $\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ होगा । जब Δt का सीमान्त मान शून्य हो जाता है तो किसी क्षण t पर वस्तु का त्वरण $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ होगा ।

घटक के पदों में इसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$$

यहाँ,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

15. यदि एक वस्तु किसी समतल में एकसमान त्वरण $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ से गतिमान है तथा क्षण t=0 पर उसका स्थिति सदिश $\mathbf{r}_o$ है, तो किसी अन्य क्षण t पर उसका स्थिति सदिश $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ होगा तथा उसका वेग $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$ होगा ।

यहाँ $\mathbf{v}_0$, $t = 0$ क्षण पर वस्तु के वेग को व्यक्त करता है ।

घटक के रूप में

$$x = x_o + v_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = y_o + v_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

किसी समतल में एकसमान त्वरण की गति को दो अलग-अलग समकालिक एकविमीय व परस्पर लंबवत् गतियों के अध्यारोपण के रूप में मान सकते हैं ।

16. प्रक्षेपित होने के उपरांत जब कोई वस्तु उड़ान में होती है तो उसे *प्रक्षेप्य* कहते हैं । यदि x-अक्ष से θ_0 कोण पर वस्तु का प्रारंभिक वेग v_0 है तो t क्षण के उपरांत प्रक्षेप्य के स्थिति एवं वेग संबंधी समीकरण निम्नवत् होंगे-

$$x = (v_0 \cos\theta_0)\, t$$

$$y = (v_0 \sin\theta_0)\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

प्रक्षेप्य का पथ परवलयिक होता है जिसका समीकरण

© NCERT not to be republished

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{gx^2}{2(v_o\cos\theta_o)^2}$$ होगा ।

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई $h_m = \frac{(v_o\sin\theta_o)^2}{2g}$, तथा

इस ऊँचाई तक पहुंचने में लगा समय $t_m = \frac{v_o\sin\theta_o}{g}$ होगा ।

प्रक्षेप्य द्वारा अपनी प्रारंभिक स्थिति से उस स्थिति तक, जिसके लिए नीचे उतरते समय $y = 0$ हो, चली गई क्षैतिज दूरी को प्रक्षेप्य का परास R कहते हैं ।

अत: प्रक्षेप्य का परास $R = \frac{v_o^2}{g}\sin 2\theta_o$ होगा ।

17. जब कोई वस्तु एकसमान चाल से एक वृत्तीय मार्ग में चलती है तो इसे *एकसमान वृत्तीय गति* कहते हैं । यदि वस्तु की चाल v हो तथा इसकी त्रिज्या R हो, तो अभिकेंद्र त्वरण, $a_c = v^2/R$ होगा तथा इसकी दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होगी । कोणीय चाल ω कोणीय दूरी के समान परिवर्तन की दर होता है । रैखिक वेग $v = \omega R$ होगा तथा त्वरण $a_c = \omega^2 R$ होगा ।
यदि वस्तु का आवर्तकाल T तथा आवृत्ति ν हो, तो ω , ν तथा a_c के मान निम्नवत् होंगे ।

$\omega = 2\pi\nu$, $v = 2\pi\nu R$, $a_c = 4\pi^2\nu^2 R$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमा	मात्रक	टिप्पणी
स्थिति सदिश	$\mathbf{r}$	[L]	m	सदिश । किसी अन्य चिह्न से भी इसे व्यक्त कर सकते हैं
विस्थापन	$\Delta\mathbf{r}$	[L]	m	”
वेग		$[LT^{-1}]$	$m\,s^{-1}$	
(a) औसत	$\bar{\mathbf{v}}$			$= \Delta\mathbf{r}/\Delta t$, सदिश
(b) तात्क्षणिक	$\mathbf{v}$			$= d\mathbf{v}/dt$, सदिश
त्वरण		$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	
(a) औसत	$\bar{\mathbf{a}}$			$= \Delta\mathbf{v}/\Delta t$, सदिश
(b) तात्क्षणिक	$\mathbf{a}$			$= d\mathbf{v}/dt$, सदिश
प्रक्षेप्य गति				
(a) अधिकतम ऊंचाई में लगा समय	t_m	[T]	s	$= \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$
(b) अधिकतम ऊंचाई	h_m	[L]	m	$= \frac{(v_0\sin\theta_0)^2}{2g}$
(c) क्षैतिज परास	R	[L]	m	$= \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$
वृत्तीय गति				
(a) कोणीय चाल	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \Delta\theta/\Delta t = v/R$
(b) अभिकेंद्र त्वरण	a_c	$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	$= v^2/R$

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

1. किसी वस्तु द्वारा दो बिंदुओं के बीच की पथ-लंबाई सामान्यतया, विस्थापन के परिमाण के बराबर नहीं होती । विस्थापन केवल पथ के अंतिम बिंदुओं पर निर्भर करता है जबकि पथ-लंबाई (जैसाकि नाम से ही स्पष्ट है) वास्तविक पथ पर निर्भर करती है । दोनों राशियां तभी बराबर होंगी जब वस्तु गति मार्ग में अपनी दिशा नहीं बदलती । अन्य दूसरी परिस्थितियों में पथ-लंबाई विस्थापन के परिमाण से अधिक होती है ।
2. उपरोक्त बिंदु 1 की दृष्टि से वस्तु की औसत चाल किसी दिए समय अंतराल में या तो उसके औसत वेग के परिमाण के बराबर होगी या उससे अधिक होगी । दोनों बराबर तब होंगी जब पथ-लंबाई विस्थापन के परिमाण के बराबर हो ।
3. सदिश समीकरण (3.33) तथा (3.34) अक्षों के चुनाव पर निर्भर नहीं करते हैं । नि:संदेह आप उन्हें दो स्वतंत्र अक्षों के अनुदिश वियोजित कर सकते हैं ।
4. एकसमान त्वरण के लिए शुद्धगतिकी के समीकरण एकसमान वृत्तीय गति में लागू नहीं होते क्योंकि इसमें त्वरण का परिमाण तो स्थिर रहता है परंतु उसकी दिशा निरंतर बदलती रहती है ।
5. यदि किसी वस्तु के दो वेग $\mathbf{v}_1$ तथा $\mathbf{v}_2$ हों तो उनका परिणामी वेग $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ होगा । उपरोक्त सूत्र तथा वस्तु 2 के सापेक्ष वस्तु का 1 के वेग अर्थात्: $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ के बीच भेद को भलीभांति जानिए । यहां $\mathbf{v}_1$ तथा $\mathbf{v}_2$ किसी उभयनिष्ठ निर्देश तन्त्र के सापेक्ष वस्तु की गतियां हैं ।
6. वृत्तीय गति में किसी कण का परिणामी त्वरण वृत्त के केंद्र की ओर होता है यदि उसकी चाल एकसमान है ।
7. किसी वस्तु की गति के मार्ग की आकृति केवल त्वरण से ही निर्धारित नहीं होती बल्कि वह गति की प्रारंभिक दशाओं (प्रारंभिक स्थिति व प्रारंभिक वेग) पर भी निर्भर करती है । उदाहरणस्वरूप, एक ही गुरुत्वीय त्वरण से गतिमान किसी वस्तु का मार्ग एक सरल रेखा भी हो सकता है या कोई परवलय भी, ऐसा प्रारंभिक दशाओं पर निर्भर करेगा ।

अभ्यास

3.1 निम्नलिखित भौतिक राशियों में से बतलाइए कि कौन-सी सदिश हैं और कौन-सी अदिश :

आयतन, द्रव्यमान, चाल, त्वरण, घनत्व, मोल संख्या, वेग, कोणीय आवृत्ति, विस्थापन, कोणीय वेग।

3.2 निम्नांकित सूची में से दो अदिश राशियों को छाँटिए-

बल, कोणीय संवेग, कार्य, धारा, रैखिक संवेग, विद्युत क्षेत्र, औसत वेग, चुंबकीय आघूर्ण, आपेक्षिक वेग।

3.3 निम्नलिखित सूची में से एकमात्र सदिश राशि को छाँटिए-

ताप, दाब, आवेग, समय, शक्ति, पूरी पथ-लंबाई, ऊर्जा, गुरुत्वीय विभव, घर्षण गुणांक, आवेश।

3.4 कारण सहित बताइए कि अदिश तथा सदिश राशियों के साथ क्या निम्नलिखित बीजगणितीय संक्रियाएँ अर्थपूर्ण हैं?

(a) दो अदिशों को जोड़ना, (b) एक ही विमाओं के एक सदिश व एक अदिश को जोड़ना, (c) एक सदिश को एक अदिश से गुणा करना, (d) दो अदिशों का गुणन, (e) दो सदिशों को जोड़ना, (f) एक सदिश के घटक को उसी सदिश से जोड़ना।

3.5 निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण सहित बताइए कि यह सत्य है या असत्य :

(a) किसी सदिश का परिमाण सदैव एक अदिश होता है, (b) किसी सदिश का प्रत्येक घटक सदैव अदिश होता है, (c) किसी कण द्वारा चली गई पथ की कुल लंबाई सदैव विस्थापन सदिश के परिमाण के बराबर होती है, (d) किसी कण की औसत चाल (पथ तय करने में लगे समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लंबाई) समय के समान-अंतराल में कण के औसत वेग के परिमाण से अधिक या उसके बराबर होती है । (e) उन तीन सदिशों का योग जो एक समतल में नहीं हैं, कभी भी शून्य सदिश नहीं होता ।

3.6 निम्नलिखित असमिकाओं की ज्यामिति या किसी अन्य विधि द्वारा स्थापना कीजिए :

(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

© NCERT not to be republished

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

इनमें समिका (समता) का चिह्न कब लागू होता है ?

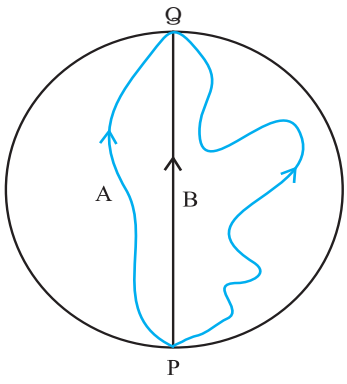
3.7 दिया है $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, नीचे दिए गए कथनों में से कौन-सा सही है :

(a) **a, b, c** तथा **d** में से प्रत्येक शून्य सदिश है,

(b) **(a + c)** का परिमाण **(b + d)** के परिमाण के बराबर है,

(c) **a** का परिमाण **b, c** तथा **d** के परिमाणों के योग से कभी भी अधिक नहीं हो सकता,

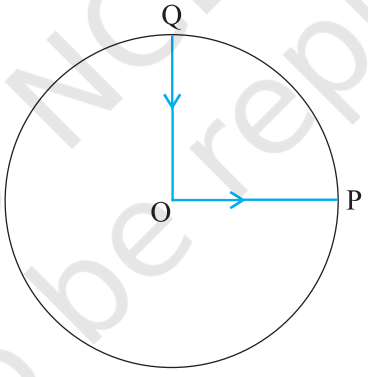
(d) यदि **a** तथा **d** संरेखीय नहीं हैं तो **b + c** अवश्य ही **a** तथा **d** के समतल में होगा, और यह **a** तथा **d** के अनुदिश होगा यदि वे संरेखीय हैं ।



चित्र 3.19

3.8 तीन लड़कियाँ 200 m त्रिज्या वाली वृत्तीय बर्फीली सतह पर स्केटिंग कर रही हैं । वे सतह के किनारे के बिंदु P से स्केटिंग शुरू करती हैं तथा P के व्यासीय विपरीत बिंदु Q पर विभिन्न पथों से होकर पहुँचती हैं जैसा कि चित्र 3.19 में दिखाया गया है । प्रत्येक लड़की के विस्थापन सदिश का परिमाण कितना है ? किस लड़की के लिए यह वास्तव में स्केट किए गए पथ की लंबाई के बराबर है ।

3.9 कोई साइकिल सवार किसी वृत्तीय पार्क के केंद्र O से चलना शुरू करता है तथा पार्क के किनारे P पर पहुँचता है। पुनः वह पार्क की परिधि के अनुदिश साइकिल चलाता हुआ QO के रास्ते (जैसा चित्र 3.20 में दिखाया गया है) केंद्र पर वापस आ जाता है । पार्क की त्रिज्या 1 km है । यदि पूरे चक्कर में 10 मिनट लगते हों तो साइकिल सवार का (a) कुल विस्थापन, (b) औसत वेग, तथा (c) औसत चाल क्या होगी?



चित्र 3.20

3.10 किसी खुले मैदान में कोई मोटर चालक एक ऐसा रास्ता अपनाता है जो प्रत्येक 500 m के बाद उसके बाईं ओर 60° के कोण पर मुड़ जाता है। किसी दिए मोड़ से शुरू होकर मोटर चालक का तीसरे, छठे व आठवें मोड़ पर विस्थापन बताइए। प्रत्येक स्थिति में मोटर चालक द्वारा इन मोड़ों पर तय की गई कुल पथ-लंबाई के साथ विस्थापन के परिमाण की तुलना कीजिए।

3.11 कोई यात्री किसी नए शहर में आया है और वह स्टेशन से किसी सीधी सड़क पर स्थित किसी होटल तक जो 10 km दूर है, जाना चाहता है। कोई बेईमान टैक्सी चालक 23 km के चक्करदार रास्ते से उसे ले जाता है और 28 मिनट में होटल में पहुँचता है।

(a) टैक्सी की औसत चाल, और (b) औसत वेग का परिमाण क्या होगा? क्या वे बराबर हैं?

3.12 किसी लंबे हाल की छत 25 m ऊंची है । वह अधिकतम क्षैतिज दूरी कितनी होगी जिसमें 40 m s^{-1} की चाल से फेंकी गई कोई गेंद छत से टकराए बिना गुजर जाए ?

© NCERT not to be republished

3.13 क्रिकेट का कोई खिलाड़ी किसी गेंद को 100 m की अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है । वह खिलाड़ी उसी गेंद को जमीन से ऊपर कितनी ऊंचाई तक फेंक सकता है ?

3.14 80 cm लंबे धागे के एक सिरे पर एक पत्थर बाँधा गया है और इसे किसी एकसमान चाल के साथ किसी क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है । यदि पत्थर 25 s में 14 चक्कर लगाता है तो पत्थर के त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा क्या होगी ?

3.15 कोई वायुयान 900 km h^{-1} की एकसमान चाल से उड़ रहा है और 1.00 km त्रिज्या का कोई क्षैतिज लूप बनाता है । इसके अभिकेंद्र त्वरण की गुरुत्वीय त्वरण के साथ तुलना कीजिए ।

3.16 नीचे दिए गए कथनों को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण देकर बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य :

(a) वृत्तीय गति में किसी कण का नेट त्वरण हमेशा वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केंद्र की ओर होता है ।

(b) किस बिंदु पर किसी कण का वेग सदिश सदैव उस बिंदु पर कण के पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है।

(c) किसी कण का एकसमान वृत्तीय गति में एक चक्र में लिया गया औसत त्वरण सदिश एक शून्य सदिश होता है।

3.17 किसी कण की स्थिति सदिश निम्नलिखित है :

$\mathbf{r} = (3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\hat{\mathbf{j}} + 4.0\hat{\mathbf{k}})\,\text{m}$

समय t सेकंड में है तथा सभी गुणकों के मात्रक इस प्रकार से हैं कि $\mathbf{r}$ में मीटर में व्यक्त हो जाए ।

(a) कण का $\mathbf{v}$ तथा $\mathbf{a}$ निकालिए,

(b) $t = 2.0$ s पर कण के वेग का परिमाण तथा दिशा कितनी होगी ?

3.18 कोई कण $t = 0$ क्षण पर मूल बिंदु से $10\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m s}^{-1}$ के वेग से चलना प्रारंभ करता है तथा x-y समतल में एकसमान त्वरण $(8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m s^{-2} से गति करता है ।

(a) किस क्षण कण का x-निर्देशांक 16 m होगा ? इसी समय इसका y-निर्देशांक कितना होगा ?

(b) इस क्षण कण की चाल कितनी होगी ?

3.19 $\hat{\mathbf{i}}$ व $\hat{\mathbf{j}}$ क्रमशः x- व y-अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश हैं । सदिशों $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण तथा दिशा क्या होगा ? सदिश $\mathbf{A}=2\,\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}$ के $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$ व $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ के दिशाओं के अनुदिश घटक निकालिए। [आप ग्राफी विधि का उपयोग कर सकते हैं]

3.20 किसी दिक्स्थान पर एक स्वेच्छ गति के लिए निम्नलिखित संबंधों में से कौन-सा सत्य है ?

(a) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = (1/2)\,(\mathbf{v}\,(t_1) + \mathbf{v}\,(t_2))$

(b) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)\,]\,/(t_2 - t_1)$

(c) $\mathbf{v}\,(t) = \mathbf{v}\,(0) + \mathbf{a}\,t$

(d) $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{r}\,(0) + \mathbf{v}\,(0)\,t + (1/2)\,\mathbf{a}\,t^2$

(e) $\mathbf{a}_{\text{औसत}} = [\,\mathbf{v}\,(t_2) - \mathbf{v}\,(t_1)\,]\,/(\,t_2 - t_1)$

यहाँ 'औसत' का आशय समय अंतराल t_2 व t_1 से संबंधित भौतिक राशि के औसत मान से है ।

3.21 निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए तथा कारण एवं उदाहरण सहित बताइए कि क्या यह सत्य है या असत्य :

अदिश वह राशि है जो

(a) किसी प्रक्रिया में संरक्षित रहती है,

(b) कभी ऋणात्मक नहीं होती,

(c) विमाहीन होती है,

(d) किसी स्थान पर एक बिंदु से दूसरे बिंदु के बीच नहीं बदलती,

(e) उन सभी दर्शकों के लिए एक ही मान रखती है चाहे अक्षों से उनके अभिविन्यास भिन्न-भिन्न क्यों न हों ।

3.22 कोई वायुयान पृथ्वी से 3400 m की ऊंचाई पर उड़ रहा है । यदि पृथ्वी पर किसी अवलोकन बिंदु पर वायुयान की 10.0 s की दूरी की स्थितियां 30° का कोण बनाती हैं तो वायुमान की चाल क्या होगी ?

© NCERT not to be republished

11088CH05

अध्याय 4

गति के नियम

4.1 भूमिका
4.2 अरस्तू की भ्रामकता
4.3 जड़त्व का नियम
4.4 न्यूटन का गति का प्रथम नियम
4.5 न्यूटन का गति का द्वितीय नियम
4.6 न्यूटन का गति का तृतीय नियम
4.7 संवेग-संरक्षण
4.8 किसी कण की साम्यावस्था
4.9 यांत्रिकी में सामान्य बल
4.10 वर्तुल (वृत्तीय) गति
4.11 यांत्रिकी में समस्याओं को हल करना

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

4.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमारा संबंध दिक्स्थान में किसी कण की गति का मात्रात्मक वर्णन करने से था। हमने देखा कि एकसमान गति में मात्र वेग की संकल्पना की आवश्यकता थी जबकि असमान गति में त्वरण की अवधारणा की अतिरिक्त आवश्यकता पड़ी। अब तक हमने यह प्रश्न नहीं पूछा है कि पिण्डों की गति का क्या कारण है ? इस अध्याय में हम अपना ध्यान भौतिकी के इस मूल प्रश्न पर केंद्रित करेंगे।

आइए, सबसे पहले हम अपने सामान्य अनुभवों के आधार पर इस प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाएँ। विरामावस्था में पड़ी फुटबाल को गति प्रदान करने के लिए किसी न किसी को उस पर अवश्य ठोकर मारनी होती है । किसी पत्थर को ऊपर की ओर फेंकने के लिए, हमें उसे ऊपर की ओर प्रक्षेपित करना पड़ता है। मंद पवन पेड़ की शाखाओं को झुला देती है; प्रबल वायु का झोंका तो भारी पिण्डों तक को भी लुढ़का सकता है ! बहती नदी किसी के न खेने पर भी नाव को गतिमान कर देती है। स्पष्टत: किसी पिण्ड को विराम से गति में लाने के लिए किसी बाह्य साधन द्वारा बल लगाने की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार गति को रोकने अथवा मंद करने के लिए भी बाह्य बल की आवश्यकता होती है। किसी आनत तल पर नीचे की ओर लुढ़कती किसी गेंद को उसकी गति की विपरीत दिशा में बल लगाकर रोका जा सकता है।

इन उदाहरणों में, बल का बाह्य साधन (हाथ, वायु, जलधारा, आदि) पिण्ड के संपर्क में है। परंतु यह सदैव आवश्यक नहीं है। किसी भवन के शिखर से बिना अधोमुखी धक्का दिये मुक्त किया गया पत्थर पृथ्वी के गुरुत्वीय खिंचाव के कारण त्वरित हो जाता है। कोई छड़ चुंबक लोहे की कीलों को दूर से ही, अपनी ओर आकर्षित कर लेता है। ***यह दर्शाता है कि बाह्य साधन (इन उदाहरणों में गुरुत्वीय एवं चुंबकीय बल) एक दूरी से भी किसी पिण्ड पर बल लगा सकता है।***

संक्षेप में, किसी रुके हुए पिण्ड को गति प्रदान करने तथा गतिमान पिण्ड को रोकने के लिए बल की आवश्यकता होती है, तथा इस बल को प्रदान करने के लिए किसी बाह्य साधन की आवश्यकता होती है। यह बाह्य साधन उस पिण्ड के संपर्क में भी हो सकता है, और नहीं भी।

यहाँ तक तो सब सही है। परंतु तब क्या होता है जब कोई पिण्ड एकसमान गति से चलता है (उदाहरण के लिए, बर्फ के क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल

© NCERT not to be republished

से सीधी रेखा में गतिमान कोई स्केटर) ? ***क्या किसी पिण्ड की एकसमान गति बनाए रखने के लिए कोई बाह्य बल आवश्यक है ?***

4.2 अरस्तू की भ्रामकता

उपरोक्त प्रश्न सरल प्रतीत होता है। तथापि इसका उत्तर देने में कई युग लग गए थे। वस्तुत: सत्रहवीं शताब्दी में गैलीलियो द्वारा दिए गए इस प्रश्न का सही उत्तर न्यूटनी यांत्रिकी का आधार बना जिसने आधुनिक विज्ञान के जन्म का संकेत दिया।

महान ग्रीक विचारक, अरस्तू (384 ई.पू. – 322 ई.पू.) ने यह विचार रखा कि यदि कोई पिण्ड गतिमान है, तो उसे उसी अवस्था में बनाए रखने के लिए कोई न कोई बाह्य साधन अवश्य चाहिए। उदाहरण के लिए, इस विचार के अनुसार किसी धनुष से छोड़ा गया तीर उड़ता रहता है, क्योंकि तीर के पीछे की वायु उसे धकेलती रहती है। यह अरस्तू द्वारा विकसित विश्व में पिण्डों की गतियों से संबंधित विचारों के विस्तृत ढाँचे का एक भाग था। गति के विषय में अरस्तू के अधिकांश विचार अब गलत माने जाते हैं, और उनकी अब चिंता करने की आवश्यकता नहीं है। अपने काम के लिए हम यहाँ अरस्तू के गति के नियम को इस प्रकार लिख सकते हैं : ***किसी पिण्ड को गतिशील रखने के लिए बाह्य बल की आवश्यकता होती है।***

जैसा कि हम आगे देखेंगे, अरस्तू का गति का नियम दोषयुक्त है। तथापि, यह एक स्वाभाविक विचार है, जो कोई भी व्यक्ति अपने सामान्य अनुभवों से रख सकता है। अपनी सामान्य खिलौना कार (अवैद्युत) से फर्श पर खेलती छोटी बालिका भी अपने अंतर्ज्ञान से यह जानती है कि कार को चलती रखने के लिए उस पर बंधी डोरी का स्थायी रूप से कुछ बल लगाकर बराबर खींचना होगा। यदि वह डोरी को छोड़ देती है तो कुछ क्षण बाद कार रुक जाती है। अधिकांश स्थलीय गतियों में यही सामान्य अनुभव होता है। पिण्डों को गतिशील बनाए रखने के लिए बाह्य बलों की आवश्यकता प्रतीत होती है। स्वतंत्र छोड़ देने पर सभी वस्तुएं अंतत: रुक जाती हैं।

फिर अरस्तू के तर्क में क्या दोष है ? इसका उत्तर है : गतिशील खिलौना कार इसलिए रुक जाती है कि फर्श द्वारा कार पर लगने वाला बाह्य घर्षण बल इसकी गति का विरोध करता है। इस बल को निष्फल करने के लिए बालिका को कार पर गति की दिशा में बाह्य बल लगाना पड़ता है। जब कार एकसमान गति में होती है तब उस पर कोई नेट बाह्य बल कार्य नहीं करता; बालिका द्वारा लगाया गया बल फर्श के बल (घर्षण बल) को निरस्त कर देता है। इसका उपप्रमेय है : यदि कोई घर्षण न हो, तो बालिका को खिलौना कार की एकसमान गति बनाए रखने के लिए, कोई भी बल लगाने की आवश्यकता नहीं पड़ती।

प्रकृति में सदैव ही विरोधी घर्षण बल (ठोसों के बीच) अथवा श्यान बल (तरलों के बीच) आदि उपस्थित रहते हैं। यह उन व्यावहारिक अनुभवों से स्पष्ट है जिनके अनुसार वस्तुओं में एकसमान गति बनाए रखने के लिए घर्षण बलों को निष्फल करने हेतु बाह्य साधनों द्वारा बल लगाना आवश्यक होता है। अब हम समझ सकते हैं कि अरस्तू से त्रुटि कहां हुई। उसने अपने इस व्यावहारिक अनुभव को एक मौलिक तर्क का रूप दिया। गति तथा बलों के लिए प्रकृति के यथार्थ नियम को जानने के लिए हमें एक ऐसे आदर्श संसार की कल्पना करनी होगी जिसमें बिना किसी विरोधी घर्षण बल लगे एकसमान गति का निष्पादन होता है। यही गैलीलियो ने किया था।

4.3 जड़त्व का नियम

गैलीलियो ने वस्तुओं की गति का अध्ययन एक आनत समतल पर किया था। किसी (i) आनत समतल पर नीचे की ओर गतिमान वस्तुएं त्वरित होती हैं जबकि (ii) तल पर ऊपर की ओर जाने वाली वस्तुओं में मंदन होता है। क्षैतिज समतल पर गति (iii) इन दोनों के बीच की स्थिति है। गैलीलियो ने यह निष्कर्ष निकाला कि किसी घर्षण रहित क्षैतिज समतल पर गतिशील किसी वस्तु में न तो त्वरण होना चाहिए और न ही मंदन, अर्थात् इसे एकसमान वेग से गति करनी चाहिए (चित्र 4.1 (a))।

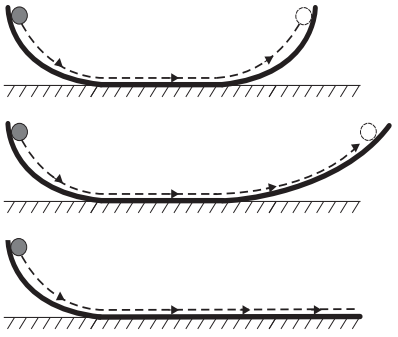
गैलीलियो के एक अन्य प्रयोग जिसमें उन्होंने द्विआनत समतल का उपयोग किया, से भी यही निष्कर्ष निकलता है। एक आनत समतल पर विरामावस्था से छोड़ी गई गेंद नीचे लुढ़कती है और दूसरे आनत समतल पर ऊपर चढ़ती है। यदि दोनों आनत समतलों के पृष्ठ अधिक रुक्ष नहीं हैं तो गेंद की अंतिम ऊंचाई उसकी आरंभिक ऊंचाई के लगभग समान (कुछ कम, परंतु अधिक कभी नहीं) होती है। आदर्श स्थिति में, जब घर्षण बल पूर्णत: विलुप्त कर दिया जाता है, तब गेंद की अंतिम ऊंचाई उसकी आरंभिक ऊंचाई के समान होनी चाहिए।



चित्र 4.1 (a)

अब यदि दूसरे समतल के ढाल को घटाकर प्रयोग को दोहराएं, तो फिर भी गेंद उसी ऊंचाई तक पहुंचेगी, परंतु ऐसा करने पर वह अधिक दूरी चलेगी। सीमान्त स्थिति में, जब दूसरे समतल का ढाल शून्य है (अर्थात् वह क्षैतिज समतल है) तब गेंद अनन्त दूरी तक चलती है। दूसरे शब्दों में इसकी गति कभी नहीं रुकेगी। नि:संदेह यह एक आदर्श स्थिति है (चित्र 4.1 (b))। व्यवहार में गेंद क्षैतिज समतल पर एक परिमित दूरी तक चलने के बाद बाह्य विरोधी घर्षण बल जिसे पूर्ण रूप से विलुप्त नहीं किया जा सकता, के कारण विराम में आ जाती है। तथापि निष्कर्ष स्पष्ट है : यदि घर्षण न होता तो गेंद क्षैतिज समतल पर एकसमान वेग से निरंतर चलती रहती।

© NCERT not to be republished



चित्र 4.1 (b) द्विआनत समतल पर गति के प्रेक्षणों से गैलीलियो ने जड़त्व का नियम अनुमानित किया।

इस प्रकार गैलीलियो को गति के संबंध में एक नई अंतर्दृष्टि प्राप्त हुई, जो अरस्तू तथा उनके अनुयायिओं को समझ में नहीं आई। गतिकी में विरामावस्था तथा एकसमान रैखिक गति की अवस्था (अर्थात् एकसमान वेग से गति) तुल्य होती हैं। दोनों ही प्रकरणों में पिण्ड पर कोई नेट बल नहीं लगता। यह सोचना त्रुटिपूर्ण है कि किसी पिण्ड की एकसमान गति के लिए उस पर कोई नेट बल लगाना आवश्यक है। किसी पिण्ड को एकसमान गति में बनाए रखने के लिए हमें घर्षण बल को निष्फल करने के लिए एक बाह्य बल लगाने की आवश्यकता होती है ताकि पिण्ड पर लगे दोनों बाह्य बलों का नेट बाह्य बल शून्य हो जाए।

सारांश में, यदि नेट बाह्य बल शून्य है तो विराम अवस्था में रह रहा पिण्ड विरामावस्था में ही रहता है और गतिशील पिण्ड निरंतर एकसमान वेग से गतिशील रहता है। वस्तु के इस गुण को जड़त्व कहते हैं। जड़त्व से तात्पर्य है ***"परिवर्तन के प्रति प्रतिरोध"***। कोई पिण्ड अपनी विरामावस्था अथवा एकसमान गति की अवस्था में तब तक कोई परिवर्तन नहीं करता जब तक कोई बाह्य बल उसे ऐसा करने के लिए विवश नहीं करता।

4.4 न्यूटन का गति का प्रथम नियम

गैलीलियो की सरल परंतु क्रांतिकारी धारणाओं ने अरस्तू की यांत्रिकी को पूर्णतया नकार दिया। अब एक नई यांत्रिकी का विकास किया जाना था। विशिष्ट रूप से, इस कार्य को सर आइजक न्यूटन ने जिन्हें सभी युगों का महानतम वैज्ञानिक माना जाता है, लगभग अकेले ही संपन्न किया।

न्यूटन ने गैलीलियो की धारणाओं के आधार पर गति के तीन नियमों जो उनके नाम से जाने जाते हैं, के रूप में एक यांत्रिकी की आधारशिला रखी। गैलीलियो का जड़त्व का नियम उसका आरंभ बिंदु था जिसका न्यूटन ने ***'गति के प्रथम नियम'*** के रूप में संरूपण किया :

"प्रत्येक पिण्ड तब तक अपनी विरामावस्था अथवा सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में रहता है जब तक कोई बाह्य बल उसे अन्यथा व्यवहार करने के लिए विवश नहीं करता।"

अब विरामावस्था अथवा एकसमान रैखिक गति दोनों ही में "शून्य त्वरण" समाविष्ट है। अतः गति के प्रथम नियम को, सरल शब्दों में, इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है :

यदि किसी पिण्ड पर लगने वाला नेट बाह्य बल शून्य है, तो उसका त्वरण शून्य होता है। शून्येतर त्वरण केवल तभी हो सकता है जब पिण्ड पर कोई नेट बाह्य बल लगता हो।

व्यवहार में इस नियम के अनुप्रयोग से हमें दो प्रकार की स्थितियों से सामना करना होता है। कुछ उदाहरणों में तो हम यह जानते हैं कि वस्तु पर नेट बाह्य बल शून्य होता है। उसमें हम यह निष्कर्ष

प्राचीन भारतीय विज्ञान में गति संबंधी धारणाएँ

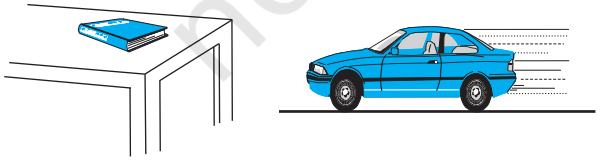
प्राचीन भारतीय विचारकों ने भी गति संबंधी धारणाओं की एक विस्तृत प्रणाली विकसित कर ली थी। बल जो गति का कारण है, भिन्न प्रकार का माना गया : सतत दाब के कारण बल (जिसे नोदन कहा गया) जैसे जल-यात्रा करते पाल-यानों पर लगने वाला पवन का बल; संघट्ट (अभिघात) जो कुम्भकार द्वारा चाक को छड़ से घुमाने पर लगता है; सरल रैखिक गति (वेग) के लिए अथवा प्रत्यास्थ पिण्डों में आकृति के प्रत्यानयन की दीर्घस्थायी प्रवृत्ति (संस्कार); डोरी, छड़ आदि से संचारित बल। गति के '**वैशेषिका**' सिद्धांत में वेगों की संकल्पना कदाचित जड़त्व की संकल्पना के समीपस्थ है। वेग, सरल रेखा में चलने की प्रवृत्ति का विरोध संपर्क में आने वाली वस्तुओं जिनमें वायुमण्डल भी शामिल है, के द्वारा होता है ऐसा माना गया। यह घर्षण तथा वायु-प्रतिरोध के विचार के समान विचार है। उनका यह अनुमान सही था कि पिण्डों की विभिन्न प्रकार की गतियां (स्थानांतरीय, घूर्णी तथा कंपन) उस पिण्ड के अवयवी कणों की केवल स्थानांतरीय गति के कारण ही उत्पन्न होती हैं। पवन में गिरती किसी पत्ती की कुल मिलाकर अधोमुखी गति (**पतन**) हो सकती है और साथ ही उसमें घूर्णी तथा कंपन गति (भ्रमण, स्पंदन) भी हो सकती हैं, परंतु किसी क्षण उस पत्ती के प्रत्येक कण में केवल एक निश्चित (लघु) विस्थापन होता है। गति की माप तथा लंबाई एवं समय के मात्रकों के विषय में भारतीय चिन्तन में यथेष्ट बल दिया गया। यह ज्ञात था कि दिक्स्थान में किसी कण की स्थिति को उसकी तीन अक्षों से दूरियां मापकर निर्दिष्ट किया जा सकता था। भास्कर (1150 ई.) ने तात्क्षणिक गति (**तात्कालिकी गति**) की अवधारणा प्रस्तावित की जिससे अवकल गणित के प्रयोग द्वारा तात्क्षणिक वेग की आधुनिक संकल्पना का पूर्वज्ञान हुआ। तरंग तथा धारा (जल की) के बीच अंतर को भली-भांति समझा जा चुका था; धारा गुरुत्व तथा तरलता के अंतर्गत जल कणों की गति है जबकि तरंग जल कणों के कंपन के संचरण का परिणाम है।

© NCERT not to be republished

निकाल सकते हैं कि वस्तु का त्वरण शून्य है। उदाहरण के लिए, अंतरा तारकीय आकाश में सभी गुरुत्वीय वस्तुओं से बहुत दूर किसी अंतरिक्षयान, जिसके सभी राकेट बंद किए जा चुके हों, पर कोई नेट बाह्य बल कार्यरत नहीं होता। गति के प्रथम नियम के अनुसार इसका त्वरण शून्य होना चाहिए। यदि यह गति में है, तो इसे एकसमान वेग से गतिशील रहना चाहिए।

तथापि, बहुधा हमें आरम्भ में सभी बलों का ज्ञान नहीं होता । उस अवस्था में, यदि हमें यह ज्ञात हो कि कोई वस्तु अत्वरित है (अर्थात् वह वस्तु या तो विरामावस्था में है अथवा एकसमान रैखिक गति में है) तब हम गति के प्रथम नियम के आधार पर यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उस वस्तु पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए। गुरुत्व हर स्थान पर है। विशेष रूप से, पार्थिव परिघटनाओं में, पृथ्वी पर स्थित सभी वस्तुएं पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण का अनुभव करती हैं। साथ ही, गतिशील वस्तुएं सदैव ही घर्षण बल, श्यान कर्षण आदि का अनुभव करती हैं । तब यदि पृथ्वी पर स्थित कोई वस्तु विरामावस्था अथवा एकसमान रैखिक गति में हो, तब ऐसा होने का कारण यह नहीं है कि उस पर कोई बल कार्यरत नहीं है, वरन् उस पर कार्यरत विभिन्न बाह्य बल एक दूसरे को निरस्त करके सभी बलों के योग को 'शून्य नेट बाह्य बल' बनाते हैं।

अब मेज पर विराम अवस्था में रखी एक पुस्तक पर विचार करते हैं (चित्र 4.2(a))। इस पुस्तक पर दो बाह्य बल कार्यरत हैं : गुरुत्वीय बल (अर्थात् पुस्तक का भार W) नीचे की दिशा में कार्यरत है तथा मेज द्वारा पुस्तक पर ऊपर की दिशा में अभिलंब बल R कार्यरत है। R स्वयं समायोजित होने वाला बल है । यह ऊपर वर्णित दूसरी प्रकार की स्थिति का उदाहरण है। बलों के बारे में तो पूर्ण ज्ञान नहीं है परंतु गति की अवस्था ज्ञात है। हम पुस्तक को विराम की स्थिति में देखते हैं। अतः गति के प्रथम नियम के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि R का परिमाण W के परिमाण के समान है। हमारा प्रायः इस प्रकथन से समागम होता है ; "चूंकि $W = R$, बल एक दूसरे को निरस्त करते हैं, इसीलिए पुस्तक विराम की स्थिति में है"। यह विवेक के विपरीत है। सही प्रकथन यह होना चाहिए: "चूंकि पुस्तक विराम में दिखाई देती है"; गति के प्रथम नियम के अनुसार इस पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए। इसका तात्पर्य है कि अभिलंब R पुस्तक के भार W के समान तथा विपरीत होना चाहिए।



(a) (b)

चित्र 4.2 (a) मेज पर विराम में रखी पुस्तक तथा (b) एकसमान वेग से गतिमान कार, इन दोनों ही प्रकरणों में नेट बाह्य बल शून्य है ।

अब हम एक कार की गति पर विचार करते हैं जिसमें वह कार विराम से गति आरंभ करके अपनी चाल में वृद्धि करती है और फिर चिकनी सीधी सड़क पर पहुंचकर एकसमान वेग से गति करती है (चित्र 4.2 (b))। जब यह विराम में होती है तब उस पर कोई नेट बल नहीं होता। चाल में वृद्धि के समय इसमें त्वरण होता है। ऐसा नेट बाह्य बल के कारण होना चाहिए। ध्यान दें, यह एक बाह्य बल ही होना चाहिए। कार के त्वरण के लिए किसी भी आंतरिक बल को उत्तरदायी नहीं माना जा सकता। सुनने में यह अद्भुत लग सकता है, परंतु यह सत्य है। सड़क के अनुदिश विचारणीय बल घर्षण बल ही है। सब बातों पर विचार करने के उपरांत यही निष्कर्ष निकलता है कि कार की गति में त्वरण का कारण घर्षण बल ही है (घर्षण के विषय में आप अनुभाग 4.9.1 में पढ़ेंगे)। जब कार एक समान वेग से गति करती है तब उस पर कोई नेट बाह्य बल नहीं होता।

गति के प्रथम नियम में निहित जड़त्व का गुण बहुत-सी स्थितियों में प्रत्यक्ष दिखाई पड़ता है। मान लीजिए हम किसी रुकी हुई बस में असावधानी से खड़े हैं और यकायक ड्राइवर बस को चला देता है। हम झटके के साथ पीछे की ओर गिर पड़ते हैं। क्यों ? हमारे पैर बस के फर्श को स्पर्श कर रहे होते हैं। यदि घर्षण न होता, तो हम वहीं रहते जहां पहले थे जबकि हमारे पैरों के नीचे बस का फर्श केवल आगे की दिशा में सरकता और बस का पीछे का भाग हमसे आकर टकराता। परंतु सौभाग्यवश, हमारे पैर और फर्श के बीच कुछ घर्षण होता है। यदि बस की पिक-अप अति आकस्मिक नहीं है, अर्थात् त्वरण साधारण है तो घर्षण बल हमारे पैरों को बस के साथ त्वरित करने के लिए पर्याप्त होगा। परंतु वस्तुतः हमारा शरीर एक दृढ़ पिण्ड नहीं है। इसमें विरूपण हो सकता है, अर्थात् इसके विभिन्न भागों के बीच आपेक्ष विस्थापन संभव है । इसका तात्पर्य यह हुआ कि जब हमारे पैर बस के साथ आगे बढ़ते हैं, तो शरीर का शेष भाग जड़त्व के कारण वहीं रहता है। इसीलिए, बस के आपेक्ष हम पीछे की ओर फेंक दिए जाते हैं। जैसे ही यह घटना घटती है, शरीर के शेष भागों पर पेशीय बल (पैरों के द्वारा) कार्य करने लगते हैं, जो शरीर के शेष भाग को पैरों के साथ गति कराते हैं। इसी प्रकार की घटना तीव्र गति से चलती बस के यकायक रुकने पर घटती है। हमारे पैर घर्षण के कारण रुक जाते हैं, क्योंकि घर्षण बल पैरों तथा बस के फर्श के बीच आपेक्ष गति नहीं होने देता। परंतु शरीर का शेष भाग, जड़त्व के कारण, आगे की ओर गति करता रहता है। परिणामस्वरूप हम आगे की ओर फेंक दिए जाते हैं। प्रत्यानयनी पेशीय बलों के कार्यरत होने के कारण शरीर विराम अवस्था में आ जाती है।

> ***उदाहरण 4.1*** कोई अंतरिक्षयात्री अंतरातारकीय आकाश में 100 $m\ s^{-2}$ की एकसमान दर से त्वरित अपने अंतरिक्षयान से दुर्घटनावश बाहर फेंक दिया जाता है । जिस क्षण अंतरिक्षयात्री अंतरिक्षयान से बाहर आ जाता है, उसके तुरंत पश्चात् अंतरिक्षयात्री का त्वरण क्या है ? (मान लीजिए कि यात्री पर गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करने के लिए उसके निकट कोई तारा नहीं है)।

© NCERT not to be republished

हल जिस क्षण वह यात्री यान से बाहर आता है, उसी क्षण से अंतरिक्षयात्री पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं रहता क्योंकि हमने यह माना है कि यात्री पर गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करने के लिए उसके निकट कोई तारा नहीं हैं तथा अंतरिक्ष यान छोटा होने के कारण इसके द्वारा यात्री पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल उपेक्षणीय है। गति के प्रथम नियम के अनुसार अंतरिक्षयात्री का त्वरण शून्य है। ◀

4.5 न्यूटन का गति का द्वितीय नियम

गति का प्रथम नियम उस साधारण प्रकरण से संबंध रखता है जिसमें किसी पिण्ड पर नेट बाह्य बल शून्य है। गति का द्वितीय नियम उन व्यापक स्थितियों से संबंध रखता है, जिनमें पिण्ड पर कोई नेट बाह्य बल लग रहा हो। यह नियम नेट बाह्य बल और पिण्ड के त्वरण में संबंध दर्शाता है।

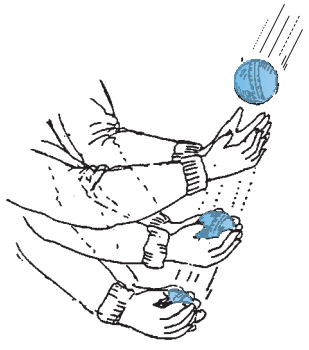
संवेग

किसी पिण्ड के संवेग को उसकी संहति m तथा वेग $\mathbf{v}$ के गुणनफल द्वारा पारिभाषित किया जाता है। इसे $\mathbf{p}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (4.1)$$

स्पष्ट रूप से संवेग एक सदिश राशि है। दैनिक जीवन के निम्नलिखित साधारण अनुभवों में पिण्डों की गतियों पर बलों के प्रभाव पर विचार करते समय हमें संवेग के महत्त्व का पता चलता है।

- मान लीजिए एक कम भार का वाहन (जैसे छोटी कार) तथा एक अधिक भार का वाहन (जैसे सामान से लदा ट्रक) दोनों ही किसी क्षैतिज सड़क पर खड़े हैं। हम सभी भलीभांति जानते हैं कि समान समय अंतराल में दोनों वाहनों को समान चाल से गति कराने में कार की तुलना में ट्रक को धकेलने के लिए अपेक्षाकृत अधिक बल की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार, यदि एक हलका पिण्ड तथा एक भारी पिण्ड दोनों समान चाल से गतिमान हैं, तो समान समय अंतराल में दोनों पिण्डों को रोकने में हलके पिण्ड की तुलना में भारी पिण्ड में अपेक्षाकृत अधिक परिमाण के विरोधी बल की आवश्यकता होती है ।
- यदि दो पत्थर, एक हलका तथा दूसरा भारी, एक ही भवन के शिखर से गिराए जाते हैं, तो धरती पर खड़े किसी व्यक्ति के लिए भारी पत्थर की तुलना में हलके पत्थर को लपकना आसान होता है। इस प्रकार किसी पिण्ड की संहति एक महत्त्वपूर्ण प्राचल है जो गति पर बल के प्रभाव को निर्धारित करता है।
- विचार करने योग्य एक अन्य महत्त्वपूर्ण प्राचल है– चाल । बंदूक से छोड़ी गई कोई गोली रुकने से पूर्व मानव ऊतक को आसानी से वेध सकती है, फलस्वरूप दुर्घटना हो जाती है। यदि उसी गोली को साधारण चाल से फेंकें तो अधिक क्षति नहीं होती। अत: किसी दी गई संहति के लिए यदि चाल अधिक हो तो उसे एक निश्चित समय अंतराल में रोकने के लिए अधिक परिमाण के विरोधी बल की आवश्यकता होती है। साथ-साथ लेने पर, संहति और वेग का गुणनफल, अर्थात संवेग, प्रत्यक्ष रूप से गति का एक प्रासंगिक चर है । यदि अधिक संवेग परिवर्तन की आवश्यकता है तो लगाने के लिए अधिक परिमाण के बल की आवश्यकता होगी।
- क्रिकेट का कोई अभ्यस्त खिलाड़ी तीव्र गति से आती गेंद को एक नौसिखिया खिलाड़ी की तुलना में कहीं अधिक आसानी से लपक लेता है जबकि नौसिखिया खिलाड़ी उसी गेंद को लपकने में हाथों में चोट खा लेता है। इसका एक कारण यह है कि अभ्यस्त खिलाड़ी, अपने हाथों से गेंद को लपक कर, उसे रोकने में अधिक समय लगाता है । आपने ध्यान दिया होगा कि अभ्यस्त खिलाड़ी गेंद को लपकने की क्रिया में अपने हाथों को पीछे की ओर खींचता है (चित्र 4.3)। जबकि नौसिखिया खिलाड़ी अपने हाथों को स्थिर रखता है तथा गेंद को लगभग तत्क्षण ही लपकने का प्रयास करता है। गेंद को तत्क्षण रोकने के लिए उसे अपेक्षाकृत काफी अधिक बल लगाना पड़ता है फलस्वरूप उसके हाथों में चोट लग जाती है। इससे निष्कर्ष निकलता है : बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि कितनी तीव्रता से यह परिवर्तन किया जाता है। समान संवेग परिवर्तन यदि अपेक्षाकृत कम समय में किया जाता है, तो अपेक्षाकृत अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है । संक्षेप में, संवेग परिवर्तन की दर अधिक है, तो बल अधिक होता है ।



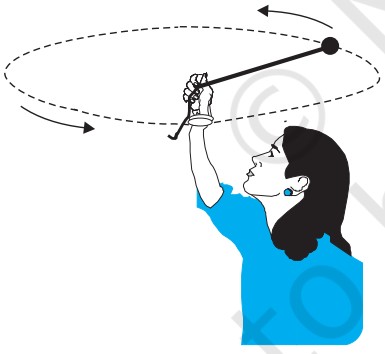
चित्र 4.3 बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वरन् वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि यह परिवर्तन कितनी तीव्रता से किया जाता है । एक अभ्यस्त खिलाड़ी गेंद लपकते समय अपने हाथों को पीछे की ओर खींचता है जिससे गेंद को रोकने में अधिक समय लगता है, जिसके लिए अपेक्षाकृत कम बल की आवश्यकता होती है ।

- एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण प्रेक्षण इस तथ्य की पुष्टि करता है कि संहति तथा वेग का गुणनफल (अर्थात् संवेग) ही गति पर बल के प्रभाव का मूल है। मान लीजिए, विभिन्न संहतियों के दो पिण्डों, जो आरंभ में विराम में हैं, पर कोई निश्चित बल

© NCERT not to be republished

एक निश्चित समय अंतराल के लिए लगाया जाता है। हलका पिण्ड, अपेक्षानुसार, भारी पिण्ड की तुलना में अधिक चाल ग्रहण कर लेता है। परंतु, समय अंतराल के अंत में, प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि, प्रत्येक पिण्ड समान संवेग उपार्जित करता है। इस प्रकार, ***समान समय के लिए लगाया गया समान बल विभिन्न पिण्डों में समान संवेग परिवर्तन करता है।*** यह गति के द्वितीय नियम का प्रामाणिक मार्गदर्शक सिद्धांत है।

- पिछले प्रेक्षणों में संवेग का सदिश चरित्र अर्थपूर्ण नहीं रहा है। अब तक के उदाहरणों में, संवेग परिवर्तन तथा संवेग समान्तर दिशाओं में हैं। परंतु सदैव ऐसा नहीं होता। मान लीजिए, किसी डोरी द्वारा एक पत्थर को क्षैतिज समतल में एकसमान चाल से घुमाया जाता है । इसमें संवेग का परिमाण स्थिर रहता है, परंतु इसकी दिशा निरन्तर परिवर्तित होती है (चित्र 4.4)। संवेग सदिश में यह परिवर्तन करने के लिए बल की आवश्यकता होती है। यह बल डोरी से होकर पत्थर को हमारे हाथों द्वारा प्रदान किया जाता है। अनुभवों से यह संकेत मिलता है कि यदि पत्थर को अपेक्षाकृत अधिक चाल तथा/अथवा छोटी त्रिज्या के वृत्त में घुमाया जाए तो हमारे हाथों द्वारा अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है। यह अधिक त्वरण अथवा संवेग सदिश में तुल्यांकी अधिक परिवर्तन के तदनुरूपी होता है। इससे यह संकेत मिलता है कि संवेग सदिश में अधिक परिवर्तन के लिए अधिक बल लगाना होता है।



चित्र 4.4 संवेग का परिमाण स्थिर रहने पर भी संवेग की दिशा में परिवर्तन के लिए बल आवश्यक है । इसका अनुभव हम डोरी द्वारा किसी पत्थर को एकसमान चाल से वृत्त में घुमाकर कर सकते हैं ।

ये गुणात्मक प्रेक्षण हमें गति के द्वितीय नियम की ओर ले जाते हैं, जिसे न्यूटन ने इस प्रकार व्यक्त किया था :

किसी पिण्ड के संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होती है तथा उसी दिशा में होती है जिस दिशा में बल कार्य करता है।

इस प्रकार यदि m संहति के किसी पिण्ड पर कोई बल $\mathbf{F}$ समय अंतराल Δt तक लगाने पर उस पिण्ड के वेग में $\mathbf{v}$ से $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ का परिवर्तन हो जाता है, अर्थात् पिण्ड के प्रारंभिक संवेग $m\mathbf{v}$ में $\Delta(m\mathbf{v})$ का परिवर्तन हो जाता है। तब गति के द्वितीय नियम के अनुसार,

$$\mathbf{F} \propto \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad \text{अर्थात्} \quad \mathbf{F} = k\,\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

यहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है। यदि $\Delta t \to 0$, पद $\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$, t के आपेक्ष $\mathbf{p}$ का अवकलज अथवा अवकल गुणांक बन जाता है, जिसे $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। इस प्रकार,

$$\mathbf{F} = k\frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{4.2}$$

किसी स्थिर संहति m के पिण्ड के लिए

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\,\mathbf{a} \tag{4.3}$$

अर्थात्, द्वितीय नियम को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\mathbf{F} = k\,m\,\mathbf{a} \tag{4.4}$$

जो यह दर्शाता है कि बल $\mathbf{F}$, संहति m तथा त्वरण $\mathbf{a}$ के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती होता है।

हमने बल के मात्रक की अब तक परिभाषा नहीं दी है । वास्तव में, बल के मात्रक की परिभाषा देने के लिए हम समीकरण (4.4) का उपयोग करते हैं। अत: हम k के लिए कोई भी नियत मान चुनने के लिए स्वतंत्र हैं। सरलता के लिए, हम $k = 1$ चुनते हैं। तब द्वितीय नियम हो जाता है,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\,\mathbf{a} \tag{4.5}$$

SI मात्रकों में, एक मात्रक बल वह होता है जो 1kg के पिण्ड में $1\,\text{m s}^{-2}$ का त्वरण उत्पन्न कर देता है। इस मात्रक बल को न्यूटन कहते हैं। इसका प्रतीक N है। $1\text{N} = 1\text{kg m s}^{-2}$।

इस स्थिति में हमें गति के द्वितीय नियम के कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदुओं पर ध्यान देना है :

1. गति के द्वितीय नियम में $\mathbf{F} = 0$ से यह उपलक्षित होता है कि $\mathbf{a} = 0$। प्रत्यक्ष रूप से द्वितीय नियम प्रथम नियम के अनुरूप है।
2. गति का द्वितीय नियम एक सदिश नियम है। यह, वास्तव में, तीन समीकरणों के तुल्य है, सदिशों के प्रत्येक घटक के लिए एक समीकरण :

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = ma_x$$

© NCERT not to be republished

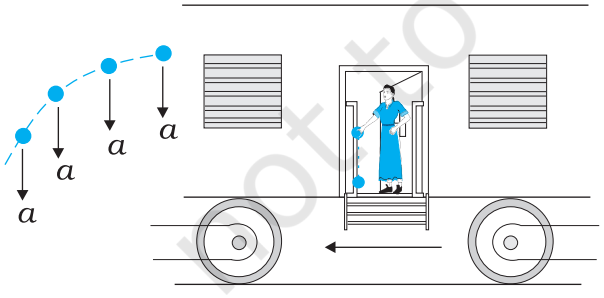
$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = ma_y$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = ma_z \qquad (4.6)$$

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि कोई बल पिण्ड के वेग के समान्तर नहीं है, वरन् उससे कोई कोण बनाता है, तब वह केवल बल की दिशा में वेग के घटक को परिवर्तित करता है। बल के अभिलंबवत् वेग का घटक अपरिवर्तित रहता है। उदाहरण के लिए, ऊर्ध्वाधर गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन किसी प्रक्षेप्य की गति में वेग का क्षैतिज घटक अपरिवर्तित रहता है (चित्र 4.5)।

3. समीकरण (4.5) से प्राप्त गति का द्वितीय नियम वस्तुतः, एकल बिंदु कण पर लागू होता है। नियम में **F** कण पर लगे नेट बाह्य बल तथा **a** कण के त्वरण के लिए प्रयुक्त हुआ है । तथापि इस नियम को इसी रूप में दृढ़ पिण्डों अथवा, यहाँ तक कि व्यापक रूप में कणों के निकाय पर भी लागू किया जाता है। उस अवस्था में, **F** का उल्लेख निकाय पर लगे कुल बल तथा **a** का उल्लेख समस्त निकाय के त्वरण के लिए होता है। अधिक यथार्थता से, **a** निकाय के संहति केंद्र का त्वरण है जिसके बारे में हम अध्याय 6 में विस्तार से पढ़ेंगे। **निकाय में किन्हीं भी आंतरिक बलों को F में सम्मिलित नहीं किया जाता है।**

4. गति का द्वितीय नियम एक स्थानीय संबंध है। इसका यह अर्थ है कि समय के किसी निश्चित क्षण पर समष्टि में किसी बिंदु (कण की अवस्थिति) पर लगा बल **F** उसी क्षण उसी बिंदु पर त्वरण **a** से संबंधित है। अर्थात् 'किसी कण के त्वरण का निर्धारण उसी समय उस पर लगे बल द्वारा किया जाता है, ***कण की गति के किसी भी इतिहास द्वारा नहीं (चित्र 4.5 देखें)।***



चित्र 4.5 किसी क्षण पर त्वरण का निर्धारण उसी क्षण के बल द्वारा किया जाता है । किसी त्वरित रेलगाड़ी से कोई पत्थर बाहर डालने के क्षण के तुरंत पश्चात्, यदि वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानें तो, उस पत्थर पर कोई क्षैतिज त्वरण अथवा बल कार्यरत नहीं होता । कुछ क्षण पूर्व पत्थर पर रेलगाड़ी के त्वरण का प्रभाव अब पूर्णतया समाप्त हो जाता है।

उदाहरण 4.2 90 m s^{-1} चाल से गतिमान 0.04 kg संहति की कोई गोली लकड़ी के भारी गुटके में धँसकर 60 cm दूरी चलकर रुक जाती है । गुटके द्वारा गोली पर लगने वाला औसत अवरोधी बल क्या है ?

हल गोली का मंदन (नियत मानते हुए)

$$a = \frac{-u^2}{2s} = \frac{-90 \times 90}{2 \times 0.6}\ \text{m s}^{-2} = -6750\ \text{m s}^{-2}$$

गति के द्वितीय नियम के द्वारा, मंदन बल

$$= 0.04\ \text{kg} \quad 6750\ \text{m s}^{-2} = 270\ \text{N}$$

इस प्रकरण में, वास्तविक अवरोधी बल और इसीलिए, गोली का मंदन एकसमान नहीं होता। इसीलिए, उत्तर केवल औसत अवरोधी बल को व्यक्त करता है। ◀

उदाहरण 4.3 द्रव्यमान m के एक कण की गति, $y = ut + \frac{1}{2}gt^2$ से वर्णित है। उस कण पर लगने वाले बल को ज्ञात करो।

हल : हम जानते हैं

$$y = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

अब,

$$v = \frac{dy}{dt} = u + gt$$

त्वरण, $a = \frac{dv}{dt} = g$

समीकरण (4.5) से बल,

$$F = ma = mg$$

अतः दिए गए समीकरण से गुरुत्वीय त्वरण के अधीन कण की गति का वर्णन होता है तथा y गुरुत्वीय त्वरण g की दिशा में स्थान निर्देशांक है। ◀

आवेग

कभी-कभी हमारा सामना ऐसे दृष्टांतों से होता है जिनमें किसी पिण्ड पर कोई बड़ा बल, बहुत कम समय के लिए कार्यरत रहकर, उस पिण्ड के संवेग में परिमित परिवर्तन उत्पन्न करता है। उदाहरण के लिए, जब कोई गेंद किसी दीवार से टकराकर वापस परावर्तित होती है, तब दीवार द्वारा गेंद पर लगने वाला बल बहुत कम समय के लिए (जितने समय तक दोनों संपर्क में होते हैं) कार्यरत रहता है तो भी यह बल गेंद के संवेग को उत्क्रमित करने के लिए पर्याप्त होता है। प्रायः इन स्थितियों में, बल तथा समयावधि को

© NCERT not to be republished

पृथक-पृथक सुनिश्चित करना कठिन होता है। परंतु बल तथा समय का गुणनफल, जो कि पिण्ड का संवेग परिवर्तन है, एक मापने योग्य राशि है। इस गुणनफल को **आवेग** कहते हैं :

$$\text{आवेग} = \text{बल} \times \text{समयावधि} = \text{संवेग में परिवर्तन} \quad (4.7)$$

परिमित संवेग परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए, कम समय के लिए कार्यरत रहने वाले बड़े बल को *आवेगी बल* कहते हैं। यद्यपि विज्ञान के इतिहास में आवेगी बलों को संकल्पनात्मक रूप से सामान्य बलों से अलग श्रेणी में रखा गया, न्यूटनी यांत्रिकी में ऐसा कोई विभेदन नहीं किया गया है। अन्य बलों की भांति आवेगी बल भी बल ही है–केवल यह बड़ा है और कम समय के लिए कार्यरत रहता है।

▶ ***उदाहरण 4.4*** कोई बल्लेबाज किसी गेंद की आरंभिक चाल जो $12\ m\ s^{-1}$ है, में बिना परिवर्तन किए उस पर हिट लगाकर सीधे गेंदबाज की दिशा में वापस भेज देता है। यदि गेंद की संहति 0.15 kg है, तो गेंद को दिया गया आवेग ज्ञात कीजिए। (गेंद की गति रैखिक मानिए)। ◀

हल : संवेग परिवर्तन $= 0.15\times12-(-0.15\times12)=3.6\ Ns$

आवेग = 3.6 N s बल्लेबाज से गेंदबाज की दिशा में

यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें बल्लेबाज द्वारा गेंद पर लगा बल तथा गेंद और बल्ले के बीच संपर्क का समय ज्ञात करना एक कठिन कार्य है जबकि आवेग का परिकलन तुरंत किया जा सकता है।

4.6 न्यूटन का गति का तृतीय नियम

गति का द्वितीय नियम किसी पिण्ड पर लगे बाह्य बल तथा उसमें उत्पन्न त्वरण में संबंध बताता है। पिण्ड पर लगे बाह्य बल का उद्गम क्या है ? कौन साधन बाह्य बल प्रदान करता है ? न्यूटनी यांत्रिकी में इन प्रश्नों का सरल उत्तर यह है कि किसी पिण्ड पर लगने वाला बाह्य बल सदैव ही किसी अन्य पिण्ड के कारण होता है। दो पिण्डों A और B के युगल पर विचार कीजिए। मान लीजिए पिण्ड B पिण्ड A पर कोई बाह्य बल लगाता है, तब यह प्रश्न भी स्वाभाविक है : क्या पिण्ड A भी पिण्ड B पर कोई बाह्य बल लगाता है ? कुछ उदाहरणों में उत्तर स्पष्ट जान पड़ता है। यदि आप किसी कुण्डलित कमानी को अपने हाथों से दबाएँ तो वह कमानी आपके हाथों के बल से संपीडित हो जाती है। संपीडित कमानी भी प्रत्युत्तर में आपके हाथों पर बल आरोपित करती है : आप इस बल का अनुभव करते हैं। परंतु तब क्या होता है जब पिण्ड संपर्क में नहीं होते ? पृथ्वी गुरुत्वीय बल के कारण किसी पत्थर को अधोमुखी दिशा में खींचती है। क्या पत्थर पृथ्वी पर कोई बल लगाता है ? इसका उत्तर स्पष्ट नहीं है, क्योंकि हम पत्थर द्वारा पृथ्वी पर लगे बल के प्रभाव को नहीं देख सकते हैं। परंतु न्यूटन के अनुसार इस प्रश्न का उत्तर है : हाँ, पत्थर भी पृथ्वी पर परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत बल लगाता है। हमें इस बल की जानकारी नहीं हो पाती, इसका कारण यह है कि अत्यधिक भारी होने के कारण पृथ्वी की गति पर पत्थर द्वारा लगने वाले कम बल का प्रभाव नगण्य होता है।

इस प्रकार, न्यूटनी यांत्रिकी के अनुसार, प्रकृति में बल कभी भी अकेला नहीं पाया जाता। दो पिण्डों के बीच परस्पर अन्योन्य क्रिया बल है। बल सदैव युगल में पाए जाते हैं। साथ ही, दो पिण्डों के बीच परस्पर बल सदैव समान और विपरीत दिशा में होते हैं। न्यूटन ने इस धारणा को **गति के तृतीय नियम** के रूप में व्यक्त किया।

प्रत्येक क्रिया की सदैव समान एवं विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया होती है।

न्यूटन की गति के तृतीय नियम की भाषा इतनी सुस्पष्ट और रोचक है कि यह सामान्य भाषा का अंग बन गई है। कदाचित इसी कारणवश गति के तृतीय नियम के बारे में काफी भ्रांतियाँ हैं। आइए, गति के तृतीय नियम के बारे में कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदुओं पर ध्यान दें, विशेषकर *क्रिया* तथा *प्रतिक्रिया* पदों के प्रयोग के संदर्भ में।

1. गति के तृतीय नियम में पदों – क्रिया तथा प्रतिक्रिया का अर्थ 'बल' के अतिरिक्त अन्य कुछ नहीं है। एक ही भौतिक राशि के लिए विभिन्न पदों का प्रयोग कभी-कभी भ्रमित कर सकता है। तृतीय नियम को सरल तथा स्पष्ट शब्दों में इस प्रकार लिखा जाता है :

   बल सदैव युगलों में पाए जाते हैं। पिण्ड A पर B द्वारा आरोपित बल पिण्ड B पर A द्वारा आरोपित बल के समान एवं विपरीत होता है।

2. तृतीय नियम के पदों *क्रिया* तथा *प्रतिक्रिया* से यह भ्रम उत्पन्न हो सकता है कि क्रिया प्रतिक्रिया से पहले आती है, अर्थात् क्रिया कारण है तथा निहित प्रतिक्रिया उसका प्रभाव। **तृतीय नियम में ऐसा कोई कारण-प्रभाव संबंध नहीं है। *A* पर *B* द्वारा आरोपित बल तथा *B* पर *A* द्वारा आरोपित बल एक ही क्षण कार्यरत होते हैं।** इसी संकेत के आधार पर इनमें से किसी भी एक को क्रिया तथा दूसरे को प्रतिक्रिया कहा जा सकता है।

3. क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं, एक ही वस्तु पर नहीं। दो पिण्डों A तथा B के युगल पर विचार कीजिए। तृतीय नियम के अनुसार,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \quad (4.8)$$

© NCERT not to be republished

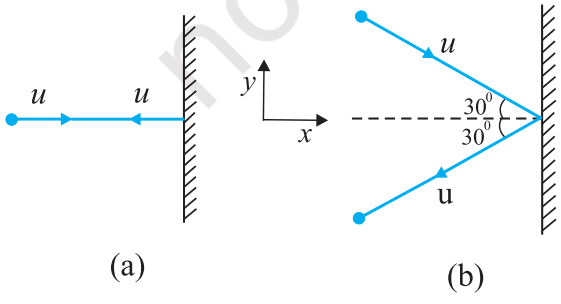
(A पर B द्वारा बल) = – (B पर A द्वारा बल)

इस प्रकार, यदि हम किसी एक पिण्ड (A अथवा B) की गति पर विचार करते हैं तो दो बलों में से केवल एक ही प्रासंगिक है। दोनों बलों का योग करके दृढ़तापूर्वक यह कहना कि नेट बल शून्य है, यह त्रुटिपूर्ण है। फिर भी, यदि आप दो पिण्डों के किसी निकाय को एक पिण्ड मानकर उस पर विचार करते हैं, तो $\mathbf{F}_{AB}$ तथा $\mathbf{F}_{BA}$ उस निकाय ($A + B$) के आंतरिक बल हैं। ये दोनों मिलकर एक शून्य बल देते हैं। इस प्रकार किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय में आंतरिक बल युगलों में निरस्त हो जाते हैं। यह एक महत्त्वपूर्ण तथ्य है जो द्वितीय नियम को किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय पर अनुप्रयोज्य होने योग्य बनाता है (देखिए अध्याय 6)।

उदाहरण 4.5 दो सर्वसम बिलियर्ड गेंदें किसी दृढ़ दीवार से समान चाल से, परंतु भिन्न कोणों पर, टकराती हैं तथा नीचे दर्शाए चित्र 4.6 की भांति चाल में बिना क्षय हुए परावर्तित हो जाती हैं। (i) प्रत्येक गेंद के कारण दीवार पर बल की दिशा क्या है ? तथा (ii) दीवार द्वारा दोनों गेंदों पर लगे आवेगों का अनुपात क्या है ?

हल स्वाभाविक रूप में इन प्रश्नों के उत्तर इस प्रकार होंगे– (i) यह हो सकता है कि (a) में गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत् हो जबकि (b) में गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार पर अभिलंब के साथ 30° का कोण बनाता है। यह उत्तर सही नहीं है। दोनों ही प्रकरणों में दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत् है।

दीवार पर लगे बल को कैसे ज्ञात करें ? इसकी गति के बारे में हमें कोई जानकारी नहीं है। इसके लिए एक युक्ति अपनाते हैं जिसमें पहले हम द्वितीय नियम का उपयोग करके दीवार के कारण गेंद पर लगे बल (अथवा आवेग) पर विचार करते हैं और तत्पश्चात् (i) का उत्तर देने के लिए तृतीय नियम का उपयोग करते हैं। मान लीजिए प्रत्येक गेंद की संहति m है तथा दीवार से टकराने से पूर्व और टकराने के पश्चात् दोनों गेंदों की चाल u है। चित्र में दर्शाए गये के अनुसार x- तथा y- अक्षों का चुनाव कीजिए, तथा प्रत्येक प्रकरण में गेंद के संवेग में परिवर्तन पर विचार कीजिए :



चित्र 4.6

प्रकरण (a)

$$(p_x)_{\text{आरंभिक}1} = mu \qquad (p_y)_{\text{आरंभिक}} = 0$$

$$(p_x)_{\text{अंतिम}} = -mu \qquad (p_y)_{\text{अंतिम}} = 0$$

संवेग, आवेग सदिश में परिवर्तन होता है, अतः

आवेग का x-घटक = $-2\,mu$

आवेग का y-घटक = 0

आवेग तथा बल समान दिशा में हैं उपरोक्त चर्चा से यह स्पष्ट है कि दीवार के कारण गेंद पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत्, तथा गति की ऋणात्मक x-दिशा के अनुदिश है। न्यूटन के गति के तृतीय नियम का उपयोग करने पर गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत्, तथा गति की धनात्मक x-दिशा के अनुदिश है। चूंकि इस समस्या में यह नहीं बताया गया है कि दीवार से टक्कर में लगा अल्प समय कितना है, अतः बल के परिमाण को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता।

प्रकरण (b)

$$(p_x)_{\text{आरंभिक}} = mu\cos 30^\circ,\ (p_y)_{\text{आरंभिक}} = -mu\sin 30^\circ$$

$$(p_x)_{\text{अंतिम}} = -mu\cos 30^\circ,\ (p_y)_{\text{अंतिम}} = -mu\sin 30^\circ$$

ध्यान दीजिए, टकराने के पश्चात् p_x का चिह्न परिवर्तित हो जाता है, जबकि p_y का नहीं होता। अतः

आवेग का x-घटक = $-2\,mu\cos 30^\circ$

आवेग का y-घटक = 0

आवेग (तथा बल) की दिशा वही है जो (a) में थी: यह दीवार के अभिलंबवत् ऋणात्मक x- दिशा के अनुदिश है। पहले की ही भांति, न्यूटन के तृतीय नियम का उपयोग करने पर गेंद के कारण दीवार पर बल दीवार के अभिलंबवत् धनात्मक x-दिशा के अनुदिश है।

प्रकरण (a) व प्रकरण (b) में गेंद को दीवार द्वारा प्रदान किए गए आवेगों के परिमाणों का अनुपात है :

$$2mu/(2mu\cos 30^\circ) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$$

4.7 संवेग–संरक्षण

न्यूटन के गति के द्वितीय तथा तृतीय नियम एक अत्यन्त महत्त्वपूर्ण परिणाम : संवेग–संरक्षण नियम की ओर अग्रसर करते हैं। एक परिचित उदाहरण पर विचार कीजिए। किसी बंदूक से एक गोली छोड़ी जाती है। यदि बंदूक द्वारा गोली पर लगा बल $\mathbf{F}$ है, तो न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार गोली द्वारा बंदूक पर लगने वाला

© NCERT not to be republished

बल $-\mathbf{F}$ है। दोनों बल समान समय अंतराल Δt तक कार्य करते हैं। द्वितीय नियम के अनुसार गोली का संवेग परिवर्तन $\mathbf{F}\,\Delta t$ है तथा बंदूक का संवेग परिवर्तन $-\mathbf{F}\,\Delta t$ है। चूंकि आरंभ में दोनों विराम में हैं, अत: संवेग परिवर्तन अंतिम संवेग के बराबर है। इस प्रकार यदि छोड़ने के पश्चात् गोली का संवेग, $\mathbf{p}_b$ है तथा बंदूक का प्रतिक्षेप संवेग, $\mathbf{p}_g$ है, तो $\mathbf{p}_g = -\mathbf{p}_b$ अर्थात् $\mathbf{p}_g + \mathbf{p}_b = 0$ अर्थात्, गोली बंदूक निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है।

इस प्रकार, किसी वियुक्त निकाय (अर्थात् कोई निकाय जिस पर कोई बाह्य बल नहीं लगता है।) में, निकाय के कणों के युगलों के बीच पारस्परिक बल व्यष्टि कणों में संवेग परिवर्तन कर सकते हैं, परंतु चूंकि प्रत्येक युगल के लिए पारस्परिक बल समान एवं विपरीत हैं संवेग परिवर्तन युगलों में निरस्त हो जाते हैं तथा कुल संवेग अपरिवर्तित रहता है। इस तथ्य को ***संवेग- संरक्षण नियम*** कहते हैं। इस नियम के अनुसार :

अन्योन्य क्रिया करने वाले कणों के किसी वियुक्त निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है।

संवेग-संरक्षण नियम के अनुप्रयोग का एक महत्त्वपूर्ण उदाहरण दो पिण्डों में संघट्टन है। दो पिण्डों A व B पर विचार कीजिए जिनके आरंभिक संवेग $\mathbf{p}_A$ तथा $\mathbf{p}_B$ हैं। दोनों टकराते हैं और पृथक हो जाते हैं। यदि पृथक होने के पश्चात् उनके अंतिम संवेग क्रमश: $\mathbf{P}'_A$ तथा $\mathbf{P}'_B$ हैं; तो द्वितीय नियम के द्वारा

$$\mathbf{F}_{AB}\,\Delta t = \mathbf{p}'_A - \mathbf{p}_A$$

तथा, $\mathbf{F}_{BA}\,\Delta t = \mathbf{p}'_B - \mathbf{p}_B$

(यहाँ हमने दोनों बलों के लिए समान समय अंतराल Δt लिया है, जो वह समय है जिसमें दोनों पिण्ड संपर्क में रहते हैं।)

चूंकि $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ तृतीय नियम द्वारा,

$$\mathbf{p}'_A - \mathbf{p}_A = -(\mathbf{p}'_B - \mathbf{p}_B)$$

अर्थात् $\mathbf{p}'_A + \mathbf{p}'_B = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)$ (4.9)

जो यह दर्शाता है कि वियुक्त निकाय (A + B) का कुल अंतिम संवेग उसके आरंभिक संवेग के बराबर है। ध्यान रहे कि, यह नियम दोनों प्रकार के संघट्टों - प्रत्यास्थ तथा अप्रत्यास्थ, पर लागू होता है। प्रत्यास्थ संघट्ट में दूसरी शर्त है कि निकाय की कुल आरंभिक गतिज ऊर्जा निकाय की कुल अंतिम गतिज ऊर्जा के बराबर होती है (देखिए अध्याय 5)।

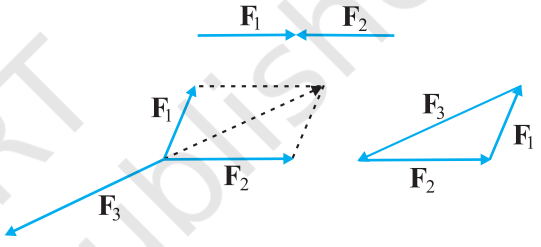
4.8 किसी कण की साम्यावस्था

यांत्रिकी में किसी कण की साम्यावस्था का उल्लेख उन स्थितियों के लिए किया जाता है जिनमें कण पर नेट बाह्य बल शून्य* हो। प्रथम नियम के अनुसार, इसका यह अर्थ है कि या तो कण विराम में है अथवा एक समान गति में है। यदि किसी कण पर दो बल $\mathbf{F}_1$ तथा $\mathbf{F}_2$ कार्यरत हैं, तो साम्यावस्था के लिए आवश्यक है कि,

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad (4.10)$$

अर्थात् कण पर कार्यरत दोनों बल समान एवं विपरीत होने चाहिए। तीन संगामी बलों, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ तथा $\mathbf{F}_3$ के अधीन साम्यावस्था (अथवा संतुलन) के लिए इन तीनों बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए :

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \qquad (4.11)$$



चित्र 4.7 संगामी बलों के अधीन संतुलन

दूसरे शब्दों में, बलों के समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा प्राप्त किन्हीं दो बलों, मान लीजिए $\mathbf{F}_1$ तथा $\mathbf{F}_2$, का परिणामी तीसरे बल $\mathbf{F}_3$, के समान एवं विपरीत होना चाहिए। चित्र 4.7 के अनुसार साम्यावस्था में तीनों बलों को किसी त्रिभुज की भुजाओं, जिस पर चक्रीय क्रम में सदिश तीर बने हों, द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इस परिणाम का व्यापीकरण बलों की किसी भी संख्या के लिए किया जा सकता है। आरोपित बलों $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \ldots \mathbf{F}_n$ के अधीन कोई कण साम्यावस्था में होगा यदि उन बलों को n-भुजा के बंद चक्रीय बहुभुज की भुजाओं द्वारा निरूपित किया जा सके।

समीकरण (4-11) से

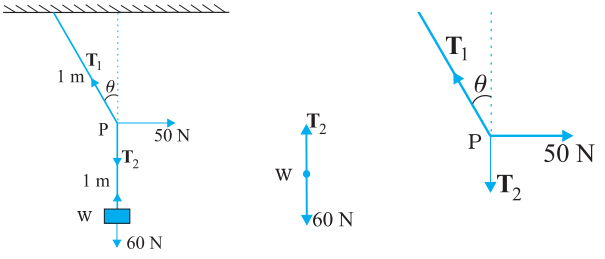
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$$
$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0 \qquad (4.12)$$

* किसी पिण्ड की साम्यावस्था के लिए केवल स्थानान्तरीय साम्यावस्था (शून्य नेट बाह्य बल) ही आवश्यक नहीं है वरन् घूर्णी साम्यावस्था (शून्य नेट बाह्य बल आघूर्ण) भी आवश्यक है, यह हम अध्याय 6 में देखेंगे।

© NCERT not to be republished

जहाँ पर F_{1x}, F_{1y} तथा F_{1z} क्रमशः $\mathbf{F}_1$ के x, y तथा z दिशा में घटक है।

उदाहरण 4.6 6 kg संहति के किसी पिण्ड को छत से 2 m लंबाई की डोरी द्वारा लटकाया गया है । डोरी के मध्य-बिंदु पर चित्र 4.8 में दर्शाए अनुसार क्षैतिज दिशा में 50 N बल लगाया जाता है । साम्यावस्था में डोरी ऊर्ध्वाधर से कितना कोण बनाती है ? (g= 10 m s^{-2} लीजिए)। डोरी की संहति को नगण्य मानिए ।



चित्र 4.8

हल चित्र 4.8(b) तथा 4.8(c) बल निर्देशक आरेख कहलाते हैं। चित्र 4.8(b) भार W का बल निर्देशक आरेख है तथा 4.8(c) बिन्दु P का बल निर्देशक आरेख है। सर्वप्रथम भार W की साम्यावस्था पर विचार कीजिए। स्पष्ट है, $T_2 = 6\ 10 = 60$N। अब तीन बलों - तनाव T_1 तथा T_2, तथा क्षैतिज बल 50 N की क्रियाओं के अधीन संहति बिंदु P की साम्यावस्था पर विचार कीजिए। परिणामी बल के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटकों को पृथक-पृथक शून्य होना चाहिए:

$$T_1 \cos\theta = T_2 = 60\ \text{N}$$

$$T_1 \sin\theta = 50\ \text{N}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{5}{6} \text{ अथवा } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 40^\circ$$

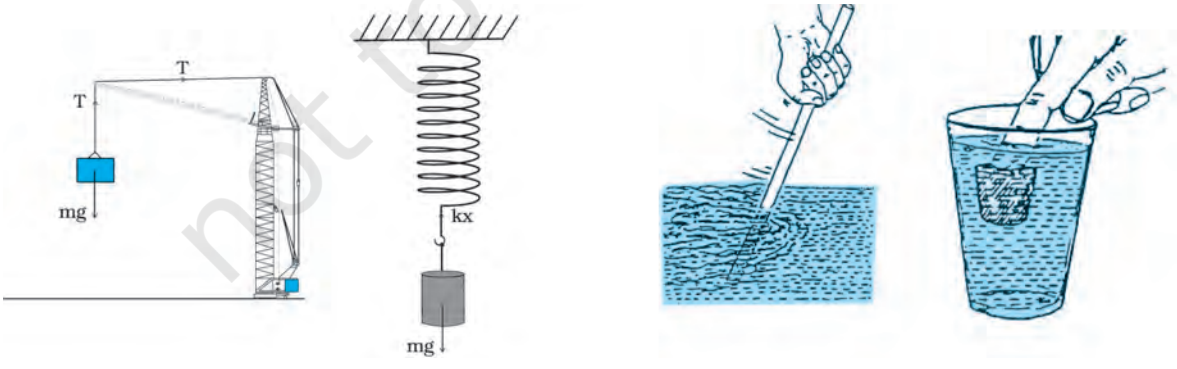
ध्यान दीजिए, उत्तर न तो डोरी (जिसका द्रव्यमान नगण्य माना है) की लंबाई पर निर्भर करता है और न ही उस बिंदु की स्थिति पर निर्भर करता है जिस पर क्षैतिज बल लगाया गया है । ◀

4.9 यांत्रिकी में सामान्य बल

यांत्रिकी में हमारा सामना कई प्रकार के बलों से होता है। वास्तव में, गुरुत्वाकर्षण बल सर्वव्यापक है। पृथ्वी पर स्थित सभी वस्तुएँ पृथ्वी के गुरुत्व बल का अनुभव करती हैं। गुरुत्वाकर्षण बल आकाशीय पिण्डों की गतियों को नियंत्रित करता है। गुरुत्वाकर्षण बल किसी दूरी पर बिना मध्यवर्ती माध्यम के कार्य कर सकता है।

यांत्रिकी में सामान्यतः आने वाले सभी बल संपर्क बल* हैं। जैसा कि नाम से संकेत मिलता है, किसी पिण्ड पर संपर्क बल किसी अन्य पिण्ड ठोस अथवा तरल के संपर्क द्वारा उत्पन्न होता है। जब कई पिण्ड संपर्क में होते हैं, (उदाहरणार्थ, मेज पर रखी कोई पुस्तक, छड़ों, कब्जों तथा अन्य प्रकार के आधारों से संबद्ध दृढ़ पिण्डों का कोई निकाय), तब वहाँ तृतीय नियम को संतुष्ट करने वाले (पिण्डों के प्रत्येक युगल के लिए) पारस्परिक संपर्क बल होते हैं। संपर्क-पृष्ठों के अभिलंबवत् संपर्क बल के घटक को अभिलंब बल (अथवा अभिलंब प्रतिक्रिया) कहते हैं। संपर्क-पृष्ठों के समान्तर घटक को घर्षण बल कहते हैं। संपर्क बल तब भी उत्पन्न होते हैं जब ठोस तरलों के संपर्क में आते हैं। उदाहरण के लिए, जब किसी ठोस को किसी तरल में डुबाते हैं, तो एक उपरिमुखी बल (उत्प्लावन बल) होता है जो उस ठोस द्वारा विस्थापित तरल के भार के बराबर होता है। श्यान बल, वायु-प्रतिरोध, आदि भी संपर्क बलों के उदाहरण हैं (चित्र 4.9)।

दो सामान्य बल कमानी बल तथा डोरी में तनाव हैं। जब किसी कमानी को किसी बाह्य बल द्वारा संपीडित अथवा विस्तारित किया जाता है, तब एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है। यह बल प्रायः संपीडन अथवा दैर्घ्यवृद्धि के अनुक्रमानुपाती होता है (छोटे



चित्र 4.9 यांत्रिकी में संपर्क बलों के कुछ उदाहरण ।

* सुगमता के लिए यहाँ हम आवेशित तथा चुंबकीय पिण्डों पर विचार नहीं कर रहे हैं । इनके लिए, गुरुत्वाकर्षण के अतिरिक्त, यहाँ वैद्युत तथा चुंबकीय असंपर्क बल हैं ।

© NCERT not to be republished

विस्थापनों के लिए)। कमानी बल F को, $F = -kx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, यहाँ x विस्थापन है तथा k को कमानी-स्थिरांक या बल-स्थिरांक कहते हैं। यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि बल अतानित अवस्था से विस्थापन के विपरीत है। किसी अवितान्य डोरी के लिए, बल नियतांक बहुत अधिक होता है। किसी डोरी के प्रत्यानयन बल को तनाव कहते हैं। परंपरा के अनुसार समस्त डोरी के अनुदिश एक समान तनाव T मान लेते हैं। नगण्य संहति की डोरी के लिए, डोरी के प्रत्येक भाग पर समान तनाव मानने की परंपरा सही है।

प्रकृति में केवल चार मूल बल हैं। इनमें दुर्बल तथा प्रबल बल ऐसे प्रभाव क्षेत्र में प्रकट होते हैं, जिनका यहां हमसे संबंध नहीं है। यांत्रिकी के संदर्भ में केवल गुरुत्वाकर्षण तथा वैद्युत बल ही प्रासंगित होते हैं। यांत्रिकी के विभिन्न संपर्क बल जिनका हमने अभी वर्णन किया है, मूल रूप से वैद्युत बलों से ही उत्पन्न होते हैं। यह बात आश्चर्यजनक प्रतीत हो सकती है क्योंकि यांत्रिकी में हम अनावेशित तथा अचुंबकीय पिण्डों की चर्चा कर रहे हैं। परंतु सूक्ष्म स्तर पर, सभी पिण्ड आवेशित अवयवों (नाभिकों तथा इलेक्ट्रॉनों) से मिलकर बने हैं तथा आण्विक संघट्टों प्रतिघातों तथा पिण्डों की प्रत्यास्थता आदि के कारण उत्पन्न विभिन्न संपर्क बलों की खोजबीन से ज्ञात होता है कि अंततः ये विभिन्न पिण्डों के आवेशित अवयवों के बीच वैद्युत बल ही हैं। इन बलों की विस्तृत सूक्ष्म उत्पत्ति के विषय में जानकारी जटिल है तथा स्थूल स्तर पर यांत्रिकी की समस्याओं को हल करने की दृष्टि से उपयोगी नहीं है। यही कारण है कि उन्हें विभिन्न प्रकार के बलों के रूप माना जाता है तथा उनके अभिलाक्षणिक गुणों का आनुभविक निर्धारण किया जाता है।

4.9.1 घर्षण

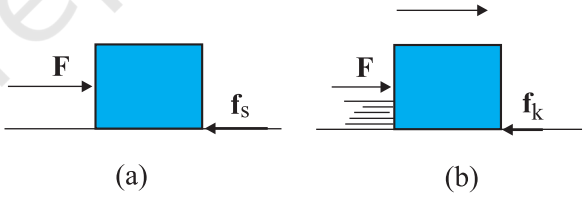
आइए, फिर से क्षैतिज मेज पर रखे m संहति के पिण्ड वाले उदाहरण पर विचार करें। गुरुत्व बल (mg) को मेज का अभिलंब बल (N) निरस्त कर देता है। अब मानिए कि पिण्ड पर कोई बाह्य बल F क्षैतिजतः आरोपित किया जाता है। अनुभव से हमें यह ज्ञात है कि परिमाण में छोटा बल आरोपित करने पर पिण्ड को गतिशील करने में अपर्याप्त हो सकता है। परंतु यदि आरोपित बल ही पिण्ड पर लगा एक मात्र बाह्य बल है, तो यह बल परिमाण में चाहे कितना भी छोटा क्यों न हो, पिण्ड को F/m त्वरण से गतिशील होना चाहिए। स्पष्ट है, कि अगर पिण्ड विराम में है तो पिण्ड पर कोई अन्य बाह्य बल क्षैतिज दिशा में कार्य करने लगा है, जो अरोपित बल F का विरोध करता है, फलस्वरूप पिण्ड पर नेट बल शून्य हो जाता है। यह विरोधी बल f_s, जो मेज के संपर्क में पिण्ड के पृष्ठ के समान्तर लगता है, घषर्ण बल अथवा केवल घर्षण कहलाता है (चित्र 4.10(a))। यहाँ पादाक्षर s को स्थैतिक घर्षण के लिए प्रयोग किया गया है, ताकि हम इसकी गतिज घर्षण f_k जिसके विषय में बाद में विचार करेंगे (चित्र 4.10(b)), से भिन्न पहचान कर सकें। ध्यान दीजिए, स्थैतिक घर्षण का अपना कोई आस्तित्व नहीं होता। जब तक कोई बाह्य बल आरोपित नहीं होता, तब तक स्थैतिक घर्षण भी नहीं होता । जिस क्षण कोई बल आरोपित होता है, उसी क्षण घर्षण बल भी लगने लगता है। पिंड को विराम में रखते हुए जब आरोपित बल F बढ़ता है, आरोपित बल के समान व विपरीत दिशा में रहते हुए f_s भी एक सीमा तक बढ़ता है। अतः इसे **स्थैतिक** घर्षण कहते हैं। स्थैतिक घर्षण **समुपस्थित गति** का विरोध करता है । समुपस्थित गति का तात्पर्य ऐसी गति से है जो तभी होगी जब (परंतु वास्तव में होती नहीं) किसी आरोपित बल के अंतर्गत घर्षण अनुपस्थित हो।

हम अनुभव से यह जानते हैं कि, जैसे आरोपित बल एक निश्चित सीमा से बढ़ता है, तो पिण्ड गति आरंभ कर देता है। प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि स्थैतिक घर्षण का सीमान्त मान $(f_s)_{\text{अधिकतम}}$ संपर्क पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता तथा अभिलंब बल (N) के साथ लगभग इस प्रकार परिवर्तित होता है :

$$(f_s)_{\text{अधिकतम}} = \mu_s N \qquad (4.13)$$

यहाँ μ_s आनुपातिकता स्थिरांक है, जो केवल संपर्क-पृष्ठों के युगल की प्रकृति पर ही निर्भर करता है। इस स्थिरांक μ_s को स्थैतिक घर्षण गुणांक कहते हैं। स्थैतिक घर्षण नियम को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$f_s \le \mu_s N \qquad (4.14)$$



चित्र 4.10 स्थैतिक तथा सर्पी घर्षण: (a) स्थैतिक घर्षण पिण्ड की समुपस्थित गति का विरोध करता है । जब बाह्य बल स्थैतिक घर्षण की अधिकतम सीमा से बढ़ जाता है, तो गति आरंभ होती है । (b) एक बार जब पिण्ड गतिशील हो जाता है तो उस पर सर्पी अथवा गतिज घर्षण कार्य करने लगता है जो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति का विरोध करता है । गतिज घर्षण प्रायः स्थैतिक घर्षण के अधिकतम मान से कम होता है ।

यदि आरोपित बल F का मान $(f_s)_{\text{अधिकतम}}$ से अधिक हो जाता है, तो पिण्ड पृष्ठ पर सरकना आरंभ कर देता है। प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि जब आपेक्ष गति आरंभ हो जाती है, तब घर्षण बल, अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल $(f_s)_{\text{अधिकतम}}$ से कम हो जाता है। वह घर्षण बल, जो दो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति

© NCERT not to be republished

का विरोध करता है, **गतिज** अथवा **सर्पी घर्षण** कहलाता है और इसे f_k द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। स्थैतिक घर्षण की भांति गतिज घर्षण भी संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता। साथ ही, यह आपेक्ष गति के वेग पर भी लगभग निर्भर नहीं करता। यह एक नियम, जो स्थैतिक घर्षण के लिए नियम के समरूप है, को संतुष्ट करता है :

$$f_k = \mu_k N \qquad (4.15)$$

यहाँ μ_k, गतिज घर्षण गुणांक हैं जो केवल संपर्क पृष्ठों के युगल की प्रकृति पर निर्भर करता है। जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है, प्रयोग यह दर्शाते हैं कि μ_k, μ_s से कम होता है। जब आपेक्ष गति आरंभ हो जाती है तो, द्वितीय नियम के अनुसार, गतिमान पिण्ड का त्वरण $(F-f_k)/m$ होता है। एकसमान वेग से गतिमान पिण्ड के लिए, $F = f_k$। यदि पिण्ड से आरोपित बल को हटा लें तो उसका त्वरण $-f_k/m$ होता है और अंतिमत: पिण्ड रुक जाता है।

ऊपर वर्णन किए गए घर्षण के नियमों को मूल नियमों की उस श्रेणी में नहीं माना जाता जिसमें गुरुत्वाकर्षण, वैद्युत तथा चुंबकीय बलों को माना जाता है। ये आनुभविक संबंध हैं, जो केवल सीमित प्रभाव क्षेत्रों में ही सन्निकटत: सही हैं। फिर भी ये नियम यांत्रिकी में व्यावहारिक परिकलनों में बहुत लाभप्रद हैं।

इस प्रकार, जब दो पिण्ड संपर्क में होते हैं तब प्रत्येक पिण्ड अन्य पिण्ड के द्वारा संपर्क बल का अनुभव करता है। परिभाषा के अनुसार, घर्षण बल संपर्क बल का संपर्क पृष्ठों के समान्तर घटक होता है, जो दो पृष्ठों के बीच समुपस्थित अथवा वास्तविक आपेक्ष गति का विरोध करता है। ध्यान दीजिए, घर्षण बल गति का नहीं वरन् **आपेक्ष गति** का विरोध करता है। त्वरित गति से गतिमान रेलगाड़ी के किसी डिब्बे में रखे बॉक्स पर विचार कीजिए। यदि बॉक्स रेलगाड़ी के आपेक्ष स्थिर है, तो वास्तव में वह रेलगाड़ी के साथ त्वरित हो रहा है। वह कौन-सा बल है जो बॉक्स को त्वरित कर रहा है ? स्पष्ट है कि क्षैतिज दिशा में एक ही कल्पनीय बल है, और वह है घर्षण बल। यदि कोई घर्षण नहीं है तो रेलगाड़ी के डिब्बे का फर्श तो आगे की ओर सरकेगा तथा जड़त्व के कारण बॉक्स अपनी आरंभिक स्थिति पर ही रहेगा (तथा रेलगाड़ी के डिब्बे की पिछली दीवार से टकराएगा)। इस समुपस्थित आपेक्ष गति का स्थैतिक घर्षण f_s द्वारा विरोध किया जाता है। यहाँ स्थैतिक घर्षण, बॉक्स को रेलगाड़ी के आपेक्ष स्थित रखते हुए, रेलगाड़ी के समान त्वरण प्रदान करता है।

उदाहरण 4.7 कोई बॉक्स रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखा है। यदि बॉक्स तथा रेलगाड़ी के फर्श के बीच स्थैतिक, घर्षण गुणांक 0.15 है, तो रेलगाड़ी का वह अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए जो बॉक्स को रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखने के लिए आवश्यक है।

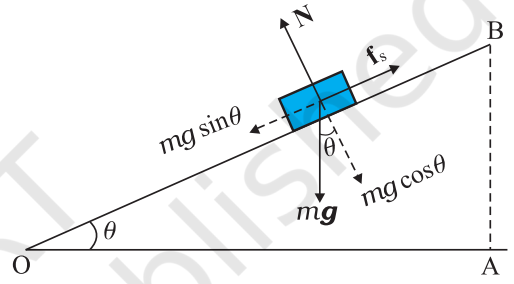
हल चूंकि बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण ही है, अत:

$$ma = f_s \le \mu_s N = \mu_s\, mg$$

अर्थात् $a \le \mu_s g$

$\therefore a_{\text{अधिकतम}} = \mu_s g = 0.15 \times 10\,\text{m s}^{-2} = 1.5\,\text{m s}^{-2}$ ◀

उदाहरण 4.8 4 kg का कोई गुटका एक क्षैतिज समतल पर रखा है (चित्र 4.11)। समतल को धीरे-धीरे तब तक आनत किया जाता है जब तक क्षैतिज से किसी कोण $\theta = 15°$ पर वह गुटका सरकना आरंभ नहीं कर देता। पृष्ठ और गुटके के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक क्या है ?



चित्र 4.11

हल आनत समतल पर विरामावस्था में रखे m संहति के गुटके पर कार्यरत बल है (*i*) गुटके का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर, (*ii*) समतल द्वारा गुटके पर लगाया गया अभिलंब बल N, तथा (*iii*) समुपस्थित गति का विरोध करने वाला स्थैतिक घर्षण बल f_s। गुटके की साम्यावस्था में इन बलों का परिणामी शून्य बल होना चाहिए। भार mg को चित्र में दर्शाए अनुसार दो दिशाओं में अपघटित करने पर

$$mg\sin\theta = f_s \quad mg\cos\theta = N$$

जैसे-जैसे θ बढ़ता है, स्वसमायोजी घर्षण बल f_s तब तक बढ़ता है जब तक, $\theta = \theta_{\text{अधिकतम}}$ पर यह अपना अधिकतम मान प्राप्त नहीं कर लेता, $(f_s)_{\text{अधिकतम}} = \mu_s N$, जहाँ μ_s गुटके तथा समतल के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक है।

अत:

$$\tan\theta_{\text{अधिकतम}} = \mu_s \text{ अथवा } \theta_{\text{अधिकतम}} = \tan^{-1}\mu_s$$

जब θ का मान $\theta_{\text{अधिकतम}}$ से केवल कुछ ही अधिक होता है, तो गुटके पर एक लघु नेट बल लगता है और गुटका सरकना आरंभ कर देता है। ध्यान दीजिए, $\theta_{\text{अधिकतम}}$ केवल μ_s पर ही निर्भर करता है, यह गुटके की संहति पर निर्भर नहीं करता।

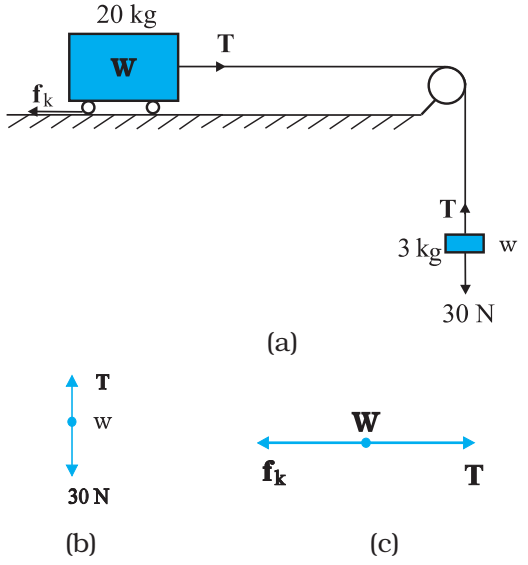
$\theta_{\text{अधिकतम}} = 15°$ के लिए,

$\mu_s = \tan 15°$

$= 0.27$ ◀

© NCERT not to be republished

उदाहरण 4.9 चित्र 4.12(a) में दर्शाए ब्लॉक-ट्राली निकाय का त्वरण क्या है, यदि ट्राली और पृष्ठ के बीच गतिज घर्षण गुणांक 0.04 है? डोरी में तनाव क्या है ? ($g = 10\ m\ s^{-2}$ लीजिए), डोरी की संहति नगण्य मानिए ।



चित्र 4.12

हल : चूंकि डोरी की लंबाई नियत है तथा घिरनी चिकनी है, 3 kg के ब्लॉक तथा 20 kg की ट्राली दोनों के त्वरणों के परिमाण समान हैं। ब्लॉक की गति पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर (चित्र 4.12(b)),

$$30 - T = 3a$$

ट्राली की गति पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर (चित्र 4.12(c)),

$$T - f_k = 20a$$

अब $f_k = \mu_k N$, जहाँ μ_k गतिज घर्षण गुणांक है तथा N अभिलंब बल है । यहाँ $\mu_k = 0.04$, तथा $N = 20 \times 10 = 200$ N

इस प्रकार, ट्राली की गति के लिए समीकरण

$$T - 0.04 \times 200 = 20a \text{ अथवा } T - 8 = 20a$$

इस समीकरणों से हमें प्राप्त होता है,

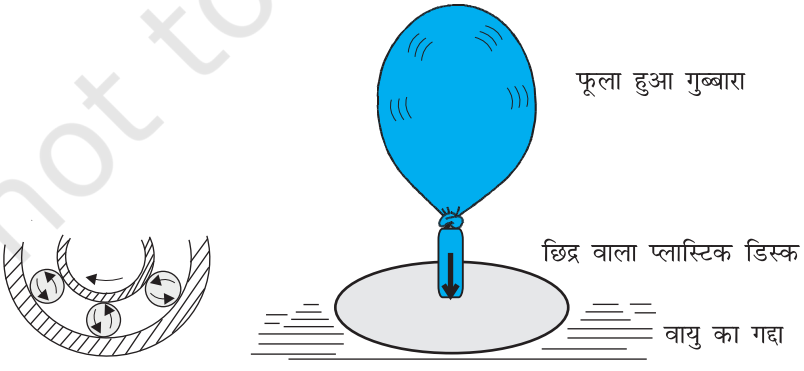
$$a = \frac{22}{23}\ m\ s^{-2} = 0.96\ m\ s^{-2}$$

तथा $T = 27.1$ N ◀

लोटनिक घर्षण

सिद्धांत रूप से क्षैतिज समतल पर एक वलय (रिंग) के समान वस्तु अथवा गोल गेंद जैसे पिण्ड जो बिना सरके केवल लोटन कर रहा (लुढ़क) है, पर किसी भी प्रकार का कोई घर्षण बल नहीं लगेगा । लोटनिक गति करते किसी पिण्ड का हर क्षण समतल तथा पिण्ड के बीच केवल एक ही संपर्क बिंदु होता है तथा यदि कोई सरकन नहीं है तो इस तात्क्षणिक संपर्क बिंदु की समतल के आपेक्ष कोई गति नहीं होती। इस आदर्श स्थिति में गतिज अथवा स्थैतिक घर्षण शून्य होता है तथा पिण्ड को एकसमान वेग से निरंतर लोटनिक गति करते रहना चाहिए। हम जानते हैं कि व्यवहार में ऐसा नहीं होगा, तथा गति में कुछ न कुछ अवरोध (लोटनिक घर्षण) अवश्य रहता है, अर्थात्, पिण्ड को निरंतर लोटनिक गति करते रहने के लिए उस पर कुछ बल लगाने की आवश्यकता होती है। समान भार के पिण्ड के लिए लोटनिक घर्षण सदैव ही सर्पी अथवा स्थैतिक घर्षण की तुलना में बहुत कम (यहाँ तक कि परिमाण की 2 अथवा 3 कोटि तक) होता है। यही कारण है कि मानव सभ्यता के इतिहास में भारी बोझों के परिवहन के लिए पहिए की खोज एक बड़ा मील का पत्थर माना गया है।

लोटनिक घर्षण का उद्गम जटिल है यद्यपि यह स्थैतिक तथा सर्पी घर्षण के उद्गम से कुछ भिन्न है। लोटनिक गति के समय



चित्र 4.13 घर्षण को घटाने के कुछ उपाय । (a) मशीन के गतिशील भागों के बीच बॉल-बेयरिंग लगाकर, (b) आपेक्षिक गति करने वाले पृष्ठों के बीच वायु का संपीडित गद्दा ।

© NCERT not to be republished

संपर्क पृष्ठों में क्षणमात्र के लिए विरूपण होता है, तथा इसके फलस्वरूप पिण्ड का कुछ परिमित क्षेत्रफल (कोई बिंदु नहीं), लोटनिक गति के समय पृष्ठ के संपर्क में होता है। इसका नेट प्रभाव यह होता है कि संपर्क बल का एक घटक पृष्ठ के समान्तर प्रकट होता है जो गति का अवरोध करता है।

हम प्रायः घर्षण को एक अवांछनीय बल मानते हैं। बहुत सी स्थितियों में, जैसे किसी मशीन, जिसमें विभिन्न कल पुर्जे गति करते हों, में घर्षण की ऋणात्मक भूमिका होती है। यह आपेक्ष गतियों का विरोध करता है जिसके फलस्वरूप ऊष्मा, आदि के रूप में ऊर्जा-क्षय होता है। मशीनों में स्नेहक गतिज घर्षण को कम करने का एक साधन होता है। घर्षण को कम करने का एक अन्य उपाय मशीन के दो गतिशील भागों के बीच, बॉल-बेयरिंग लगाना है चित्र 4.13(a)। (क्योंकि दो संपर्क पृष्ठों तथा बाल बेयरिगों के बीच लोटनिक घर्षण बहुत कम होता है, अतः ऊर्जा-क्षय घट जाता है । सापेक्ष गति करते दो ठोस पृष्ठों के बीच वायु की पतली परत बनाए रखकर भी प्रभावी ढंग से घर्षण को घटाया जा सकता है (चित्र 4.13(b))।

तथापि, बहुत-सी व्यावहारिक स्थितियों में, घर्षण अत्यन्त आवश्यक होता है । गतिज घर्षण में ऊर्जा-क्षय होता है, फिर भी आपेक्षिक गति को शीघ्र समाप्त करने में इसकी महत्त्वपूर्ण भूमिका है। मशीनों तथा यंत्रों में ब्रेक की भांति इसका उपयोग किया जाता है। इसी प्रकार स्थैतिक घर्षण भी हमारे दैनिक जीवन में अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। हम घर्षण के कारण ही फर्श पर चल पाते हैं । अत्यधिक फिसलन वाली सड़क पर कार को चला पाना असंभव होता है। किसी साधारण सड़क पर, टायरों और सड़क के बीच घर्षण पहिए की घूर्णी गति को लोटनिक गति में रूपांतरित करके कार को त्वरित करने के लिए आवश्यक बाह्य बल प्रदान करता है ।

4.10 वर्तुल (वृतीय) गति

हमने अध्याय 3 में यह देखा कि R त्रिज्या के किसी वृत्त में एकसमान चाल v से गतिमान किसी पिण्ड का त्वरण v^2/R वृत्त के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है। द्वितीय नियम के अनुसार इस त्वरण को प्रदान करने वाला बल है :

$$f_c = \frac{mv^2}{R} \qquad (4.16)$$

जहाँ m पिण्ड की संहति है। केंद्र की ओर निर्दिष्ट इस बल को अभिकेंद्र बल कहते हैं। डोरी की सहायता से वृत्त में घूर्णन करने वाले पत्थर को डोरी में तनाव अभिकेंद्र बल प्रदान करता है। सूर्य के चारों ओर किसी ग्रह की गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल सूर्य के कारण उस ग्रह पर लगे गुरुत्वाकर्षण से मिलता है। किसी क्षैतिज सड़क पर कार को वृत्तीय मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल घर्षण बल प्रदान करता है ।

किसी सपाट सड़क तथा किसी ढालू सड़क पर कार की वर्तुल गति, गति के नियमों के रोचक उदाहरण हैं।

समतल सड़क पर कार की गति-

कार पर तीन बल आरोपित हैं [चित्र 4.14(a)]

(i) कार का भार, mg

(ii) अभिलम्ब प्रतिक्रिया, N

(iii) घर्षण बल, f

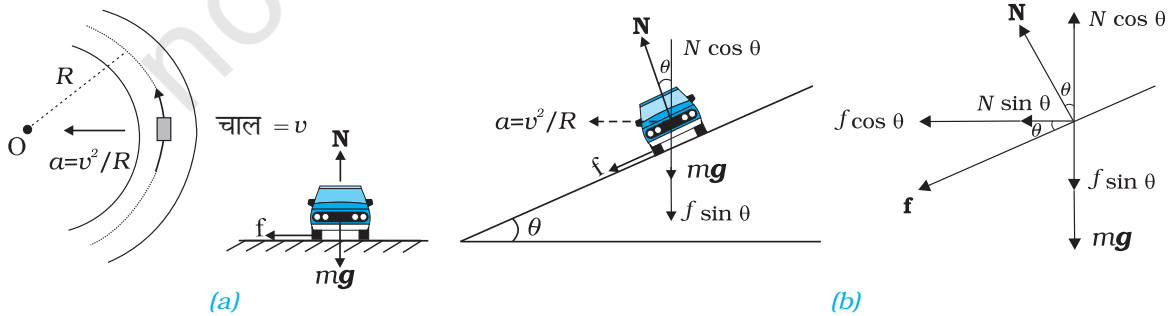
क्योंकि यहाँ ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई त्वरण नहीं है, अतः

$$N - mg = 0$$
$$N = mg \qquad (4.17)$$

वर्तुल गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल सड़क के पृष्ठ के अनुदिश है । यह बल कार के टायरों तथा सड़क के पृष्ठ के बीच पृष्ठ के अनुदिश संपर्क बल के घटक, जो परिभाषा के अनुसार घर्षण बल ही है, द्वारा प्रदान किया जाना चाहिए। ध्यान दीजिए, यहाँ स्थैतिक घर्षण ही अभिकेंद्र त्वरण प्रदान करता है। स्थैतिक घर्षण, घर्षण की अनुपस्थिति में वृत्त से दूर जाती गतिमान कार की समुपस्थित गति का विरोध करता है।

समीकरण (4.14) तथा (4.16) से हमें प्राप्त होता है

$$f \le \mu_s N = \frac{mv^2}{R}$$



चित्र 4.14 कार की (a) समतल सड़क, तथा (b) ढालू सड़क पर वर्तुल गति ।

© NCERT not to be republished

$$v^2 \le \frac{\mu_s RN}{m} = \mu_s Rg \qquad [\ N = mg\ ]$$

यह संबंध कार की संहति पर निर्भर नहीं करता। इससे यह प्रदर्शित होता है कि μ_s तथा R के किसी दिए हुए मान के लिए कार की वर्तुल गति की कोई संभावित अधिकतम चाल होती है, जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$v_{\text{अधिकतम}} = \sqrt{\mu_s Rg} \qquad (4.18)$$

ढालू सड़क पर कार की गति

यदि सड़क ढालू है (चित्र 4.14b), तो हम कार की वर्तुल गति में घर्षण के योगदान को घटा सकते हैं। क्योंकि यहाँ फिर ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई त्वरण नहीं है, इसलिए नेट बल शून्य होगा। अत:

$$N\cos\theta = mg + f\sin\theta \qquad (4.19a)$$

N तथा f के घटकों द्वारा अभिकेंद्र बल प्राप्त किया जाता है :

$$N\sin\theta + f\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \qquad (4.19b)$$

यहाँ, पहले कि भाँति, $f \le \mu_s N$

$v_{\text{अधिकतम}}$ के लिए हम $f = \mu_s N$ लेते हैं।

समीकरण (4.19a) तथा (4.19b) को लिखा जा सकता है

$$N\cos\theta = mg + \mu_s N\sin\theta \qquad (4.20a)$$

$$N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = mv^2/R \qquad (4.20b)$$

अत: समीकरण (4.20a) से $N = \dfrac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$

समीकरण (4.20b) में N का मान रखने पर

$$\frac{mg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = \frac{mv^2_{\text{अधिकतम}}}{R}$$

या $v_{\text{अधिकतम}} = Rg\dfrac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}^{\frac{1}{2}}$ (4.21)

समीकरण (4.18) से तुलना करने पर हम देखते हैं कि ढालू सड़क पर कार की अधिकतम चाल समतल सड़क पर कार की अधिकतम संभव चाल से अधिक है। समीकरण (4.21) में $\mu_s = 0$ के लिए,

$$v_0 = (Rg\tan\theta)^{1/2} \qquad (4.22)$$

इस चाल पर आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए घर्षण बल की कोई आवश्यकता नहीं होती। इस चाल से ढालू सड़क पर कार चलाने पर कार के टायरों की कम घिसाई होती है। इसी समीकरण से यह भी ज्ञात होता है कि $v < v_0$ के लिए घर्षण बल उपरिमुखी होगा तथा किसी कार को स्थिर स्थिति में केवल तभी पार्क किया जा सकता है जब $\tan\theta \le \mu_s$ हो।

▶ ***उदाहरण 4.10*** 18 km/h की चाल से समतल सड़क पर गतिमान कोई साइकिल सवार बिना चाल को कम किए 3 m त्रिज्या का तीव्र वर्तुल मोड़ लेता है। टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.1 है। क्या साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाएगा ?

हल सपाट सड़क पर अकेला घर्षण बल ही साइकिल सवार को बिना फिसले वर्तुल मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान कर सकता है। यदि चाल बहुत अधिक है, तथा/अथवा मोड़ अत्यधिक तीव्र है (अर्थात् त्रिज्या बहुत कम है), तब घर्षण बल इन स्थितियों में आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए पर्याप्त नहीं होता और साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाता है। साइकिल सवार के न फिसलने की शर्त समीकरण (4.18) द्वारा इस प्रकार है :

$$v^2 \le \mu_s Rg$$

अब, यहाँ इस प्रश्न में $R = 3$ m, $g = 9.8$ m s^{-2} तथा $\mu_s = 0.1$ अर्थात् $\mu_s Rg = 2.94$ m^{2}s^{-2}; तथा $v = 18$ km/h $= 5$ m s^{-1}; अर्थात् $v^2 = 25$ m^{2}s^{-2} अर्थात्, शर्त $v^2 \le \mu_s Rg$ का पालन नहीं होता। अत:, साइकिल सवार तीव्र वर्तुल मोड़ लेते समय फिसलकर गिरेगा। ◀

▶ ***उदाहरण 4.11*** 300 m त्रिज्या वाले किसी वृत्ताकार दौड़ के मैदान का ढाल 15° है। यदि मैदान और रेसकार के पट्टियों के बीच घर्षण गुणांक 0.2 है, तो (a) टायरों को घिसने से बचाने के लिए रेसकार की अनुकूलतम चाल, तथा (b) फिसलने से बचने के लिए अधिकतम अनुमेय चाल क्या है ?

हल ढालू मैदान पर बिना फिसले गतिशील रेसकार को वर्तुल मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने में घर्षण बल तथा अभिलंब बल के क्षैतिज घटक का योगदान होता है। रेसकार की अनुकूलतम चाल पर गति के लिए अभिलंब बल का घटक ही आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए पर्याप्त होता है तथा घर्षण बल की कोई आवश्यकता नहीं होती। समीकरण (4.22) द्वारा रेसकार की अनुकूलतम चाल v_0 को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

© NCERT not to be republished

$$v_0 = (Rg \tan \theta)^{1/2}$$

यहां $R = 300$ m, $\theta = 15^0$, $g = 9.8$ m s^{-2}; अत:

$$v_0 = 28.1 \text{ m s}^{-1}$$

समीकरण (4.21) द्वारा रेसकार की अधिकतम अनुमेय चाल को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$v_{\text{अधिकतम}} = Rg\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s \tan\theta}^{\frac{1}{2}} = 38.1 \text{ m s}^{-1}$$

4.11 यांत्रिकी में समस्याओं को हल करना

गति के जिन तीन नियमों के विषय में आपने इस अध्याय में अध्ययन किया है वे यांत्रिकी की आधारशिला हैं। अब आप यांत्रिकी की विविध प्रकार की समस्याओं को हल करने में सक्षम हैं। आमतौर पर यांत्रिकी की किसी प्ररूपी समस्या में बलों की क्रिया के अधीन केवल एक पिण्ड का ही समावेश नहीं होता। अधिकांश प्रकरणों में हम विभिन्न पिण्डों के ऐसे संयोजन पर विचार करते हैं जिनमें पिण्ड परस्पर एक दूसरे पर बल लगाते हैं। इसके अतिरिक्त संयोजन का प्रत्येक पिण्ड गुरुत्व बल का भी अनुभव करता है। इस प्रकार की किसी समस्या को हल करने का प्रयास करते समय हमें एक स्पष्ट तथ्य याद रखना परमावश्यक है कि समस्या का हल करने के लिए उस संयोजन के किसी भी भाग को चुना जा सकता है तथा उस भाग पर गति के नियमों को इस शर्त के साथ लागू किया जा सकता है कि चुने गए भाग पर संयोजन के शेष भागों द्वारा आरोपित सभी बलों को सम्मिलित करना सुनिश्चित कर लिया गया है। संयोजन के चुने गए भाग को हम निकाय कह सकते हैं तथा संयोजन के शेष भाग (निकाय पर आरोपित बलों के अन्य साधनों को सम्मिलित करते हुए) को वातावरण कह सकते हैं। इस विधि को वास्तव में हमने पहले भी कई उदाहरणों में अपनाया है। यांत्रिकी की किसी प्ररूपी समस्या को सुव्यवस्थित ढंग से हल करने के लिए हमें निम्नलिखित चरणों को अपनाना चाहिए :

(i) पिण्डों के संयोजन के विभिन्न भागों – संबंधों, टेकों, आदि को दर्शाने वाला संक्षिप्त योजनाबद्ध आरेख खींचिए।

(ii) संयोजन के किसी सुविधाजनक भाग को निकाय के रूप में चुनिए।

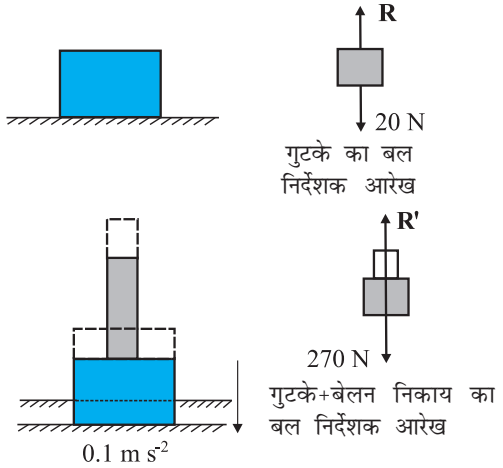
(iii) एक पृथक आरेख खींचिए जिसमें केवल निकाय तथा पिण्डों के संयोजन के शेष भागों द्वारा निकाय पर आरोपित सभी बलों को सम्मिलित करके दर्शाया गया हो। निकाय पर सभी अन्य साधनों द्वारा आरोपित बलों को भी सम्मिलित कीजिए। निकाय द्वारा वातावरण पर आरोपित बलों को इसमें सम्मिलित नहीं कीजिए। इस प्रकार के आरेख को **"बल-निर्देशक आरेख"** कहते हैं। (ध्यान दीजिए, इसका यह अर्थ नहीं है कि विचाराधीन निकाय पर कोई नेट बल नहीं है।)

(iv) किसी बल निर्देशक आरेख में बलों से संबंधित केवल वही सूचनाएँ (बलों के परिमाण तथा दिशाएँ) सम्मिलित कीजिए जो या तो आपको दी गई हैं अथवा जो निर्विवाद निश्चित हैं। (उदाहरण के लिए, किसी पतली डोरी में तनाव की दिशा सदैव डोरी की लंबाई के अनुदिश होती है।) शेष उन सभी को अज्ञात माना जाना चाहिए जिन्हें गति के नियमों के अनुप्रयोगों द्वारा ज्ञात किया जाना है।

(v) यदि आवश्यक हो, तो संयोजन से किसी अन्य निकाय के लिए भी यही विधि अपनाइए। ऐसा करने के लिए न्यूटन का तृतीय नियम प्रयोग कीजिए। अर्थात्, यदि A के बल निर्देशक आरेख में B के कारण A पर बल को **F** द्वारा दर्शाया गया है, तो B के बल निर्देशक आरेख में A के कारण B पर बल को **–F** द्वारा दर्शाया जाना चाहिए।

निम्नलिखित उदाहरण में उपरोक्त विधि का स्पष्टीकरण किया गया है :

> ***उदाहरण 4.12*** किसी कोमल क्षैतिज फर्श पर 2 kg संहति का लकड़ी का गुटका रखा है (चित्र 4.15)। जब इस गुटके के ऊपर 25 kg संहति का लोहे का बेलन रखा जाता है तो फर्श स्थिर गति से नीचे धँसता है तथा गुटका व बेलन एक साथ 0.1 m s^{-2} त्वरण से नीचे जाते हैं। गुटके की फर्श पर क्रिया (a) फर्श के धँसने से पूर्व तथा (b) फर्श के धँसने के पश्चात् क्या है ? g = 10 m s^{-2} लीजिए। समस्या में क्रिया-प्रतिक्रिया युगलों को पहचानिए।



चित्र 4.15

हल

(a) फर्श पर गुटका विरामावस्था में है। इसका बल निर्देशक आरेख गुटके पर दो बलों को दर्शाता है, पृथ्वी द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल = 2 × 10 = 20 N; तथा गुटके पर फर्श

© NCERT not to be republished

का अभिलंब बल R। प्रथम नियम के द्वारा गुटके पर आरोपित नेट बल शून्य होना चाहिए, अर्थात्, $R = 20$ N। तीसरे नियम का उपयोग करने पर गुटके की क्रिया अर्थात् गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल परिमाण में 20 N के बराबर है तथा इसकी दिशा ऊर्ध्वाधरत: अधोमुखी है।

(b) निकाय (गुटका + बेलन) नीचे की ओर $0.1\ m\ s^{-2}$ त्वरण से धँस रहा है। इसका बल निर्देशक आरेख निकाय पर दो बलों को दर्शाता है। पृथ्वी के कारण गुरुत्व बल (270 N); तथा फर्श का अभिलंब बल R'। ध्यान दीजिए, निकाय का बल निर्देशक आरेख गुटके और बेलन के बीच आंतरिक बलों को नहीं दर्शाता। निकाय पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर,

$$270 - R' = 27 \times 0.1$$
$$\text{अर्थात्}\ R' = 267.3\ \text{N}$$

तृतीय नियम के अनुसार फर्श पर निकाय की क्रिया 267.3 N के बराबर है तथा यह ऊर्ध्वाधरत: अधोमुखी है।

क्रिया-प्रतिक्रिया युगल

(a) के लिए :(i) पृथ्वी द्वारा गुटके पर आरोपित गुरुत्व बल (20 N) (क्रिया) तथा गुटके द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया) 20 N के बराबर उपरिमुखी निदेशित (आरेख में नहीं दर्शाया गया है)।

(ii) गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया); फर्श द्वारा गुटके पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

(b) के लिए (i) पृथ्वी द्वारा निकाय पर आरोपित गुरुत्व बल (270 N) (क्रिया); निकाय द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया) 270 N के बराबर उपरिमुखी निदेशित (आरेख में नहीं दर्शाया गया है ।)

(ii) निकाय द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया); फर्श द्वारा निकाय पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

इसके अतिरिक्त (b) के लिए बेलन द्वारा गुटके पर आरोपित बल तथा गुटके द्वारा बेलन पर आरोपित बल भी क्रिया-प्रतिक्रिया का एक युगल बनाते हैं।

याद रखने योग्य एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि किसी क्रिया-प्रतिक्रिया युगल की रचना दो पिण्डों के बीच पारस्परिक बलों, जो सदैव परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत होते हैं, से होती है। एक ही पिण्ड पर दो बलों, जो किसी विशेष परिस्थिति में परिमाण में समान व दिशा में विपरीत हो सकते हैं, से किसी क्रिया-प्रतिक्रिया युगल की रचना नहीं हो सकती। उदाहरण के लिए (a) अथवा (b) में पिण्ड पर गुरुत्व बल तथा फर्श द्वारा पिण्ड पर आरोपित अभिलंब बल कोई क्रिया-प्रतिक्रिया युगल नहीं है। ये बल संयोगवश (a) के लिए समान एवं विपरीत हैं क्योंकि पिण्ड विरामावस्था में है । परंतु प्रकरण (b) के लिए वे ऐसे नहीं हैं जैसा कि हमने पहले ही देख लिया है। निकाय का भार 270 N है जबकि अभिलंब बल $R' = 267.3$ N है। ◀

यांत्रिकी की समस्याओं को हल करने में बल निर्देशक आरेख खींचने की प्रथा अत्यंत सहायक है। यह आपको, अपने निकाय को स्पष्ट रूप से परिभाषित करने तथा उन सभी पिण्डों के कारण, जो स्वयं निकाय के भाग नहीं हैं, निकाय पर आरोपित सभी विभिन्न बलों पर विचार करने के लिए विवश करता है। इस अध्याय तथा आगामी अध्यायों में दिए गए अभ्यास-प्रश्नों द्वारा इस प्रथा के पोषण में आपको सहायता मिलेगी।

सारांश

1. अरस्तू का यह दृष्टिकोण, कि किसी पिण्ड की एकसमान गति रखने के लिए बल आवश्यक है, गलत है। व्यवहार में विरोधी घर्षण बल को प्रभावहीन करने के लिए कोई बल आवश्यक होता है ।
2. गैलीलियो ने आनत समतलों पर पिण्डों की गतियों का बहिर्वेशन करके जड़त्व के नियम की खोज की। न्यूटन का गति का प्रथम नियम वही नियम है, जिसे फिर से शब्दों में इस प्रकार व्यक्त किया गया है :
   "प्रत्येक पिण्ड तब तक अपनी विरामावस्था अथवा किसी सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में रहता है, जब तक कोई बाह्य बल उसे अन्यथा व्यवहार करने के लिए विवश नहीं करता।" सरल पदों में, प्रथम नियम इस प्रकार है *"यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल शून्य है तो उसका त्वरण शून्य होता है।"*
3. किसी पिण्ड का संवेग ($\mathbf{p}$) उसकी संहति (m) तथा वेग ($\mathbf{v}$) का गुणनफल होता है :
   $$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$
4. न्यूटन का गति का द्वितीय नियम :
   किसी पिण्ड के संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होती है तथा संवेग परिवर्तन आरोपित बल की दिशा में होता है। इस प्रकार :

© NCERT not to be republished

$$\mathbf{F} = k\frac{d\mathbf{p}}{dt} = k\,m\,\mathbf{a}$$

यहाँ **F** पिण्ड पर आरोपित नेट बाह्य बल है, तथा ***a*** पिण्ड में उत्पन्न त्वरण है। SI मात्रकों में राशियों के मात्रकों का चयन करने पर आनुपातिकता स्थिरांक $k = 1$ आता है। तब

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}$$

बल का S.I. मात्रक न्यूटन (प्रतीक N) है : $1\ \text{N} = 1\ \text{kg m s}^{-2}$

(a) द्वितीय नियम तथा प्रथम नियम में सामंजस्य है ($\mathbf{F} = 0$ का अर्थ है $\mathbf{a} = 0$)

(b) यह एक सदिश समीकरण है।

(c) सही अर्थों में तो यह किसी बिंदु कण पर लागू होती है। फिर भी किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय पर भी इसे लागू किया जा सकता है, परंतु शर्त यह है कि हम **F** को निकाय पर कुल आरोपित *बाह्य* बल तथा **a** को समस्त निकाय का त्वरण मानें।

(d) किसी निश्चित क्षण पर किसी बिंदु पर आरोपित बल **F** उसी क्षण उसी बिंदु पर **a** का निर्धारण करता है। अर्थात् द्वितीय नियम एक स्थानीय नियम है। किसी क्षण पर **a** गति के इतिहास पर निर्भर नहीं करता।

5. बल तथा समय का गुणनफल आवेग कहलाता है जो संवेग परिवर्तन के बराबर होता है।

आवेग की धारणा उस स्थिति में लाभदायक होती है जब कोई बृहत् बल अल्प काल के लिए कार्य करके संवेग में मापने योग्य परिवर्तन उत्पन्न कर देता है। क्योंकि बल का क्रिया समय अत्यंत अल्प है इसलिए यह माना जा सकता है कि आवेगी बल लगने के समय वस्तु की स्थिति में पर्याप्त परिवर्तन नहीं होगा।

6. न्यूटन का गति का तृतीय नियम :

प्रत्येक क्रिया की समान तथा विपरीत प्रतिक्रिया होती है।

सरल पदों में इस नियम को इस प्रकार भी अभिव्यक्त किया जा सकता है :

प्रकृति में बल सदैव ही पिण्डों के युगलों के बीच पाए जाते हैं। किसी पिण्ड A पर पिण्ड B द्वारा आरोपित बल पिण्ड B पर पिण्ड A द्वारा आरोपित बल के समान तथा विपरीत होता है।

क्रिया तथा प्रतिक्रिया समक्षणिक बल हैं। क्रिया तथा प्रतिक्रिया के बीच कारण-प्रभाव संबंध नहीं होता। इन दो पारस्परिक बलों में से किसी भी एक को क्रिया तथा अन्य को प्रतिक्रिया कहा जा सकता है। क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं। अत: ये बल एक दूसरे को निरस्त नहीं कर सकते। तथापि, किसी पिण्ड में आंतरिक क्रिया तथा प्रतिक्रिया बलों का योग अवश्य ही शून्य होता है।

7. *संवेग संरक्षण नियम*

कणों के किसी वियुक्त निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है। यह नियम गति के द्वितीय तथा तृतीय नियमों से व्युत्पन्न हुआ है।

8. *घर्षण*

घर्षण बल दो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्षिक गति (समुपस्थित अथवा वास्तविक) का विरोध करता है। यह संपर्क बल का संपर्क पृष्ठों के अनुदिश घटक है। स्थैतिक घर्षण f_s समुपस्थित आपेक्ष गति का विरोध करता है ; गतिज घर्षण f_k वास्तविक आपेक्ष गति का विरोध करता है। घर्षण बल संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करते तथा निम्नलिखित सन्निकट नियम की तुष्टि करते हैं :

$$f_s \le (f_s)_{\text{अधिकतम}} = \mu_s R$$

$$f_k = \mu_k R$$

μ_s (स्थैतिक घर्षण गुणांक) तथा μ_k (गतिज घर्षण गुणांक) संपर्क पृष्ठों के युगल के अभिलक्षणों के स्थिरांक हैं। प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि μ_k, μ_s से तुलना में बहुत कम होता है।

राशि	प्रतीक	मात्रक	विमाएँ	टिप्पणी
संवेग	**p**	kg m s^{-1} अथवा N s	[MLT^{-1}]	सदिश
बल	**F**	N	[MLT^{-2}]	$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ द्वितीय नियम
आवेग		kg m s^{-1} अथवा N s	[MLT^{-1}]	आवेग = बल समय = संवेग परिवर्तन
स्थैतिक घर्षण	f_s	N	[MLT^{2}]	$f_s \le \mu_s N$
गतिज घर्षण	f_k	N	[MLT^{-2}]	$f_k = \mu_k N$

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

1. बल सदैव गति की दिशा में नहीं होता। परिस्थितियों पर निर्भर करते हुए, **F**, **v** के अनुदिश, **v** के विपरीत, **v** के अभिलंबवत् अथवा **v** से कोई अन्य कोण बनाते हुए हो सकता है। प्रत्येक स्थिति में, यह त्वरण के समान्तर होता है।
2. यदि किसी क्षण $\mathbf{v} = 0$ है, अर्थात् यदि कोई पिण्ड क्षणिक विराम में है, तो इसका यह अर्थ नहीं होता कि उस क्षण पर बल अथवा त्वरण अवश्य ही शून्य हों। उदाहरण के लिए, जब ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंकी गई कोई गेंद अपनी अधिकतम ऊँचाई पर पहुँचती है, तो $\mathbf{v} = 0$ होता है, परंतु उस गेंद पर गेंद के भार mg के बराबर बल निरंतर लगा रहता है तथा त्वरण शून्य नहीं होता, यह g ही होता है।
3. किसी दिए गए समय पर किसी पिण्ड पर आरोपित बल उस समय उस पिण्ड के स्थान की अवस्थिति द्वारा ज्ञात किया जाता है। कोई पिण्ड बल का वहन अपनी गति के पूर्व इतिहास से नहीं करता। जिस क्षण कोई पत्थर किसी त्वरित रेलगाड़ी से बाहर गिरा दिया जाता है, उस क्षण के तुरंत पश्चात्, यदि चारों ओर की वायु के प्रभाव अपेक्षणीय हैं तो उस पत्थर पर कोई क्षैतिज बल (अथवा त्वरण) कार्यरत नहीं रहता। तब उस पत्थर पर केवल पृथ्वी का ऊर्ध्वाधर गुरुत्व बल ही कार्य करता है ।
4. गति के द्वितीय नियम $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ में **F** पिण्ड के बाहर के सभी भौतिक साधनों द्वारा आरोपित नेट बल है। **a** बल का प्रभाव है। $m\,\mathbf{a}$ को **F** के अतिरिक्त अन्य कोई बल नहीं समझा जाना चाहिए।
5. अभिकेंद्र बल को कोई अन्य प्रकार का बल नहीं समझना चाहिए। यह मात्र एक नाम है जो उस बल को दिया गया है जो वर्तुल मार्ग पर गतिमान किसी पिण्ड को त्रिज्यतः केंद्र की ओर त्वरण प्रदान करता है। हमें वृत्तीय गतियों में सदैव ही अभिकेंद्र बल के रूप में कुछ भौतिक बलों; जैसे- तनाव, गुरुत्वाकर्षण बल, वैद्युत बल, घर्षण बल आदि को खोजना चाहिए।
6. स्थैतिक घर्षण बल अपनी सीमा $\mu_s N$ ($f_s \leq \mu_s N$) तक एक स्वयं समायोजी बल है। बिना यह सुनिश्चित किए कि स्थैतिक घर्षण का अधिकतम मान कार्यरत हो गया है $f_s = \mu_s N$ कदापि मत रखिए।
7. मेज पर रखे पिण्ड के लिए सुपरिचित समीकरण $mg = R$ केवल तभी सही है, जब पिण्ड साम्यावस्था में हो। ये दोनों बल, mg तथा R भिन्न भी हो सकते हैं (जैसा कि त्वरित लिफ्ट में रखे पिण्ड के उदाहरण में)। mg और R में समानता का तृतीय नियम से कोई संबंध नहीं है।
8. गति के तृतीय नियम में पद 'क्रिया' तथा 'प्रतिक्रिया' का अर्थ किसी पिण्डों के युगल के बीच समक्षणिक पारस्परिक बलों से है। भाषा के अर्थ के विपरीत, क्रिया न तो प्रतिक्रिया से पहले घटित होती है और न ही प्रतिक्रिया का कारण होती है । क्रिया तथा प्रतिक्रिया भिन्न पिण्डों पर कार्य करती हैं।
9. विभिन्न पद जैसे 'घर्षण', 'अभिलंब प्रतिक्रिया', 'तनाव', वायु-प्रतिरोध', 'श्यान कर्षण', 'प्रणोद', 'उत्प्लावन बल', 'भार', 'अभिकेंद्र बल' इन सभी का तात्पर्य विभिन्न संदर्भों में 'बल' ही होता है। स्पष्टता के लिए, यांत्रिकी में मिलने वाले प्रत्येक बल तथा उसके तुल्य पदों को इस वाक्यांश में रूपान्तरित करना चाहिए 'A पर B द्वारा बल'।
10. गति के द्वितीय नियम को लागू करने के लिए, सजीव तथा निर्जीव पिण्डों के बीच कोई वैचारिक भिन्नता नहीं होती। किसी सजीव पिण्ड, जैसे किसी मानव को भी त्वरित करने के लिए बाह्य बल चाहिए। उदाहरण के लिए, बाह्य घर्षण बल के बिना हम धरती पर चल ही नहीं सकते।
11. भौतिकी में 'बल' की वस्तुनिष्ठ संकल्पना तथा 'बल का अनुभव' की व्यक्तिनिष्ठ संकल्पना के बीच कोई भ्रम नहीं होना चाहिए। किसी 'मेरी-गो-राउण्ड' में हमारे शरीर के सभी अंगों पर अंदर की ओर बल लगता है। परंतु हमें बाहर की ओर धकेले जाने का अनुभव होता है जो समुपस्थित गति की दिशा है।

अभ्यास

(सरलता के लिए आंकिक परिकलनाओं में $g = 10\ \text{m s}^{-2}$ लीजिए)

4.1 निम्नलिखित पर कार्यरत नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा लिखिए :

(a) एकसमान चाल से नीचे गिरती वर्षा की कोई बूंद,
(b) जल में तैरता 10 g संहति का कोई कार्क,
(c) कुशलता से आकाश में स्थिर रोकी गई कोई पतंग,
(d) $30\ \text{km h}^{-1}$ के एकसमान वेग से ऊबड़-खाबड़ सड़क पर गतिशील कोई कार,
(e) सभी गुरुत्वीय पिण्डों से दूर तथा वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों से मुक्त, अंतरिक्ष में तीव्र चाल वाला इलेक्ट्रॉन।

© NCERT not to be republished

4.2 0.05 kg संहति का कोई कंकड़ ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंका गया है। नीचे दी गई प्रत्येक परिस्थिति में कंकड़ पर लग रहे नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा लिखिए :

(a) उपरिमुखी गति के समय।

(b) अधोमुखी गति के समय।

(c) उच्चतम बिंदु पर जहाँ क्षण भर के लिए यह विराम में रहता है। यदि कंकड़ को क्षैतिज दिशा से 45° कोण पर फेंका जाए, तो क्या आपके उत्तर में कोई परिवर्तन होगा ?

वायु-प्रतिरोध को उपेक्षणीय मानिए।

4.3 0.1 kg संहति के पत्थर पर कार्यरत नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा निम्नलिखित परिस्थितियों में ज्ञात कीजिए :

(a) पत्थर को स्थिर रेलगाड़ी की खिड़की से गिराने के तुरंत पश्चात्,

(b) पत्थर को 36 km h^{-1} के एकसमान वेग से गतिशील किसी रेलगाड़ी की खिड़की से गिराने के तुरंत पश्चात्,

(c) पत्थर को 1 m s^{-2} के त्वरण से गतिशील किसी रेलगाड़ी की खिड़की से गिराने के तुरंत पश्चात्,

(d) पत्थर 1 m s^{-2} के त्वरण से गतिशील किसी रेलगाड़ी के फर्श पर पड़ा है तथा वह रेलगाड़ी के सापेक्ष विराम में है।

उपरोक्त सभी स्थितियों में वायु का प्रतिरोध उपेक्षणीय मानिए।

4.4 l लंबाई की एक डोरी का एक सिरा m संहति के किसी कण से तथा दूसरा सिरा चिकनी क्षैतिज मेज पर लगी खूँटी से बँधा है। यदि कण v चाल से वृत्त में गति करता है तो कण पर (केंद्र की ओर निदेशित) नेट बल है :

(i) T, (ii) $T-\frac{mv^2}{l}$, (iii) $T+\frac{mv^2}{l}$, (iv) 0

T डोरी में तनाव है। [सही विकल्प चुनिए]

4.5 15 m s^{-1} की आरंभिक चाल से गतिशील 20 kg संहति के किसी पिण्ड पर 50 N का स्थाई मंदन बल आरोपित किया गया है। पिण्ड को रुकने में कितना समय लगेगा ?

4.6 3.0 kg संहति के किसी पिण्ड पर आरोपित कोई बल 25 s में उसकी चाल को 2.0 m s^{-1} से 3.5 m s^{-1} कर देता है। पिण्ड की गति की दिशा अपरिवर्तित रहती है। बल का परिमाण व दिशा क्या है ?

4.7 4-0 kg संहति के किसी पिण्ड पर 8 N व 6 N के दो लंबवत् बल आरोपित हैं। पिण्ड के त्वरण का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

4.8 36 km h^{-1} की चाल से गतिमान किसी आटो रिक्शा का चालक सड़क के बीच एक बच्चे को खड़ा देखकर अपने वाहन को ठीक 4.0 s में रोककर उस बच्चे को बचा लेता है। यदि आटो रिक्शा बच्चे के ठीक निकट रुकता है, तो वाहन पर लगा औसत मंदन बल क्या है ? आटोरिक्शा तथा चालक की संहतियाँ क्रमशः 400 kg और 65 kg हैं।

4.9 20,000 kg उत्थापन संहति के किसी राकेट में 5 m s^{-2} के आरंभिक त्वरण के साथ ऊपर की ओर स्फोट किया जाता है। स्फोट का आरंभिक प्रणोद (बल) परिकलित कीजिए।

4.10 उत्तर की ओर 10 m s^{-1} की एकसमान आरंभिक चाल से गतिमान 0.40 kg संहति के किसी पिण्ड पर दक्षिण दिशा के अनुदिश 8.0 N का स्थाई बल 30 s के लिए आरोपित किया गया है। जिस क्षण बल आरोपित किया गया उसे $t = 0$, तथा उस समय पिण्ड की स्थिति $x = 0$ लीजिए। $t = -5$ s, 25 s, 100 s पर इस कण की स्थिति क्या होगी?

4.11 कोई ट्रक विरामावस्था से गति आरंभ करके 2.0 m s^{-2} के समान त्वरण से गतिशील रहता है। $t = 10$ s पर, ट्रक के ऊपर खड़ा एक व्यक्ति धरती से 6 m की ऊँचाई से कोई पत्थर बाहर गिराता है। $t = 11$ s पर, पत्थर का (a) वेग, तथा (b) त्वरण क्या है ? (वायु का प्रतिरोध उपेक्षणीय मानिए।)

4.12 किसी कमरे की छत से 2 m लंबी डोरी द्वारा 0.1 kg संहति के गोलक को लटकाकर दोलन आरंभ किए गए। अपनी माध्य स्थिति पर गोलक की चाल 1 m s^{-1} है। गोलक का प्रक्षेप-पथ क्या होगा यदि डोरी को उस समय काट दिया जाता है जब गोलक अपनी (a) चरम स्थितियों में से किसी एक पर है, तथा (b) माध्य स्थिति पर है ?

4.13 किसी व्यक्ति की संहति 70 kg है। वह एक गतिमान लिफ्ट में तुला पर खड़ा है जो

(a) 10 m s^{-1} की एकसमान चाल से ऊपर जा रही है,

(b) 5 m s^{-2} के एकसमान त्वरण से नीचे जा रही है,

(c) 5 m s^{-2} के एकसमान त्वरण से ऊपर जा रही है,

तो प्रत्येक प्रकरण में तुला के पैमाने का पाठ्यांक क्या होगा ?

(d) यदि लिफ्ट की मशीन में खराबी आ जाए और वह गुरुत्वीय प्रभाव में मुक्त रूप से नीचे गिरे तो पाठ्यांक क्या होगा?

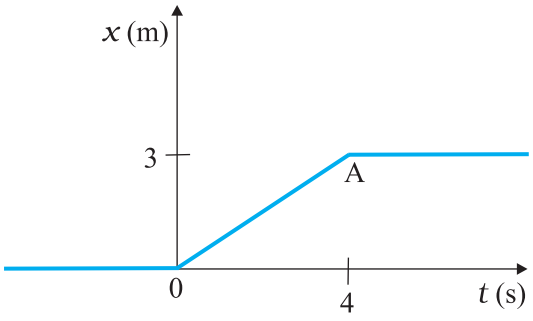
© NCERT not to be republished

4.14 चित्र 4.16 में 4 kg संहति के किसी पिण्ड का स्थिति-समय ग्राफ दर्शाया गया है।

(a) $t < 0$; $t > 4$ s; $0 < t < 4$ s के लिए पिण्ड पर आरोपित बल क्या है ?

(b) $t = 0$ तथा $t = 4$ s पर आवेग क्या है ?

(केवल एकविमीय गति पर विचार कीजिए)



चित्र 4.16

4.15 किसी घर्षणरहित मेज पर रखे 10 kg तथा 20 kg के दो पिण्ड किसी पतली डोरी द्वारा आपस में जुड़े हैं। 600N का कोई क्षैतिज बल (i) A पर, (ii) B पर डोरी के अनुदिश लगाया जाता है। प्रत्येक स्थिति में डोरी में तनाव क्या है ?

4.16 8 kg तथा 12 kg के दो पिण्डों को किसी हलकी अवितान्य डोरी, जो घर्षणरहित घिरनी पर चढ़ी है, के दो सिरों से बाँधा गया है। पिण्डों को मुक्त छोड़ने पर उनके त्वरण तथा डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए।

4.17 प्रयोगशाला के निर्देश फ्रेम में कोई नाभिक विराम में है। यदि यह नाभिक दो छोटे नाभिकों में विघटित हो जाता है, तो यह दर्शाइए कि उत्पाद विपरीत दिशाओं में गति करने चाहिए।

4.18 दो बिलियर्ड गेंद जिनमें प्रत्येक की संहति 0.05 kg है, 6 m s^{-1} की चाल से विपरीत दिशाओं में गति करती हुई संघट्ट करती है और संघट्ट के पश्चात् उसी चाल से वापस लौटती हैं। प्रत्येक गेंद पर दूसरी गेंद कितना आवेग लगाती है ?

4.19 100 kg संहति की किसी तोप द्वारा 0.020 kg का गोला दागा जाता है। यदि गोले की नालमुखी चाल 80 m s^{-1} है, तो तोप की प्रतिक्षेप चाल क्या है ?

4.20 कोई बल्लेबाज किसी गेंद को 45° के कोण पर विक्षेपित कर देता है। ऐसा करने में वह गेंद की आरंभिक चाल, जो 54 km/h^{-1} है, में कोई परिवर्तन नहीं करता। गेंद को कितना आवेग दिया जाता है ? (गेंद की संहति 0.15 kg है।)

4.21 किसी डोरी के एक सिरे से बँधा 0.25 kg संहति का कोई पत्थर क्षैतिज तल में 1.5 m त्रिज्या के वृत्त पर 40 rev/min की चाल से चक्कर लगाता है? डोरी में तनाव कितना है ? यदि डोरी 200 N के अधिकतम तनाव को सहन कर सकती है, तो वह अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए जिससे पत्थर को घुमाया जा सकता है।

4.22 यदि अभ्यास 4.21 में पत्थर की चाल को अधिकतम निर्धारित सीमा से भी अधिक कर दिया जाए, तथा डोरी यकायक टूट जाए, तो डोरी के टूटने के पश्चात् पत्थर के प्रक्षेप का सही वर्णन निम्नलिखित में से कौन करता है :

(a) वह पत्थर झटके के साथ त्रिज्यत: बाहर की ओर जाता है।

(b) डोरी टूटने के क्षण पत्थर स्पर्शरेखीय पथ पर उड़ जाता है।

(c) पत्थर स्पर्शी से किसी कोण पर, जिसका परिमाण पत्थर की चाल पर निर्भर करता है, उड़ जाता है।

4.23 स्पष्ट कीजिए कि क्यों :

(a) कोई घोड़ा रिक्त दिक्स्थान में किसी गाड़ी को खींचते हुए दौड़ नहीं सकता।

(b) किसी तीव्र गति से चल रही बस के यकायक रुकने पर यात्री आगे की ओर गिरते हैं।

(c) लान मूवर को धकेलने की तुलना में खींचना आसान होता है।

(d) क्रिकेट का खिलाड़ी गेंद को लपकते समय अपने हाथ गेंद के साथ पीछे को खींचता है।

© NCERT not to be republished

11088CH05

अध्याय 5

कार्य, ऊर्जा और शक्ति

5.1 भूमिका
5.2 कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणा : कार्य-ऊर्जा प्रमेय
5.3 कार्य
5.4 गतिज ऊर्जा
5.5 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य
5.6 परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय
5.7 स्थितिज ऊर्जा की अभिधारणा
5.8 यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण
5.9 किसी स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा
5.10 शक्ति
5.11 संघट्ट

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

5.1 भूमिका

दैनिक बोल चाल की भाषा में हम प्रायः 'कार्य', 'ऊर्जा', और 'शक्ति' शब्दों का प्रयोग करते हैं। यदि कोई किसान खेत जोतता है, कोई मिस्त्री ईंट ढोता है, कोई छात्र परीक्षा के लिए पढ़ता है या कोई चित्रकार सुन्दर दृश्यभूमि का चित्र बनाता है तो हम कहते हैं कि सभी कार्य कर रहे हैं परन्तु भौतिकी में कार्य शब्द को परिशुद्ध रूप से परिभाषित करते हैं। जिस व्यक्ति में प्रतिदिन चौदह से सोलह घण्टें कार्य करने की क्षमता होती है, उसे अधिक शक्ति या ऊर्जा वाला कहते हैं। हम लंबी दूरी वाले घातक को उसकी शक्ति या ऊर्जा के लिए प्रशंसा करते हैं। इस प्रकार ऊर्जा कार्य करने की क्षमता है। भौतिकी में भी ऊर्जा कार्य से इसी प्रकार सम्बन्धित है परन्तु जैसा ऊपर बताया गया है शब्द कार्य को और अधिक परिशुद्ध रूप से परिभाषित करते हैं। शक्ति शब्द का दैनिक जीवन में प्रयोग विभिन्न अर्थों में होता है। कराटे या बॉक्सिंग में शक्तिशाली मुक्का वही माना जाता है जो तेज गति से मारा जाता है। शब्द 'शक्ति' का यह अर्थ भौतिकी में इस शब्द के अर्थ के निकट है। हम यह देखेंगे कि इन पदों की भौतिक परिभाषाओं तथा इनके द्वारा मस्तिष्क में बने कार्यकीय चित्रणों के बीच अधिक से अधिक यह सम्बन्ध अल्प ही होता है। इस पाठ का लक्ष्य इन तीन भौतिक राशियों की धारणाओं का विकास करना है लेकिन इसके पहले हमें आवश्यक गणितीय भाषा मुख्यतः दो सदिशों के अदिश गुणनफल को समझना होगा।

5.1.1 अदिश गुणनफल

अध्याय 4 में हम लोगों ने सदिश राशियों और उनके प्रयोगों के बारे में पढ़ा है। कई भौतिक राशियाँ; जैसे-विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि सदिश हैं। हम लोगों ने सदिशों को जोड़ना और घटाना भी सीखा है। अब हम लोग सदिशों के गुणन के बारे में अध्ययन करेंगे। सदिशों को गुणा करने की दो विधियाँ हैं। प्रथम विधि से दो सदिशों के गुणनफल से अदिश गुणनफल प्राप्त होता है और इसे अदिश गुणनफल कहते हैं। दूसरी विधि में दो सदिशों के गुणनफल से एक सदिश प्राप्त होता है और इसे सदिश गुणनफल कहते हैं। सदिश गुणनफल के बारे में हम लोग अध्याय 6 में पढ़ेंगे। इस अध्याय में हम लोग अदिश गुणनफल की विवेचना करेंगे।

© NCERT not to be republished

किन्हीं दो सदिशों **A** तथा **B** के अदिश या बिंदु-गुणनफल (डॉट गुणनफल) को हम [**A.B (A** डॉट **B)**] के रूप में लिखते हैं और निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$\mathbf{A.B} = AB\cos\theta \qquad (5.1a)$$

यहाँ θ दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण है। इसे चित्र 5.1a में दिखाया गया है। क्योंकि, B तथा $\cos\theta$ सभी अदिश हैं इसलिए **A** तथा **B** का बिंदु गुणनफल भी अदिश राशि है। **A** व **B** में से प्रत्येक की अपनी-अपनी दिशा है किन्तु उनके अदिश गुणनफल की कोई दिशा नहीं है।

समीकरण (5.1a) से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है :

$$\mathbf{A\cdot B} = A\,(B\cos\theta)$$
$$= B\,(A\cos\theta)$$

ज्यामिति के अनुसार $B\cos\theta$ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है (चित्र 5.1b)। इसी प्रकार $A\cos\theta$ सदिश **A** का सदिश **B** पर प्रक्षेप है (देखिए चित्र 5.1c)। इस प्रकार **A·B** सदिश **A** के परिमाण तथा **B** के अनुदिश **A** के घटक के गुणनफल के बराबर होता है। दूसरे तरीके से यह **B** के परिमाण तथा **A** का सदिश **B** के अनुदिश घटक के गुणनफल के बराबर है।

समीकरण (5.1a) से यह संकेत भी मिलता है कि अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है-

$$\mathbf{A\cdot B = B\cdot A}$$

अदिश गुणनफल **वितरण-नियम** का भी पालन करते हैं :

$$\mathbf{A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C}$$

तथा,

$$\mathbf{A.}(\lambda\,\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{A\cdot B})$$

यहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

उपरोक्त समीकरणों की व्युत्पत्ति आपके लिए अभ्यास हेतु छोड़ी जा रही है।

अब हम एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ का अदिश गुणनफल निकालेंगे। क्योंकि वे एक दूसरे के लंबवत् हैं, इसलिए

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$
$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

दो सदिशों

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

का अदिश गुणनफल होगा :

$$\mathbf{A\cdot B} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (5.1b)$$

अदिश गुणनफल परिभाषा तथा समीकरण (5.1b) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

(i) $\mathbf{A\cdot A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

अथवा $A^2 = A^2_x + A^2_y + A^2_z \qquad (5.1c)$

क्योंकि $\mathbf{A\cdot A} = |\mathbf{A}||\mathbf{A}|\cos 0 = A^2$

(ii) $\mathbf{A\cdot B} = 0$ यदि **A** व **B** एक दूसरे के लंबवत् हैं।

उदाहरण 5.1 बल $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}})$ तथा विस्थापन $\mathbf{d} = (5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})$ के बीच का कोण ज्ञात करें। **F** का **d** पर प्रक्षेप भी ज्ञात करें।

हल $\mathbf{F\cdot d} = F_xd_x + F_yd_y + F_zd_z$
$= 3(5) + 4(4) + (-5)(3)$
$= 16$ unit

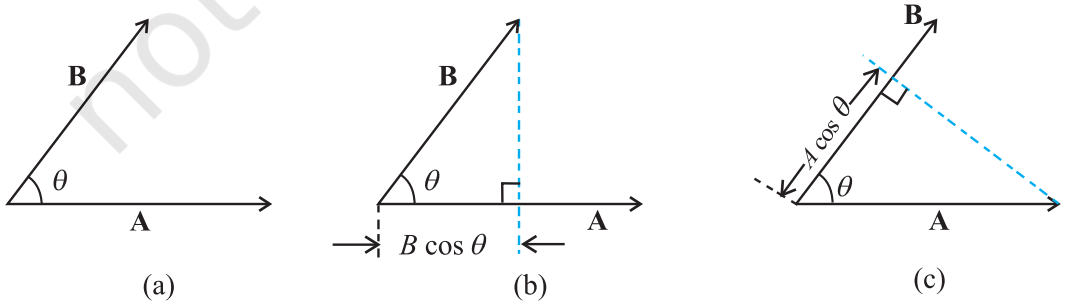
अत: $\mathbf{F\cdot d} = Fd\cos\theta = 16$ unit

अब $\mathbf{F\cdot F} = F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$
$= 9 + 16 + 25$
$= 50$ unit

तथा $\mathbf{d\cdot d} = d^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$
$= 25 + 16 + 9$
$= 50$ unit

$$\therefore \cos\theta = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{16}{50} = 0.32$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.32$$



चित्र 5.1 *(a) दो सदिशों* **A** *व* **B** *का अदिश गुणनफल एक अदिश होता है अर्थात्* $\mathbf{A\cdot B} = AB\cos\theta$, *(b)* $B\cos\theta$ *सदिश* **B** *का सदिश* **A** *पर प्रक्षेप है, (c)* $A\cos\theta$ *सदिश* **A** *का* **B** *पर प्रक्षेप है।*

© NCERT not to be republished

5.2 कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणा : कार्य-ऊर्जा प्रमेय

अध्याय 2 में, नियत त्वरण a के अंतर्गत सरल रेखीय गति के लिए आप निम्न भौतिक संबंध पढ़ चुके हैं;

$$v^2 - u^2 = 2as \qquad (5.2)$$

जहाँ u तथा v क्रमशः आरंभिक व अंतिम चाल और s वस्तु द्वारा चली गई दूरी है। दोनों पक्षों को $m/2$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mas = Fs \qquad (5.2a)$$

जहाँ आखिरी चरण न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार है। इस प्रकार सदिशों के प्रयोग द्वारा सहज ही समीकरण (5.2) का त्रिविमीय व्यापकीकरण कर सकते हैं

$$v^2 - u^2 = 2\,\mathbf{a.d}$$

यहाँ a और b पिंड के क्रमशः त्वरण और विस्थापन सदिश हैं। एक बार फिर दोनों पक्षों को $m/2$ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = m\,\mathbf{a.d} = \mathbf{F.d} \qquad (5.2b)$$

उपरोक्त समीकरण कार्य एवं गतिज ऊर्जा को परिभाषित करने के लिए प्रेरित करता है। समीकरण (5.2 b) में बायाँ पक्ष वस्तु के द्रव्यमान के आधे और उसकी चाल के वर्ग के गुणनफल के अंतिम और आरंभिक मान का अंतर है। हम इनमें से प्रत्येक राशि को 'गतिज ऊर्जा' कहते हैं और संकेत K से निर्दिष्ट करते हैं। समीकरण का दायाँ पक्ष वस्तु पर आरोपित बल का विस्थापन के अनुदिश घटक और वस्तु के विस्थापन का गुणनफल है। इस राशि को 'कार्य' कहते हैं और इसे संकेत W से निर्दिष्ट करते हैं। अतः समीकरण (5.2 b) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$K_f - K_i = W \qquad (5.3)$$

जहाँ K_i तथा K_f वस्तु की आरंभिक एवं अंतिम गतिज ऊर्जा हैं। कार्य किसी वस्तु पर लगने वाले बल और इसके विस्थापन के संबंध को बताता है। **अतः किसी निश्चित विस्थापन के दौरान वस्तु पर लगाया गया बल कार्य करता है।**

समीकरण (5.3) कार्य-ऊर्जा प्रमेय की एक विशेष स्थिति है जो यह प्रदर्शित करती है कि **किसी वस्तु पर लगाए गए कुल बल द्वारा किया गया कार्य उस वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।** परिवर्ती बल के लिए उपरोक्त व्युत्पत्ति का व्यापकीकरण हम अनुभाग 5.6 में करेंगे ।

> ***उदाहरण 5.2*** हम अच्छी तरह जानते हैं कि वर्षा की बूँद नीचे की ओर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल और बूँद के गिरने की दिशा के विपरीत लगने वाले प्रतिरोधी बल के प्रभाव के अधीन गिरती है। प्रतिरोधी बल बूँद की चाल के अनुक्रमानुपाती, परंतु अनिर्धारित होता है। माना कि 1.00 g द्रव्यमान की वर्षा की बूँद 1.00 km ऊँचाई से गिर रही है। यह धरातल पर 50.00 m s^{-1} की चाल से संघट्ट करती है। (a) गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? (b) अज्ञात प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य क्या है ?

हल (a) बूँद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \frac{1}{2}m v^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2}\times 10^{-3}\times 50\times 50$$

$$= 1.25\ \text{J}$$

यहाँ हमने यह मान लिया है कि बूँद विरामावस्था से गिरना आरंभ करती है।

गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_g = m g h$

मान लीजिए कि $g = 10\ \text{m s}^{-2}$ है।

अतः $W_g = m g h$

$= 10^{-3}\times 10 \times 10^3$

$= 10\ \text{J}$

(b) कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, $\Delta K = W_g + W_r$

जहाँ W_r प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य है। अतः

$W_r = \Delta K - W_g$

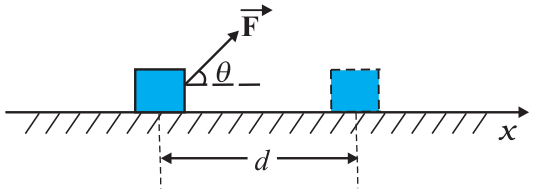
$= 1.25 - 10$

$= -8.75\ \text{J}$

ऋणात्मक है। ◀

5.3 कार्य

उपरोक्त अनुभाग में आपने देखा कि कार्य, बल और उसके द्वारा वस्तु के विस्थापन से संबंधित होता है। माना कि एक अचर बल **F**, किसी m द्रव्यमान के पिंड पर लग रहा है जिसके कारण पिंड का धनात्मक x-दिशा में होने वाला विस्थापन **d** है जैसा कि चित्र 5.2 में दर्शाया गया है।



चित्र 5.2 किसी पिंड का आरोपित बल **F** *के कारण विस्थापन* **d** ।

© NCERT not to be republished

अत: किसी बल द्वारा किया गया कार्य "बल के विस्थापन की दिशा के अनुदिश घटक और विस्थापन के परिमाण के गुणनफल" के रूप में परिभाषित किया जाता है। अत:

$$W = (F \cos \theta)\, d = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \qquad (5.4)$$

हम देखते हैं कि यदि वस्तु का विस्थापन शून्य है तो बल का परिमाण कितना ही अधिक क्यों न हो, वस्तु द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। जब कभी आप किसी ईंटों की दृढ़ दीवार को धक्का देते हैं तो कोई कार्य नहीं होता है। इस प्रक्रिया में आपकी मांसपेशियों का बारी-बारी से संकुचन और शिथिलीकरण हो रहा है और आंतरिक ऊर्जा लगातार व्यय हो रही है और आप थक जाते हैं। भौतिक विज्ञान में कार्य का अर्थ इसके दैनिक भाषा में प्रयोग के अर्थ से भिन्न है।

कोई भी कार्य संपन्न हुआ नहीं माना जाता है यदि :

(i) वस्तु का विस्थापन शून्य है, जैसा कि पूर्ववर्ती उदाहरण में आपने देखा। कोई भारोत्तोलक 150 kg द्रव्यमान के भार को 30 s तक अपने कंधे पर लगातार उठाए हुए खड़ा है तो वह कोई कार्य नहीं कर रहा है ।

(ii) बल शून्य है। किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड पर कोई क्षैतिज बल कार्य नहीं करता है, (क्योंकि घर्षण नहीं है) परंतु पिंड का विस्थापन काफी अधिक हो सकता है।

(iii) बल और विस्थापन परस्पर लंबवत् हैं क्योंकि $\theta = \pi/2$ rad (= 90°), $\cos(\pi/2) = 0$। किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड के लिए गुरुत्वाकर्षण बल mg कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि यह विस्थापन के लंबवत् कार्य कर रहा है। पृथ्वी के परित: चंद्रमा की कक्षा लगभग वृत्ताकार है। यदि हम चंद्रमा की कक्षा को पूर्ण रूप से वृत्ताकार मान लें, तो पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि चंद्रमा का तात्कालिक विस्थापन स्पर्शरेखीय है जबकि पृथ्वी का बल त्रिज्यीय (केंद्र की ओर) है, अर्थात् $\theta = \pi/2$ ।

कार्य धनात्मक व ऋणात्मक दोनों प्रकार का हो सकता है। यदि θ, 0° और 90° के मध्य है तो समीकरण (5.4) में $\cos\theta$ का मान धनात्मक होगा। यदि θ, 90° और 180° के मध्य है तो $\cos\theta$ का मान ऋणात्मक होगा। अनेक उदाहरणों में घर्षण बल, विस्थापन का विरोध करता है और $\theta = 180°$ होता है। ऐसी दशा में घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है ($\cos 180° = -1$)।

समीकरण (5.4) से स्पष्ट है कि कार्य और ऊर्जा की विमाएँ समान $[M L^2 T^{-2}]$ हैं । ब्रिटिश भौतिकविद जेम्स प्रेसकॉट जूल (1818-1869) के सम्मान में इनका SI मात्रक 'जूल' कहलाता है। चूंकि कार्य एवं ऊर्जा व्यापक रूप से भौतिक धारणाओं के रूप में प्रयोग किए जाते हैं, अत: ये वैकल्पिक मात्रकों से भरपूर हैं और उनमें से कुछ सारणी 5.1 में सूचीबद्ध हैं।

सारणी 5.1 : कार्य/ऊर्जा के वैकल्पिक मात्रक (जूल में)

अर्ग	10^{-7} J
इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV)	1.6×10^{-19} J
कैलोरी (cal)	4.186 J
किलोवाट-घंटा (kWh)	3.6×10^{6} J

उदाहरण 5.3 कोई साइकिल सवार ब्रेक लगाने पर फिसलता हुआ 10 m दूर जाकर रुकता है। इस प्रक्रिया की अवधि में, सड़क द्वारा साइकिल पर लगाया गया बल 200 N है जो उसकी गति के विपरीत है। (a) सड़क द्वारा साइकिल पर कितना कार्य किया गया? (b) साइकिल द्वारा सड़क पर कितना कार्य किया गया?

हल सड़क द्वारा साइकिल पर किया गया कार्य सड़क द्वारा साइकिल पर लगाए गए विरोधी (घर्षण बल) द्वारा किया किया कार्य है।

(a) यहाँ विरोधी बल और साइकिल के विस्थापन के मध्य कोण 180° (या π rad) है। अत: सड़क द्वारा किया गया कार्य

$$W_r = Fd \cos\theta$$
$$= 200 \times 10 \times \cos \pi$$
$$= -2000 \text{ J}$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार, इस ऋणात्मक कार्य के कारण ही साइकिल रुक जाती है।

(b) न्यूटन के गति के तृतीय नियमानुसार साइकिल द्वारा सड़क पर लगाया गया बल सड़क द्वारा साइकिल पर लगाए बल के बराबर परंतु विपरीत दिशा में होगा। इसका परिमाण 200 N है । तथापि, सड़क का विस्थापन नहीं होता है । अत: साइकिल द्वारा सड़क पर किया गया कार्य शून्य होगा। ◀

इस उदाहरण से हमें यह पता चलता है कि यद्यपि पिंड B द्वारा A पर लगाया गया बल, पिंड A द्वारा पिंड B पर लगाए गए बल के बराबर तथा विपरीत दिशा में है (न्यूटन का गति का तीसरा नियम) तथापि यह आवश्यक नहीं है कि पिंड B द्वारा A पर किया गया कार्य, पिंड A द्वारा B पर किए गए कार्य के बराबर तथा विपरीत दिशा में हो।

5.4 गतिज ऊर्जा

जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, यदि किसी पिंड का द्रव्यमान m और वेग $\mathbf{v}$ है तो इसकी गतिज ऊर्जा,

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}.\mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (5.5)$$

गतिज ऊर्जा एक अदिश राशि है।

© NCERT not to be republished

सारणी 5.2 विशिष्ट गतिज ऊर्जाएँ (K)

पिंड	द्रव्यमान (kg)	चाल ($m\ s^{-1}$)	K (J)
कार	2000	25	$6.3 \quad 10^5$
धावक (ऐथलीट)	70	10	$3.5 \quad 10^3$
गोली	$5 \quad 10^{-2}$	200	10^3
10 m की ऊँचाई से गिरता पत्थर	1	14	10^2
अंतिम वेग से गिरती वर्षा की बूँद	$3.5 \quad 10^{-5}$	9	$1.4 \quad 10^{-3}$
वायु का अणु	$\simeq 10^{-26}$	500	$\simeq 10^{-21}$

किसी पिंड की गतिज ऊर्जा, उस पिंड द्वारा किए गए कार्य की माप होती है जो वह अपनी गति के कारण कर सकता है। इस धारणा का अंतर्ज्ञान काफी समय से है। तीव्र गति से बहने वाली जल की धारा की गतिज ऊर्जा का उपयोग अनाज पीसने के लिए किया जाता है। पाल जलयान पवन की गतिज ऊर्जा का प्रयोग करते हैं। सारणी 5.2 में विभिन्न पिंडों की गतिज ऊर्जाएँ सूचीबद्ध हैं।

▶ ***उदाहरण 5.4*** किसी प्राक्षेपिक प्रदर्शन में एक पुलिस अधिकारी 50 g द्रव्यमान की गोली को 2cm मोटी नरम परतदार लकड़ी (प्लाइवुड) पर 200 $m\ s^{-1}$ की चाल से फायर करता है। नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की गतिज ऊर्जा प्रारंभिक ऊर्जा की 10% रह जाती है। लकड़ी से निकलते समय गोली की चाल क्या होगी?

हल गोली की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$mv^2/2 = 1000\ J$$

गोली की अंतिम गतिज ऊर्जा = 0.1 1000 = 100 J। यदि गोली की नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् चाल v_f है तो,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 100\ J$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\times 100\ J}{0.05\ kg}}$$

$$= 63.2\ m\ s^{-1}$$

नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की चाल लगभग 68% कम हो गई है (90% नहीं)। ◀

5.5 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य

अचर बल दुष्प्राप्य है। अधिकतर परिवर्ती बल के उदाहरण ही देखने को मिलते हैं। चित्र 5.3 एकविमीय परिवर्ती बल का आलेख है।

यदि विस्थापन Δx सूक्ष्म है तब हम बल $F(x)$ को भी लगभग नियत ले सकते हैं और तब किया गया कार्य

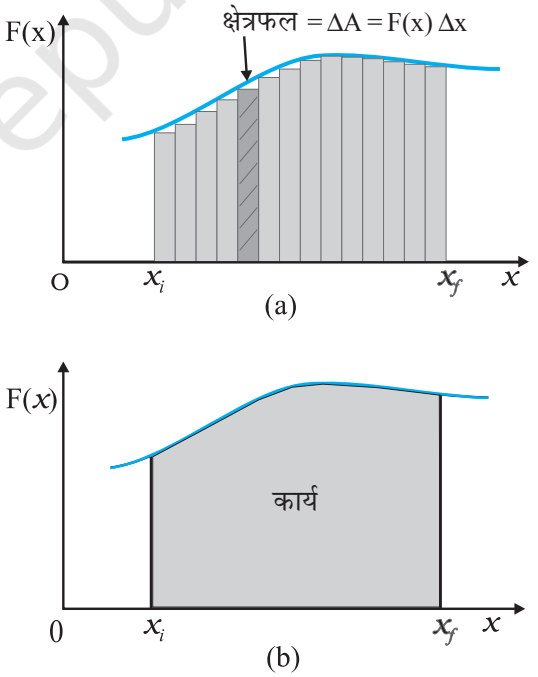
$$\Delta W = F(x)\ \Delta x$$

इसे चित्र 5.3(a) में समझाया गया है। चित्र 5.3(a) में क्रमिक आयताकार क्षेत्रफलों का योग करने पर हमें कुल किया गया कार्य प्राप्त होता है जिसे इस प्रकार लिखा जाता है :

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\Delta x \qquad (5.6)$$

जहाँ संकेत '$\sum$' का अर्थ है संकलन-फल (योगफल), जबकि 'x_i' वस्तु की आरंभिक स्थिति और 'x_f' वस्तु की अंतिम स्थिति को निरूपित करता है।

यदि विस्थापनों को अतिसूक्ष्म मान लिया जाए तब योगफल में पदों की संख्या असीमित रूप से बढ़ जाती है लेकिन योगफल एक निश्चित मान के समीप पहुंच जाता है जो चित्र 5.3(b) में वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के समान होता है।



चित्र 5.3 (a) परिवर्ती बल $F(x)$ द्वारा सूक्ष्म विस्थापन Δx में किया गया कार्य $\Delta W = F(x)\Delta x$ छायांकित आयत से निरूपित है। (b) $\Delta x \to 0$ के लिए सभी आयतों के क्षेत्रफलों को जोड़ने पर, वक्र द्वारा आच्छादित क्षेत्रफल, बल $F(x)$ द्वारा किए गए कार्य के ठीक बराबर है।

© NCERT not to be republished

अत: किया गया कार्य

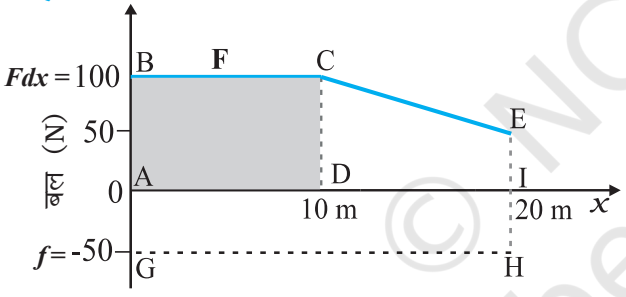
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{xi}^{xf} F(x)\Delta x$$

$$= \int_{xi}^{xf} F(x)\, dx \qquad (5.7)$$

जहाँ '*lim*' का अर्थ है 'योगफल की सीमा' जबकि Δx नगण्य रूप से सूक्ष्म मानों की ओर अग्रसर है। इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए किए गए कार्य को बल का विस्थापन पर सीमांकित समाकलन, के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ।

उदाहरण 5.5 कोई स्त्री खुरदरी सतह वाले रेलवे प्लेटफार्म पर संदूक को खिसकाती है। वह 10 m की दूरी तक 100 N का बल आरोपित करती है। उसके पश्चात्, उत्तरोत्तर वह थक जाती है और उसके द्वारा आरोपित बल रेखीय रूप से घटकर 50 N हो जाता है। संदूक को कुल 20 m की दूरी तक खिसकाया जाता है। स्त्री द्वारा संदूक पर आरोपित बल और घर्षण बल जो कि 50 N है, तथा विस्थापन के बीच ग्राफ खींचिए। दोनों बलों द्वारा 20 m तक किए गए कार्य का परिकलन कीजिए ।

हल चित्र 5.4 में आरोपित बल का आलेख प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 5.4 किसी स्त्री द्वारा आरोपित बल F और विरोधी घर्षण बल f तथा विस्थापन के बीच ग्राफ।

$x = 20$ m पर $F = 50$ N$(\neq 0)$ है। हमें घर्षण बल f दिया गया है जिसका परिमाण है

$|f| = 50$ N

यह गति का विरोध करता है और आरोपित बल **F** के विपरीत दिशा में कार्य करता है। इसलिए, इसे बल-अक्ष की ऋणात्मक दिशा की ओर प्रदर्शित किया गया है।

स्त्री द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$ (आयत ABCD + समलंब CEID) का क्षेत्रफल

$$W_F = 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$
$$= 1000 + 750$$
$$= 1750 \text{ J}$$

घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$ आयत AGHI का क्षेत्रफल

$$W_f = (-50) \times 20$$
$$= -1000 \text{J}$$

यहाँ क्षेत्रफल का बल-अक्ष के ऋणात्मक दिशा की ओर होने से, क्षेत्रफल का चिह्न ऋणात्मक है। ◀

5.6 परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय

हम परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय को सिद्ध करने के लिए कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणाओं से भलीभांति परिचित हैं। यहाँ हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय के एकविमीय पक्ष तक ही विचार को सीमित करेंगे। गतिज ऊर्जा परिवर्तन की दर है :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\ \frac{1}{2} m v^2$$

$$= m \frac{dv}{dt} v$$

$$= Fv \text{ (न्यूटन के दूसरे नियमानुसार } = m\frac{dv}{dt} = F)$$

$$= F\frac{dx}{dt}$$

अत: $dK = F dx$

प्रारंभिक स्थिति x_i से अंतिम स्थिति x_f तक समाकलन करने पर,

$$\int_{K_i}^{K_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

जहाँ x_i और x_f के संगत K_i और K_f क्रमश: प्रारंभिक एवं अंतिम गतिज ऊर्जाएँ हैं।

या $$K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F dx \qquad (5.8\text{ a})$$

समीकरण (5.7) से प्राप्त होता है

$$K_f - K_i = W \qquad (5.8\text{ b})$$

इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय सिद्ध होती है।

हालांकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय अनेक प्रकार के प्रश्नों को हल करने में उपयोगी है परंतु यह न्यूटन के द्वितीय नियम की पूर्णरूपेण गतिकीय सूचना का समावेश नहीं करती है। वास्तव में यह न्यूटन के द्वितीय नियम का समाकल रूप है। न्यूटन का द्वितीय नियम किसी क्षण, त्वरण तथा बल के बीच संबंध दर्शाता है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय में एक काल के लिए समाकल निहित है। इस दृष्टि से न्यूटन के द्वितीय नियम में निहित कालिक सूचना कार्य ऊर्जा प्रमेय में स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं होता। बल्कि एक निश्चित काल के लिए समाकलन के रूप में होता है। दूसरी ध्यान देने की बात यह है कि दो या तीन विमाओं में न्यूटन का द्वितीय नियम सदिश रूप में होता है जबकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय अदिश रूप में होता है।

© NCERT not to be republished

न्यूटन के द्वितीय नियम में दिशा संबंधित निहित ज्ञान भी कार्य ऊर्जा प्रमेय जैसे- अदिश संबंध में निहित नहीं है।

▶ **उदाहरण 5.6** m (=1kg) द्रव्यमान का एक गुटका क्षैतिज सतह पर $v_i = 2\ \text{m s}^{-1}$ की चाल से चलते हुए $x = 0.10$ m से $x = 2.01$m के खुरदरे हिस्से में प्रवेश करता है। गुटके पर लगने वाला मंदक बल (F_r) इस क्षेत्र में x के व्युत्क्रमानुपाती है,

$$F_r = \frac{-k}{x} \quad 0.1 < x < 2.01\,\text{m}$$

$$= 0 \quad x < 0.1\,\text{m} \text{ और } x > 2.01\,\text{m} \text{ के लिए}$$

जहाँ $k = 0.5$J। गुटका जैसे ही खुरदरे हिस्से को पार करता है, इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा और चाल v_f की गणना कीजिए।

हल समीकरण (5.8 a) से

$$K_f = K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}mv_i^2 - k\ln(x)\Big|_{0.1}^{2.01}$$

$$= \frac{1}{2}mv_i^2 - k\ln(2.01/0.1)$$

$$= 2 - 0.5\ln(20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5\,\text{J}$$

$$v_f = \sqrt{2K_f/m} = 1\,\text{m s}^{-1}$$

ध्यान दीजिए कि ln आधार e पर किसी संख्या का प्राकृतिक लघुगणक है, न कि आधार 10 पर किसी संख्या का [$\ln X = \log_e X = 2.303 \log_{10} X$] ◀

5.7 स्थितिज ऊर्जा की अभिधारणा

यहाँ 'स्थितिज' शब्द किसी कार्य को करने की संभावना या क्षमता को व्यक्त करता है। स्थितिज ऊर्जा की धारणा 'संग्रहित' ऊर्जा से संबंधित है। किसी खिंचे हुए तीर-कमान के तार (डोरी) की ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है। जब इसे ढीला छोड़ा जाता है तो तीर तीव्र चाल से दूर चला जाता है। पृथ्वी के भूपृष्ठ पर भ्रंश रेखाएँ संपीडित कमानियों के सदृश होती हैं। उनकी स्थितिज ऊर्जा बहुत अधिक होती है। जब ये भ्रंश रेखाएँ फिर से समायोजित हो जाती हैं तो भूकंप आता है। किसी भी पिंड की स्थितिज ऊर्जा (संचित ऊर्जा) उसकी स्थिति या अभिविन्यास के कारण होती है। पिंड को मुक्त रूप से छोड़ने पर इसमें संचित ऊर्जा, गतिज ऊर्जा के रूप में निर्मुक्त होती है। आइए, अब हम स्थितिज ऊर्जा की धारणा को एक निश्चित रूप देते हैं।

पृथ्वी की सतह के समीप m द्रव्यमान की एक गेंद पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल mg है। g को पृथ्वी की सतह के समीप अचर माना जा सकता है। यहाँ समीपता से तात्पर्य यह है कि गेंद की पृथ्वी की सतह से ऊँचाई h, पृथ्वी की त्रिज्या R_E की तुलना में अति सूक्ष्म है ($h << R_E$), अतः हम पृथ्वी के पृष्ठ पर g के मान में परिवर्तन की उपेक्षा कर सकते हैं।* माना कि गेंद को बिना कोई गति प्रदान किए h ऊँचाई तक ऊपर उठाया जाता है। अतः बाह्य कारक द्वारा गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य mgh होगा। यह कार्य, स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। किसी पिण्ड की h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा उसी पिण्ड को उसी ऊँचाई तक उठाने में गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है।

$$V(h) = mgh$$

यदि h को परिवर्ती लिया जाता है तो यह सरलता से देखा जा सकता है कि गुरुत्वाकर्षण बल F, h के सापेक्ष $V(h)$ के ऋणात्मक अवकलज के समान है

$$F = -\frac{d}{dh}V(h) = -mg$$

यहाँ ऋणात्मक चिह्न प्रदर्शित करता है कि गुरुत्वाकर्षण बल नीचे की ओर है। जब गेंद को छोड़ा जाता है तो यह बढ़ती हुई चाल से नीचे आती है। पृथ्वी की सतह से संघट्ट से पूर्व इसकी चाल शुद्धगतिकी संबंध द्वारा निम्न प्रकार दी जाती है

$$v^2 = 2gh$$

इसी समीकरण को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

जो यह प्रदर्शित करता है कि जब पिण्ड को मुक्त रूप से छोड़ा जाता है तो पिंड की h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा पृथ्वी पर पहुंचने तक स्वतः ही गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है।

प्राकृतिक नियमानुसार, स्थितिज ऊर्जा की धारणा केवल उन्हीं बलों की श्रेणी में लागू होती है जहाँ बल के विरुद्ध किया गया कार्य, ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है और जो बाह्य कारक के हट जाने पर स्वतः गतिज ऊर्जा के रूप में दिखाई पड़ती है। गणितानुसार स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को (सरलता के लिए एक-विमा में)

* गुरुत्वीय त्वरण g के मान में ऊंचाई के साथ परिवर्तन पर विचार गुरुत्वाकर्षण (अध्याय 7) में करेंगे।

© NCERT not to be republished

परिभाषित किया जाता है यदि $F(x)$ बल को निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

यह निरूपित करता है कि

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{V_i}^{V_f} dV = V_i - V_f$$

किसी संरक्षी बल जैसे गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य पिण्ड की केवल आरंभिक तथा अंतिम स्थिति पर निर्भर करता है। पिछले अध्याय में हमने आनत समतल से संबंधित उदाहरणों का अध्ययन किया। यदि m द्रव्यमान का कोई पिण्ड h ऊंचाई के चिकने (घर्षणरहित) आनत तल के शीर्ष से विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो आनत समतल के अधस्तल (तली) पर इसकी चाल, आनति (झुकाव) कोण का ध्यान रखे बिना $\sqrt{2gh}$ होती है। इस प्रकार यहां पर पिण्ड mgh गतिज ऊर्जा प्राप्त कर लेता है। यदि किया गया कार्य या गतिज ऊर्जा दूसरे कारकों, जैसे पिण्ड के वेग या उसके द्वारा चले गए विशेष पथ की लंबाई पर निर्भर करता है तब यह बल असंरक्षी होता है।

कार्य या गतिज ऊर्जा के सदृश स्थितिज ऊर्जा की विमा $[ML^2T^{-2}]$ और SI मात्रक जूल (J) है। याद रखिए कि संरक्षी बल के लिए, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन ΔV बल द्वारा किए गए ऋणात्मक कार्य के बराबर होता है।

$$\Delta V = -F(x)\,\Delta x \qquad (5.9)$$

इस अनुभाग में गिरती हुई गेंद के उदाहरण में हमने देखा कि किस प्रकार गेंद की स्थितिज ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो गई थी। यह यांत्रिकी में संरक्षण के महत्त्वपूर्ण सिद्धांत की ओर संकेत करता है जिसे हम अब परखेंगे।

5.8 यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण

सरलता के लिए, हम इस महत्त्वपूर्ण सिद्धांत का एकविमीय गति के लिए निदर्शन कर रहे हैं। मान लीजिए कि किसी पिण्ड का संरक्षी बल F के कारण विस्थापन Δx होता है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, किसी बल F के लिए

$$\Delta K = F(x)\,\Delta x$$

संरक्षी बल के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x)$ को निम्न रूप से परिभाषित किया जा सकता है :

$$-\Delta V = F(x)\Delta x$$

उपरोक्त समीकरण निरूपित करती है कि

$$\Delta K + \Delta V = 0$$

$$\Delta(K + V) = 0 \qquad (5.10)$$

इसका अर्थ है कि किसी पिण्ड की गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का योगफल, $K + V$ अचर होता है। इससे तात्पर्य है कि संपूर्ण पथ x_i से x_f के लिए

$$K_i + V(x_i) = K_f + V(x_f) \qquad (5.11)$$

यहाँ राशि $K + V(x)$, निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा कहलाती है। पृथक रूप से, गतिज ऊर्जा K और स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक परिवर्तित हो सकती है परंतु इनका योगफल अचर रहता है। उपरोक्त विवेचन से शब्द 'संरक्षी बल' की उपयुक्तता स्पष्ट होती है।

आइए, अब हम संक्षेप में संरक्षी बल की विभिन्न परिभाषाओं पर विचार करते हैं।

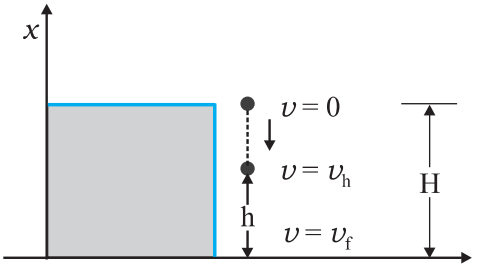
- कोई बल $F(x)$ संरक्षी है यदि इसे समीकरण (5.9) के प्रयोग द्वारा अदिश राशि $V(x)$ से प्राप्त कर सकते हैं। त्रिविमीय व्यापकीकरण के लिए सदिश अवकलज विधि का प्रयोग करना पड़ता है जो इस पुस्तक के विवेचना क्षेत्र से बाहर है।
- संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है जो निम्न संबंध से स्पष्ट है :

  $W = K_f - K_i = V(x_i) - V(x_f)$
- तीसरी परिभाषा के अनुसार, इस बल द्वारा बंद पथ में किया गया कार्य शून्य होता है।

यह एक बार फिर समीकरण (5.11) से स्पष्ट है, क्योंकि $x_i = x_f$ है।

अत: यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार ***किसी भी निकाय की कुल यान्त्रिक ऊर्जा अचर रहती है यदि उस पर कार्य करने वाले बल संरक्षी हैं।***

उपरोक्त विवेचना को अधिक मूर्त बनाने के लिए, एक बार फिर गुरुत्वाकर्षण बल के उदाहरण पर विचार करते हैं और स्प्रिंग बल के उदाहरण पर अगले अनुभाग में विचार करेंगे। चित्र 5.5 H ऊँचाई की किसी चट्टान से गिराई, m द्रव्यमान की गेंद का चित्रण करता है।



चित्र 5.5 H ऊँचाई की किसी चट्टान से गिराई गई, m द्रव्यमान की गेंद की स्थितिज ऊर्जा का गतिज ऊर्जा में रूपांतरण।

© NCERT not to be republished

गेंद की निदर्शित ऊँचाई, शून्य (भूमितल), h और H के संगत कुल यांत्रिक ऊर्जाएँ क्रमशः E_o, E_h और E_H हैं

$$E_H = m g H \qquad (5.11a)$$

$$E_h = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2 \qquad (5.11b)$$

$$E_0 = (1/2)\, mv_f^2 \qquad (5.11c)$$

अचर बल, त्रिविम-निर्भर बल $F(x)$ का एक विशेष उदाहरण है। अतः यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित है। इस प्रकार

$$E_H = E_0$$

अथवा, $mgH = \frac{1}{2}mv_f^2$

$$v_f = \sqrt{2gH}$$

उपरोक्त परिणाम अनुभाग 5.7 में मुक्त रूप से गिरते हुए पिण्ड के वेग के लिए प्राप्त किया गया था।

इसके अतिरिक्त

$$E_H = E_h$$

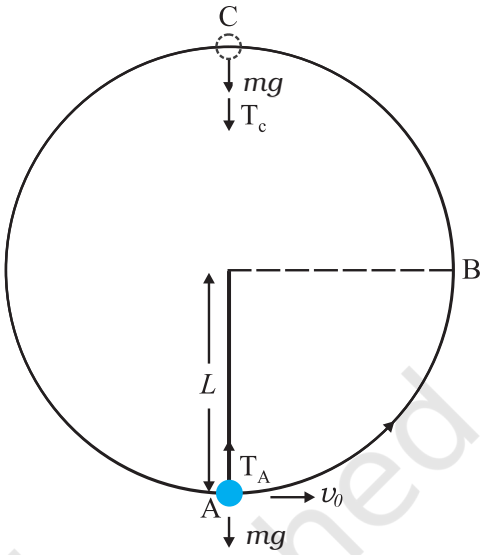
जो इंगित करता है कि

$$v_h^2 = 2g(H - h) \qquad (5.11d)$$

उपरोक्त परिणाम, शुद्धगतिकी का एक सुविदित परिणाम है।

H ऊँचाई पर, पिण्ड की ऊर्जा केवल स्थितिज ऊर्जा है। यह h ऊँचाई पर आंशिक रूप से गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है तथा भूमि तल पर पूर्णरूपेण गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है। इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण, यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धांत को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 5.7 m द्रव्यमान का एक गोलक L लंबाई की हलकी डोरी से लटका हुआ है। इसके निम्नतम बिंदु A पर क्षैतिज वेग v_0 इस प्रकार लगाया जाता है कि यह ऊर्ध्वाधर तल में अर्धवृत्ताकार प्रक्षेप्य पथ को इस प्रकार तय करता है कि डोरी केवल उच्चतम बिंदु C पर ढीली होती है जैसा कि चित्र 5.6 में दिखाया गया है। निम्न राशियों के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए : (*a*) v_0, (*b*) बिंदुओं B तथा C पर गोलक की चाल, तथा (*c*) बिंदु B तथा C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात (K_B/K_C)। गोलक के बिंदु C पर पहुंचने के बाद पथ की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।



चित्र 5.6

हल (*a*) यहाँ गोलक पर लगने वाले दो बाह्य बल हैं-गुरुत्व बल और डोरी में तनाव (T)। बाद वाला बल (तनाव) कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि गोलक का विस्थापन हमेशा डोरी के लंबवत् है। अतः गोलक की स्थितिज ऊर्जा केवल गुरुत्वाकर्षण बल से संबंधित है। निकाय की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E अचर है। हम निकाय की स्थितिज ऊर्जा निम्नतम बिंदु A पर शून्य ले लेते हैं। अतः बिंदु A पर

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (5.12)$$

$$T_A - mg = \frac{mv_0^2}{L} \quad \text{[न्यूटन के गति के द्वितीय नियमानुसार]}$$

यहाँ T_A, बिंदु A पर डोरी का तनाव है। उच्चतम बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है; अतः यहाँ बिंदु C पर डोरी का तनाव $T_C = 0$। अतः बिंदु C पर हमें प्राप्त होता है

$$E = \frac{1}{2}mv_c^2 + 2mgL \qquad (5.13)$$

$$mg = \frac{mv_c^2}{L} \quad \text{[न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार]} \qquad (5.14)$$

जहाँ v_c बिंदु C पर गोलक की चाल है। समीकरण (5.13) व (5.14) से प्राप्त होता है

$$E = \frac{5}{2}mgL$$

© NCERT not to be republished

इसे बिंदु A पर ऊर्जा से समीकृत करने पर

$$\frac{5}{2}mgL = \frac{m}{2}v_0^2$$

अथवा $v_0 = \sqrt{5gL}$

(b) समीकरण (5.14) से यह स्पष्ट है कि

$$v_C = \sqrt{gL}$$

अत: बिंदु B पर ऊर्जा है

$$E = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgL$$

इसे बिंदु A पर ऊर्जा के व्यंजक के बराबर रखने पर और (a) के परिणाम $v^2_0 = 5gL$ प्रयोग में लाने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{5}{2}m\,g\,L$$

$$\therefore v_B = \sqrt{3gL}$$

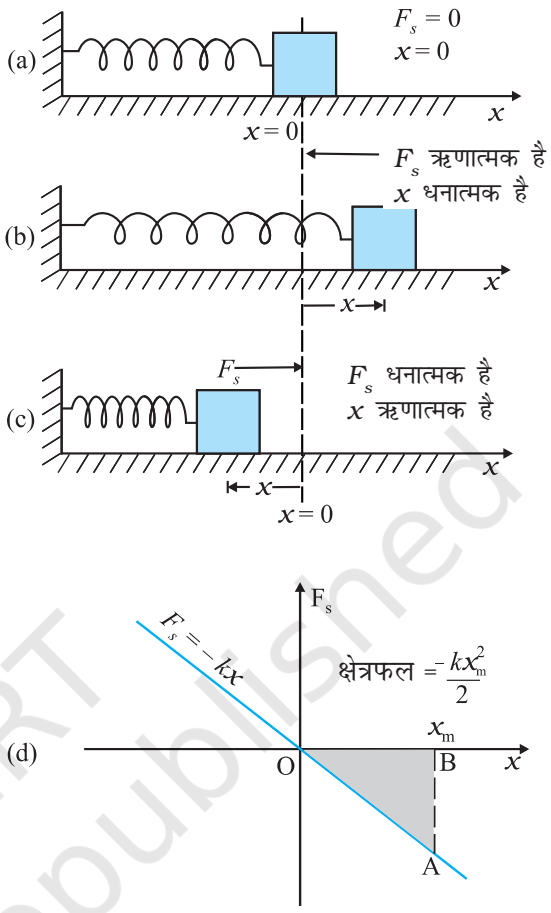
(c) बिंदु B व C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात

$$\frac{K_B}{K_C} = \frac{\frac{1}{2}mv_B^2}{\frac{1}{2}mv_C^2} = \frac{3}{1}$$

बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है और गोलक का वेग बाईं ओर को एवं क्षैतिज हो जाता है। यदि इस क्षण पर डोरी को काट दिया जाए तो गोलक एक क्षैतिज प्रक्षेप की भांति प्रक्षेप्य गति ठीक उसी प्रकार दर्शाएगा जैसा कि खड़ी चट्टान से क्षैतिज दिशा में किसी पत्थर को फेंकने पर होता है। अन्यथा गोलक लगातार अपने वृत्ताकार पथ पर गति करता रहेगा और परिक्रमण को पूर्ण करेगा। ◄

5.9 किसी स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा

कोई स्प्रिंग-बल एक परिवर्ती-बल का उदाहरण है जो संरक्षी होता है । चित्र 5.7 स्प्रिंग से संलग्न किसी गुटके को दर्शाता है जो किसी चिकने क्षैतिज पृष्ठ पर विरामावस्था में है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से जुड़ा है। स्प्रिंग हलका है और द्रव्यमान-रहित माना जा सकता है। किसी आदर्श स्प्रिंग में, स्प्रिंग-बल F_s, गुटके का अपनी साम्यावस्था स्थिति से विस्थापन x के समानुपाती होता है। गुटके का साम्यावस्था से विस्थापन धनात्मक (चित्र 5.7b) या ऋणात्मक (चित्र 5.7c) हो सकता है। स्प्रिंग के लिए बल का नियम, हुक का नियम कहलाता है और गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :



चित्र 5.7 *किसी स्प्रिंग के मुक्त सिरे से जुड़े हुए गुटके पर स्प्रिंग-बल का निदर्शन*

(a) जब माध्य स्थिति से विस्थापन x शून्य है तो स्प्रिंग बल F_s भी शून्य है ।

(b) खिंचे हुए स्प्रिंग के लिए $x > 0$ और $F_s < 0$

(c) संपीडित स्प्रिंग के लिए $x < 0$ और $F_s > 0$

(d) F_s तथा x के बीच खींचा गया आलेख । छायांकित त्रिभुज का क्षेत्रफल स्प्रिंग-बल द्वारा किए गए कार्य को निरूपित करता है। F_s और x के विपरीत चिह्नों के कारण, किया गया कार्य ऋणात्मक है,

$$W_s = -kx_m^2 / 2$$

$$F_s = -kx$$

जहाँ नियतांक k एक स्प्रिंग नियतांक है जिसका मात्रक $N\,m^{-1}$ है। यदि k का मान बहुत अधिक है, तब स्प्रिंग को दृढ़ कहा जाता है। यदि k का मान कम है, तब इसे नर्म (मृदु) कहा जाता है।

मान लीजिए कि हम गुटके को बाहर की तरफ, जैसा कि चित्र 5.7(b) में दिखाया गया है, धीमी अचर चाल से खींचते हैं । यदि स्प्रिंग का खिंचाव x_m है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया कार्य

© NCERT not to be republished

$$W = \int_0^{x_m} F_s \, dx = -\int_0^{x_m} kx \, dx$$

$$= -\frac{k x_m^2}{2} \qquad (5.15)$$

इस व्यंजक को हम चित्र 5.7(d) में दिखाए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल से भी प्राप्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि बाह्य खिंचाव बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है।

$$W = +\frac{k x_m^2}{2} \qquad (5.16)$$

यदि स्प्रिंग का विस्थापन x_c (<0) से संपीडित किया जाता है तब भी उपरोक्त व्यंजक सत्य है। स्प्रिंग-बल $W_s = -kx_c^2/2$ कार्य करता है जबकि बाह्य बल $W = -kx_c^2/2$ कार्य करता है।

यदि गुटके को इसके आरंभिक विस्थापन x_i से अंतिम विस्थापन x_f तक विस्थापित किया जाता है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} k x \, dx = \frac{k x_i^2}{2} - \frac{k x_f^2}{2} \qquad (5.17)$$

अत: स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है। विशेष रूप से जब गुटके को स्थिति x_i से खीचा गया हो और वापस x_i स्थिति तक आने दिया गया हो तो

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} k x \, dx = \frac{k x_i^2}{2} - \frac{k x_f^2}{2} = 0 \qquad (5.18)$$

अत: स्प्रिंग बल द्वारा किसी चक्रीय प्रक्रम में किया गया कार्य शून्य होता है। हमने यहां स्पष्ट कर दिया है कि (i) स्प्रिंग बल केवल स्थिति पर निर्भर करता है जैसा कि हुक द्वारा पहले कहा गया है ($F_s = -k x$); (ii) यह बल कार्य करता है जो किसी पिण्ड की आरंभिक एवं अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है; उदाहरणार्थ, समीकरण (5.17)। अत: स्प्रिंग बल एक **संरक्षी बल** है।

जब गुटका साम्यावस्था में है अर्थात् माध्य स्थिति से उसका विस्थापन शून्य है तब स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को हम शून्य मानते हैं। किसी खिंचाव (या संपीडन) x के लिए उपरोक्त विश्लेषण सुझाता है कि

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (5.19)$$

इसे सुविधापूर्वक सत्यापित किया जा सकता है कि $-dV/dx = -kx$ जो कि स्प्रिंग बल है। जब m द्रव्यमान के गुटके को चित्र 5.7 के अनुसार x_m तक खींचा जाता है और फिर विरामावस्था से छोड़ा जाता है, तब इसकी समूची यांत्रिक ऊर्जा स्वेच्छा से चुनी गई किसी भी स्थिति x पर निम्नलिखित रूप में दी जाएगी, जहाँ x का मान $-x_m$ से $+x_m$ के बीच है:

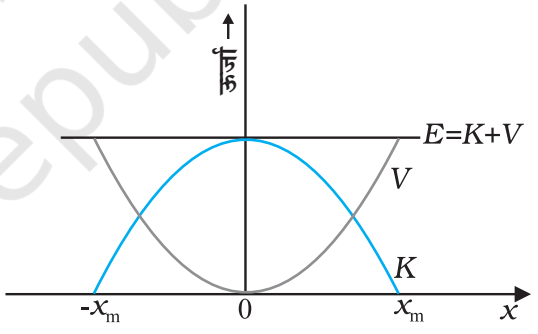
$$\frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

जहाँ हमने यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण नियम का उपयोग किया है। इसके अनुसार गुटके की चाल v_m और गतिज ऊर्जा साम्यावस्था $x = 0$ पर अधिकतम होगी, अर्थात्

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} k x_m^2$$

या, $$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_m$$

ध्यान दीजिए कि k/m की विमा $[T^{-2}]$ है और यह समीकरण विमीय रूप से सही है। यहाँ निकाय की गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में, और स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है, तथापि कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है। चित्र 5.8 में इसका ग्राफीय निरूपण किया गया है।



चित्र 5.8 किसी स्प्रिंग से जुड़े हुए गुटके की स्थितिज ऊर्जा V और गतिज ऊर्जा K के परवलयिक आलेख जो हुक के नियम का पालन करते हैं। ये एक-दूसरे के पूरक हैं अर्थात् इनमें जब एक घटता है तो दूसरा बढ़ता है, परंतु कुल यांत्रिक ऊर्जा $E = K + V$ हमेशा अचर रहती है।

▶ ***उदाहरण 5.8*** कार दुर्घटना को दिखाने के लिए (अनुकार) मोटरकार निर्माता विभिन्न स्प्रिंग नियतांकों के स्प्रिंगों का फ्रेम चढ़ाकर चलती हुई कारों के संघट्ट का अध्ययन करते हैं। मान लीजिए किसी प्रतीकात्मक अनुरूपण में कोई 1000 kg द्रव्यमान की कार एक चिकनी सड़क पर 18 km/h की चाल से चलते हुए, क्षैतिज फ्रेम पर चढ़ाए गए स्प्रिंग से संघट्ट करती है जिसका स्प्रिंग नियतांक 5.25×10^3 N m^{-1} है। स्प्रिंग का अधिकतम संपीडन क्या होगा?

© NCERT not to be republished

हल कार की गतिज ऊर्जा अधिकतम संपीडन पर संपूर्ण रूप से स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। गतिमान कार की गतिज ऊर्जा :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5 \times 5$$

$$K = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

जहाँ कार की चाल 18 km h^{-1} को इसके SI मान 5 m s^{-1} में परिवर्तित कर दिया गया है। [**यहाँ यह ध्यान रखने योग्य है कि 36 km h^{-1} = 10 m s^{-1}**]। यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार अधिकतम संपीडन x_m पर स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा (V), गतिशील कार की गतिज ऊर्जा (K) के बराबर होती है।

अत: $$V = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$= 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

हल करने पर हम प्राप्त करते हैं कि $x_m = 2.00$ m

ध्यान दें कि यहाँ इस स्थिति को हमने आदर्श रूप में प्रस्तुत किया है। यहाँ स्प्रिंग को द्रव्यमानरहित माना है और सड़क का घर्षण नगण्य लिया है। ◀

हम संरक्षी बलों पर कुछ टिप्पणी करते हुए इस अनुभाग का समापन करते हैं :

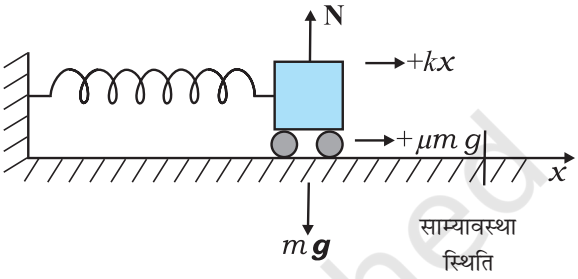
(i) उपरोक्त विवेचना में समय के विषय में कोई सूचना नहीं है। इस उदाहरण में हम संपीडन का परिकलन कर सकते हैं लेकिन उस समय अंतराल का परिकलन नहीं कर सकते जिसमें यह संपीडन हुआ है। अत: कालिक सूचना प्राप्त करने के लिए, इस निकाय के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम के हल की आवश्यकता है।

(ii) सभी बल संरक्षी नहीं हैं। उदाहरणार्थ, घर्षण एक असंरक्षी बल है। इस स्थिति में, ऊर्जा-संरक्षण नियम में किंचित परिवर्तन करना पड़ेगा। इसे उदाहरण 5.9 में स्पष्ट किया गया है।

(iii) स्थितिज ऊर्जा का शून्य स्वेच्छा से लिया गया है जिसे सुविधानुसार निश्चित कर लिया जाता है। स्प्रिंग-बल के लिए, $x = 0$ पर हम $V = 0$ लेते हैं, अर्थात् बिना खिंचे स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा शून्य थी। नियत गुरुत्वाकर्षण बल mg के लिए हमने पृथ्वी की सतह पर $V = 0$ लिया था। अगले अध्याय में हम देखेंगे कि गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियमानुसार बल के लिए, गुरुत्वाकर्षण स्रोत से अनन्त दूरी पर शून्य सर्वोत्तम रूप से परिभाषित होती है तथापि, किसी विवेचना में स्थितिज ऊर्जा के लिए एक बार शून्य की स्थिति निश्चित करने के पश्चात्, शुरू से अंत तक विवेचना में उसी नियम का पालन करना चाहिए।

▶ **उदाहरण 5.9** उदाहरण 5.8 में घर्षण गुणांक μ का मान 0.5 लेकर कमानी के अधिकतम संपीडन का परिकलन कीजिए।

हल : स्प्रिंग बल और घर्षण बल, दोनों ही संपीडन का विरोध करने में संयुक्त रूप से कार्य करते हैं, जैसा कि चित्र 5.9 में दिखाया गया है।



चित्र 5.9 किसी कार पर आरोपित बल।

यहाँ हम यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के बजाय कार्य-ऊर्जा प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन है :

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

कुल बल द्वारा किया गया कार्य :

$$W = -\frac{1}{2} k x_m^2 - \mu m g x_m$$

ΔK और W को समीकृत करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 + \mu m g x_m$$

यहाँ $\mu mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3$ N ($g = 10$ m s^{-2} लेने पर)। उपरोक्त समीकरण को व्यवस्थित करने पर हमें अज्ञात x_m के लिए निम्न द्विघातीय समीकरण प्राप्त होती है :

$$k x_m^2 + 2\mu m g x_m - m v^2 = 0$$

$$x_m = \frac{-\mu m g + \left[\mu^2 m^2 g^2 + m k v^2\right]^{1/2}}{k}$$

जहाँ हमने x_m धनात्मक होने के कारण इसका धनात्मक वर्गमूल ले लिया है। आंकिक मानों को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x_m = 1.35 \text{ m}$$

जो आशानुसार उदाहरण 5.8 में प्राप्त परिणाम से कम है। ◀

यदि मान लें कि पिंड पर लगने वाले दोनों बलों में एक संरक्षी बल F_c और दूसरा असंरक्षी बल F_{nc} है तो यांत्रिक

© NCERT not to be republished

ऊर्जा-संरक्षण के सूत्र में किंचित् परिवर्तन करना पड़ेगा। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से :

$$(F_c + F_{nc})\,\Delta x = \Delta K$$

परंतु $$F_c\,\Delta x = -\Delta V$$

अत: $$\Delta(K + V) = F_{nc}\,\Delta x$$

$$\Delta E = F_{nc}\,\Delta x$$

जहाँ E कुल यांत्रिक ऊर्जा है। समस्त पथ पर यह निम्न रूप ले लेती है

$$E_f - E_i = W_{nc}$$

जहाँ W_{nc} असंरक्षी बल द्वारा किसी पथ पर किया गया कुल कार्य है। ध्यान दीजिए कि W_{nc} i से f तक एक विशेष पथ पर निर्भर करता है जैसा कि संरक्षी बल में नहीं है।

5.10 शक्ति

बहुधा केवल यह जानना ही पर्याप्त नहीं है कि किसी पिंड पर कितना कार्य किया गया अपितु यह जानना भी आवश्यक है कि यह कार्य किस दर से किया गया है। हम कहते हैं कि व्यक्ति शारीरिक रूप से स्वस्थ है यदि वह केवल किसी भवन के चार तल तक चढ़ ही नहीं जाता है अपितु वह इन पर तेजी से चढ़ जाता है। अत: **शक्ति** को उस समय-दर से परिभाषित करते हैं जिससे कार्य किया गया या ऊर्जा स्थानांतरित हुई। किसी बल की औसत शक्ति उस बल द्वारा किए गए कार्य W और उसमें लगे समय t के अनुपात से परिभाषित करते हैं। अत:

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

तात्क्षणिक शक्ति को औसत शक्ति के सीमान्त मान के रूप में परिभाषित करते हैं जबकि समय शून्य की ओर अग्रसर हो रहा होता है, अर्थात्

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad (5.20)$$

जहाँ विस्थापन $\mathrm{d}\mathbf{r}$ में बल $\mathbf{F}$ द्वारा किया गया कार्य $\mathrm{d}W = \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r}$ होता है। अत: तात्क्षणिक शक्ति को निम्नलिखित प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं :

$$P = \mathbf{F}.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \mathbf{F}.\mathbf{v} \qquad (5.21)$$

जहाँ $\mathbf{v}$ तात्क्षणिक वेग है जबकि बल $\mathbf{F}$ है।

कार्य और ऊर्जा की भांति शक्ति भी एक अदिश राशि है। इसका SI मात्रक वाट (W) और विमा $[ML^2T^{-3}]$ है। 1W का मान $1\,J\,s^{-1}$ के बराबर होता है। अठारहवीं शताब्दी में भाप इंजन के प्रवर्तकों में से एक प्रवर्तक जेम्स वॉट के नाम पर शक्ति का मात्रक वाट (W) रखा गया है।

शक्ति का बहुत पुराना मात्रक अश्व शक्ति है।

1 अश्व शक्ति (hp) = 746 W

यह मात्रक आज भी कार, मोटरबाईक इत्यादि की निर्गत क्षमता को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त होता है।

जब हम विद्युत उपकरण; जैसे–विद्युत बल्ब, हीटर और प्रशीतक आदि खरीदते हैं तो हमें मात्रक वाट से व्यवहार करना होता है। एक 100 वाट का बल्ब 10 घंटे में एक किलोवाट-घंटा विद्युत ऊर्जा की खपत करता है।

अर्थात् 100 (वाट) × 10 (घंटा)

=1000 वाट-घंटा

= 1 किलोवाट घंटा (k Wh)

= 10^3 (W) × 3600 (s)

= 3.6×10^6 J

विद्युत-ऊर्जा की खपत के लिए मूल्य, मात्रक kW h में चुकाया जाता है जिसे साधारणतया 'यूनिट' के नाम से पुकारते हैं। ध्यान दें कि kWh ऊर्जा का मात्रक है, न कि शक्ति का।

उदाहरण 5.10 कोई लिफ्ट जिसका कुल द्रव्यमान (लिफ्ट + यात्रियों का) 1800 kg है, ऊपर की ओर $2\,m\,s^{-1}$ की अचर चाल से गतिमान है। 4000 N का घर्षण बल इसकी गति का विरोध करता है। लिफ्ट को मोटर द्वारा प्रदत्त न्यूनतम शक्ति का आकलन वाट और अश्व शक्ति में कीजिए।

हल लिफ्ट पर लगने वाला अधोमुखी बल

$F = mg + F_f = (1800 \times 10) + 4000 = 22000$ N

इस बल को संतुलित करने के लिए मोटर द्वारा पर्याप्त शक्ति की आपूर्ति की जानी चाहिए।

अत: $P = \mathbf{F}.\mathbf{v} = 22000 \times 2 = 44000$ W = 59 hp

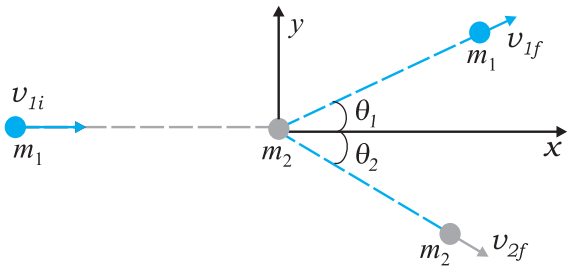
5.11 संघट्ट

भौतिकी में हम गति (स्थान में परिवर्तन) का अध्ययन करते हैं। साथ ही साथ हम ऐसी भौतिक राशियों की खोज करते हैं जो किसी भौतिक प्रक्रम में परिवर्तित नहीं होती हैं। ऊर्जा-संरक्षण एवं संवेग-संरक्षण के नियम इसके अच्छे उदाहरण हैं। इस अनुभाग में, हम इन नियमों का बहुधा सामने आने वाली परिघटनाओं, जिन्हें संघट्ट कहते हैं, में प्रयोग करेंगे। विभिन्न खेलों; जैसे–बिलियर्ड, मारबल या कैरम आदि में संघट्ट एक अनिवार्य घटक है। अब हम किन्हीं दो द्रव्यमानों का आदर्श रूप में प्रस्तुत संघट्ट का अध्ययन करेंगे।

मान लीजिए कि दो द्रव्यमान m_1 व m_2 हैं जिसमें कण m_1 चाल v_{1i} से गतिमान है जहाँ अधोलिखित 'i' आरंभिक चाल को निरूपित करता है। दूसरा द्रव्यमान m_2 स्थिर है। इस निर्देश

© NCERT not to be republished

फ्रेम का चयन करने में व्यापकता में कोई कमी नहीं आती। इस फ्रेम में द्रव्यमान m_1, दूसरे द्रव्यमान m_2 से जो विरामावस्था में है, संघट्ट करता है जो चित्र 5.10 में चित्रित किया गया है। संघट्ट के पश्चात् द्रव्यमान m_1 व m_2 विभिन्न दिशाओं में गति करते हैं। हम देखेंगे कि द्रव्यमानों, उनके वेगों और कोणों में निश्चित संबंध है।



चित्र 5.10 किसी द्रव्यमान m_1 का अन्य स्थिर द्रव्यमान m_2 से संघट्ट।

5.11.1 प्रत्यास्थ एवं अप्रत्यास्थ संघट्ट

सभी संघट्टों में निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है अर्थात् निकाय का आरंभिक संवेग उसके अंतिम संवेग के बराबर होता है। इसे निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है। जब दो पिंड संघट्ट करते हैं तो संघट्ट समय Δt में कार्यरत परस्पर आवेगी बल, उनके परस्पर संवेगों में परिवर्तन लाने का कारण होते हैं। अर्थात्

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{12}\Delta t$$
$$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{21}\Delta t$$

जहाँ $\mathbf{F}_{12}$ दूसरे पिंड द्वारा पहले पिंड पर आरोपित बल है। इसी तरह $\mathbf{F}_{21}$ पहले पिंड द्वारा दूसरे पिंड पर आरोपित बल है। न्यूटन के गति के तृतीय नियमानुसार $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ होता है। यह दर्शाता है कि

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0$$

यदि बल संघट्ट समय Δt के दौरान जटिल रूप से परिवर्तित हो रहे हों तो भी उपरोक्त परिणाम सत्य हैं। चूंकि न्यूटन का तृतीय नियम प्रत्येक क्षण पर सत्य है अत: पहले पिंड पर आरोपित कुल आवेग, दूसरे पिंड पर आरोपित आवेग के बराबर परंतु विपरीत दिशा में होगा।

दूसरी ओर निकाय की कुल गतिज ऊर्जा आवश्यक रूप से संरक्षित नहीं रहती है। संघट्ट के दौरान टक्कर और विकृति, ऊष्मा और ध्वनि उत्पन्न करते हैं। आरंभिक गतिज ऊर्जा का कुछ अंश ऊर्जा के दूसरे रूपों में रूपान्तरित हो जाता है। यदि उपरोक्त दोनों द्रव्यमानों को जोड़ने वाली 'स्प्रिंग' बिना किसी ऊर्जा-क्षति के अपनी मूल आकृति प्राप्त कर लेती है, जो पिंडों की आरंभिक गतिज ऊर्जा उनकी अंतिम गतिज ऊर्जा के बराबर होगी परंतु संघट्ट काल Δt के दौरान अचर नहीं रहती। इस प्रकार के संघट्ट को **प्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं। दूसरी ओर यदि विकृति दूर नहीं होती है और दोनों पिंड संघट्ट के पश्चात् आपस में सटे रहकर गति करें तो इस प्रकार के संघट्ट को **पूर्णत: अप्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं। इसके अतिरिक्त मध्यवर्ती स्थिति आमतौर पर देखने को मिलती है जब विकृति आंशिक रूप से कम हो जाती है और प्रारंभिक गतिज ऊर्जा की आंशिक रूप से क्षति हो जाती है। इसे समुचित रूप से **अप्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं।

5.11.2 एकविमीय संघट्ट

सर्वप्रथम हम किसी पूर्णत: अप्रत्यास्थ संघट्ट की स्थिति का अध्ययन करते हैं। चित्र 5.10 में

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \qquad \text{(संवेग संरक्षण के नियम से)}$$

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (5.22)$$

संघट्ट में गतिज ऊर्जा की क्षति:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 \quad \text{[समीकरण (5.22) द्वारा]}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2$$

जो कि अपेक्षानुसार एक धनात्मक राशि है।

आइए, अब प्रत्यास्थ संघट्ट की स्थिति का अध्ययन करते हैं। उपरोक्त नामावली के प्रयोग के साथ $\theta_1 = \theta_2 = 0$ लेने पर, रेखीय संवेग एवं गतिज ऊर्जा के संरक्षण की समीकरण निम्न है:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (5.23)$$

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \qquad (5.24)$$

समीकरण (5.23) और समीकरण (5.24) से हम प्राप्त करते हैं

$$m_1 v_{1i}(v_{2f} - v_{1i}) = m_1 v_{1f}(v_{2f} - v_{1f})$$

अथवा,

$$v_{2f}(v_{1i} - v_{1f}) = v_{1i}^2 - v_{1f}^2$$
$$= (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$$

अत: $$v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} \qquad (5.25)$$

इसे समीकरण (5.23) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (5.26)$$

© NCERT not to be republished

तथा $$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \quad (5.27)$$

इस प्रकार 'अज्ञात राशियाँ' $\{v_{1f}, v_{2f}\}$ ज्ञात राशियों $\{m_1, m_2, v_{1i}\}$ के पदों में प्राप्त हो गई हैं। आइए, अब उपरोक्त विश्लेषण से विशेष दशाओं में रुचिकर निष्कर्ष प्राप्त करते हैं।

दशा I : यदि दोनों द्रव्यमान समान हैं, अर्थात् $m_1 = m_2$, तब

$$v_{1f} = 0, \quad v_{2f} = v_{1i}$$

अर्थात् प्रथम द्रव्यमान विरामावस्था में आ जाता है और संघट्ट के पश्चात् दूसरा द्रव्यमान, प्रथम द्रव्यमान का आरंभिक वेग प्राप्त कर लेता है।

दशा II : यदि एक पिंड का द्रव्यमान दूसरे पिंड के द्रव्यमान से बहुत अधिक है, अर्थात् $m_2 >> m_1$, तब

$$v_{1f} \simeq -v_{1i} \qquad v_{2f} \simeq 0$$

भारी द्रव्यमान स्थिर रहता है जबकि हलके द्रव्यमान का वेग उत्क्रमित हो जाता है।

▶ ***उदाहरण 5.11* गतिशील न्यूट्रॉनों का मंदन :** किसी नाभिकीय रिऐक्टर में तीव्रगामी न्यूट्रॉन (विशिष्ट रूप से वेग $10^7\ \text{m s}^{-1}$) को $10^3\ \text{m s}^{-1}$ के वेग तक मंदित कर दिया जाना चाहिए ताकि नाभिकीय विखंडन अभिक्रिया में न्यूट्रॉन की यूरेनियम के समस्थानिक $^{235}_{92}\text{U}$ से अन्योन्यक्रिया करने की प्रायिकता उच्च हो जाए। सिद्ध कीजिए कि न्यूट्रॉन एक हलके नाभिक, जैसे ड्यूटीरियम या कार्बन जिसका द्रव्यमान न्यूट्रॉन के द्रव्यमान का मात्र कुछ गुना है, से प्रत्यास्थ संघट्ट करने में अपनी अधिकांश गतिज ऊर्जा की क्षति कर देता है। ऐसे पदार्थ प्रायः भारी जल (D_2O) अथवा ग्रेफाइट, जो न्यूट्रॉनों की गति को मंद कर देते हैं, 'मंदक' कहलाते हैं।

हल न्यूट्रॉन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा है

$$K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

जबकि समीकरण (5.26) से इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा है

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_{1i}^2$$

क्षयित आंशिक गतिज ऊर्जा है

$$f_1 = \frac{K_{1f}}{K_{1i}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

जबकि विमंदक नाभिक K_{2f}/K_{1i} द्वारा भिन्नात्मक गतिज ऊर्जा वृद्धि है।

$$f_2 = 1 - f_1 \text{ (प्रत्यास्थ संघट्ट)}$$

$$= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

उपरोक्त परिणाम को समीकरण (5.27) से प्रतिस्थापित करके भी सत्यापित किया जा सकता है।

ड्यूटीरियम के लिए, $m_2 = 2\ m_1$ और हम प्राप्त करते हैं $f_1 = 1/9$, जबकि $f_2 = 8/9$ है। अतः न्यूट्रॉन की लगभग 90% ऊर्जा ड्यूटीरियम को हस्तांतरित हो जाती है। कार्बन के लिए, $f_1 = 71.6\%$ और $f_2 = 28.4\%$ है। हालांकि, व्यवहार में, सीधा संघट्ट विरले ही होने के कारण यह संख्या काफी कम होती है। ◀

यदि दोनों पिंडों के आरंभिक तथा अंतिम वेग एक ही सरल रेखा के अनुदिश कार्य करते हैं तो ऐसे संघट्ट को एकविमीय संघट्ट अथवा **सीधा संघट्ट** कहते हैं। छोटे गोलीय पिंडों के लिए यह संभव है कि पिंड 1 की गति की दिशा विरामावस्था में रखे पिंड 2 के केन्द्र से होकर गुजरे। सामान्यतः, यदि आरंभिक वेग तथा अंतिम वेग एक ही तल में हों तो संघट्ट द्विविमीय कहलाता है।

5.11.3 द्विविमीय संघट्ट

चित्र 5.10 स्थिर द्रव्यमान m_2 से गतिमान द्रव्यमान m_1 का संघट्ट का चित्रण करता है। इस प्रकार के संघट्ट में रेखीय संवेग संरक्षित रहता है। चूंकि संवेग एक सदिश राशि है, अतः यह तीन दिशाओं $\{x, y, z\}$ के लिए तीन समीकरण प्रदर्शित करता है। संघट्ट के पश्चात् m_1 तथा m_2 के अंतिम वेग की दिशाओं के आधार पर समतल का निर्धारण कीजिए और मान लीजिए कि यह x-y समतल है। रेखीय संवेग के z-घटक का संरक्षण यह दर्शाता है कि संपूर्ण संघट्ट x-y समतल में है। x-घटक और y-घटक के समीकरण निम्न हैं :

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \quad (5.28)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \quad (5.29)$$

अधिकतर स्थितियों में यह माना जाता है कि $\{m_1, m_2, v_{1i}\}$ ज्ञात है। अतः संघट्ट के पश्चात्, हमें चार अज्ञात राशियाँ $\{v_{1f}, v_{2f}, \theta_1$ और $\theta_2\}$ प्राप्त होती हैं जबकि हमारे पास मात्र दो समीकरण हैं। यदि $\theta_1 = \theta_2 = 0$, हम पुनः एकविमीय संघट्ट के लिए समीकरण (5.24) प्राप्त कर लेते हैं।

अब यदि संघट्ट प्रत्यास्थ है तो,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (5.30)$$

यह हमें समीकरण (5.28) व (5.29) के अलावा एक और समीकरण देता है लेकिन अभी भी हमारे पास सभी अज्ञात राशियों

© NCERT not to be republished

का पता लगाने के लिए एक समीकरण कम है। अत: प्रश्न को हल करने के लिए, चार अज्ञात राशियों में से कम से कम एक और राशि, मान लीजिए θ_1, ज्ञात होनी चाहिए। उदाहरणार्थ, कोण θ_1 का निर्धारण संसूचक को कोणीय रीति में x-अक्ष से y-अक्ष तक घुमा कर किया जा सकता है। राशियों $\{m_1, m_2, v_{1i}, \theta_1\}$ के ज्ञात मान से हम समीकरण (5.28)–(5.30) का प्रयोग करके $\{v_{1f}, v_{2f}, \theta_2\}$ का निर्धारण कर सकते हैं।

उदाहरण 5.12 मान लीजिए कि चित्र 5.10 में चित्रित संघट्ट बिलियर्ड की समान द्रव्यमान ($m_1 = m_2$) वाली दो गेंदों के मध्य हुआ है जिसमें प्रथम गेंद क्यू (डण्डा) कहलाती है और द्वितीय गेंद 'लक्ष्य' कहलाती है। खिलाड़ी लक्ष्य गेंद को $\theta_2 = 37°$ के कोण पर कोने में लगी थैली में गिराना चाहता है। यहाँ मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है तथा घर्षण और घूर्णन गति महत्त्वपूर्ण नहीं हैं। कोण θ_1 ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि द्रव्यमान समान हैं अत: संवेग संरक्षण के नियमानुसार,

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$

समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर प्राप्त होता है

$$v_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f})$$

$$= v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2f}$$

$$= \{ v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}v_{2f} \cos (\theta_1 + 37°) \} \quad (5.31)$$

चूंकि संघट्ट प्रत्यास्थ है और द्रव्यमान $m_1 = m_2$ है, गतिज ऊर्जा के सरंक्षण, समीकरण (5.31) से हमें प्राप्त होता है

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (5.32)$$

उपरोक्त दोनों समीकरणों (5.31) और (5.32) की तुलना करने पर,

$$\cos (\theta_1 + 37°) = 0$$

अत: $\theta_1 + 37° = 90°$

अथवा, $\theta_1 = 53°$

इससे सिद्ध होता है कि जब समान द्रव्यमान के दो पिंड जिनमें से एक स्थिर है, पृष्ठसर्पी प्रत्यास्थ संघट्ट करते हैं तो संघट्ट के पश्चात्, दोनों एक-दूसरे से समकोण बनाते हुए गति करेंगे। ◀

यदि हम चिकने पृष्ठ वाले गोलीय द्रव्यमानों पर विचार करें और मान लें कि संघट्ट तभी होता है जब पिंड एक दूसरे को स्पर्श करे तो विषय अत्यंत सरल हो जाता है। मारबल, कैरम तथा बिलियार्ड के खेल में ठीक ऐसा ही होता है।

हमारे दैनिक जीवन में संघट्ट तभी होता है जब दो वस्तुएँ एक दूसरे को स्पर्श करें। लेकिन विचार कीजिए कि कोई धूमकेतु दूरस्थ स्थान से सूर्य की ओर आ रहा है अथवा अल्फा कण किसी नाभिक की ओर आता हुआ किसी दिशा में चला जाता है। यहाँ पर हमारी दूरी पर कार्यरत बलों से सामना होता है। इस प्रकार की घटना को प्रकीर्णन कहते हैं। जिस वेग तथा दिशाओं में दोनों कण गतिमान होंगे वह उनके आरंभिक वेग, उनके द्रव्यमान, आकार तथा आमाप तथा उनके बीच होने वाली अन्योन्य क्रिया के प्रकार पर निर्भर है।

सारांश

1. *कार्य-ऊर्जा प्रमेय* के अनुसार, किसी पिंड की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन उस पर आरोपित कुल बल द्वारा किया गया कार्य है।

$$K_f - K_i = W_{net}$$

2. कोई बल *संरक्षी* कहलाता है यदि (*i*) उसके द्वारा किसी पिंड पर किया गया कार्य पथ पर निर्भर न करके केवल सिरे के बिंदुओं $\{x_i, x_j\}$ पर निर्भर करता है, अथवा (*ii*) बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है, जब पिंड के लिए जो स्वेच्छा से किसी ऐसे बंद पथ में स्वत: अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाता है।

3. एकविमीय संरक्षी बल के लिए हम *स्थितिज ऊर्जा फलन* $V(x)$ को इस प्रकार परिभाषित सकते हैं

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

© NCERT not to be republished

अथवा, $$V_i - V_s = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

4. यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के अनुसार, यदि किसी पिंड पर कार्यरत बल संरक्षी हैं तो पिंड की कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती हैं।

5. m द्रव्यमान के किसी कण की पृथ्वी की सतह से x ऊँचाई पर *गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा* $V(x) = mgx$ होती है, जहाँ ऊँचाई के साथ g के मान में परिवर्तन उपेक्षणीय है।

6. k बल-नियतांक वाले स्प्रिंग, जिसमें खिंचाव x है, की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा होती है :

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

7. दो सदिशों के अदिश अथवा बिंदु गुणनफल को हम **A·B** लिखते हैं (इसे **A** डॉट **B** के रूप में पढ़ते हैं)**A·B** एक अदिश राशि है जिसका मान $AB\cos\theta$ होता है। θ सदिशों **A** व **B** के बीच का कोण है। **A·B** का मान चूंकि θ पर निर्भर करता है इसलिए यह धनात्मक, त्रृणात्मक अथवा शुन्य हो सकता है। दो सदिशों के अदिश गुणनफल की व्याख्या एक सदिश के परिमाण तथा दूसरे सदिश के पहले घटक के अनुदिश घटक के गुणनफल के रूप में भी कर सकते हैं। एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ व $\hat{\mathbf{k}}$ के लिए हमें निम्नलिखित तथ्य याद रखने चाहिए :

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

तथा $$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$$

अदिश गुणनफल क्रम-विनिमेय तथा वितरण नियमों का पालन करते हैं।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमा	मात्रक	टिप्पणी
कार्य	W	$[M L^2 T^{-2}]$	J	$W = \mathbf{F.d}$
गतिज ऊर्जा	K	$[M L^2 T^{-2}]$	J	$K = \frac{1}{2} mv^2$
स्थितिज ऊर्जा	$V(x)$	$[M L^2 T^{-2}]$	J	$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$
यांत्रिक ऊर्जा	E	$[M L^2 T^{-2}]$	J	$E = K + V$
स्प्रिंग नियतांक	k	$[M T^{-2}]$	N m^{-1}	$F = -kx$ $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$
शक्ति	P	$[M L^2 T^{-3}]$	W	$P = \mathbf{F.v}$ $P = \frac{dW}{dt}$

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

1. वाक्यांश "किए गए कार्य का परिकलन कीजिए" अधूरा है। हमें विशेष बल या बलों के समूह द्वारा किसी पिंड का निश्चित विस्थापन करने में किए गए कार्य का स्पष्ट उल्लेख करना चाहिए (अथवा संदर्भ देते हुए स्पष्टतया इंगित करना चाहिए)।
2. किया गया कार्य एक अदिश राशि है। यह भौतिक राशि धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है, जबकि द्रव्यमान और गतिज ऊर्जा धनात्मक अदिश राशियाँ हैं। किसी पिंड पर घर्षण या श्यान बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।
3. न्यूटन के तृतीय नियमानुसार, किन्हीं दो पिंडों के मध्य परस्पर एक-दूसरे पर आरोपित बलों का योग शून्य होता है।

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$

परंतु दो बलों द्वारा किए गए कार्य का योग सदैव शून्य नहीं होता है, अर्थात्

$$W_{12} + W_{21} \neq 0$$

तथापि, *कभी-कभी यह सत्य भी हो सकता है।*

4. कभी-कभी किसी बल द्वारा किए गए कार्य की गणना तब भी की जा सकती है जबकि बल की ठीक-ठीक प्रकृति का ज्ञान न भी हो। उदाहरण 5.2 से यह स्पष्ट है, जहाँ कार्य-ऊर्जा प्रमेय का ऐसी स्थिति में प्रयोग किया गया है।
5. कार्य-ऊर्जा प्रमेय न्यूटन के द्वितीय नियम से स्वतन्त्र नहीं है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय को न्यूटन के द्वितीय नियम के अदिश रूप में देखा जा सकता है। यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धांत को, संरक्षी बलों के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय के एक महत्त्वपूर्ण परिणाम के रूप में समझा जा सकता है।
6. कार्य-ऊर्जा प्रमेय सभी जड़त्वीय फ्रेमों में लागू होती है। इसे अजड़त्वीय फ्रेमों में भी लागू किया जा सकता है यदि विचारणीय पिंड पर आरोपित कुल बलों के परिकलन में छद्म बल के प्रभाव को भी सम्मिलित कर लिया जाए।
7. संरक्षी बलों के अधीन किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा हमेशा किसी नियतांक तक अनिश्चित रहती है। उदाहरणार्थ, किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा किस बिंदु पर शून्य लेनी है, यह केवल स्वेच्छा से चयन किए गए बिंदु पर निर्भर करता है। जैसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा mgh की स्थिति में स्थितिज ऊर्जा के लिए शून्य बिंदु पृथ्वी के पृष्ठ पर लिया गया है। स्प्रिंग के लिए जिसकी ऊर्जा $\frac{1}{2}kx^2$ है, स्थितिज ऊर्जा के लिए शून्य बिंदु, दोलायमान द्रव्यमान की माध्य स्थिति पर लिया गया है।
8. यांत्रिकी में प्रत्येक बल स्थितिज ऊर्जा से संबद्ध नहीं होता है। उदाहरणार्थ, घर्षण बल द्वारा किसी बंद पथ में किया गया कार्य शून्य नहीं है और न ही घर्षण से स्थितिज ऊर्जा को संबद्ध किया जा सकता है।
9. किसी संघट्ट के दौरान (a) संघट्ट के प्रत्येक क्षण में पिंड का कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है, (b) गतिज ऊर्जा संरक्षण (चाहे संघट्ट प्रत्यास्थ ही हो) संघट्ट की समाप्ति के पश्चात् ही लागू होता है और संघट्ट के प्रत्येक क्षण के लिए लागू नहीं होता है। वास्तव में, संघट्ट करने वाले दोनों पिंड विकृत हो जाते हैं और क्षण भर के लिए एक दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में आ जाते हैं।

© NCERT not to be republished

अभ्यास

5.1 किसी वस्तु पर किसी बल द्वारा किए गए कार्य का चिह्न समझना महत्त्वपूर्ण है। सावधानीपूर्वक बताइए कि निम्नलिखित राशियाँ धनात्मक हैं या ऋणात्मक :

(a) किसी व्यक्ति द्वारा किसी कुएँ में से रस्सी से बँधी बाल्टी को रस्सी द्वारा बाहर निकालने में किया गया कार्य।

(b) उपर्युक्त स्थिति में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य।

(c) किसी आनत तल पर फिसलती हुई किसी वस्तु पर घर्षण द्वारा किया गया कार्य।

(d) किसी खुरदरे क्षैतिज तल पर एकसमान वेग से गतिमान किसी वस्तु पर लगाए गए बल द्वारा किया गया कार्य।

(e) किसी दोलायमान लोलक को विरामावस्था में लाने के लिए वायु के प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य।

5.2 2 kg द्रव्यमान की कोई वस्तु जो आरंभ में विरामावस्था में है, 7 N के किसी क्षैतिज बल के प्रभाव से एक मेज पर गति करती है। मेज का गतिज-घर्षण गुणांक 0.1 है। निम्नलिखित का परिकलन कीजिए और अपने परिणामों की व्याख्या कीजिए।

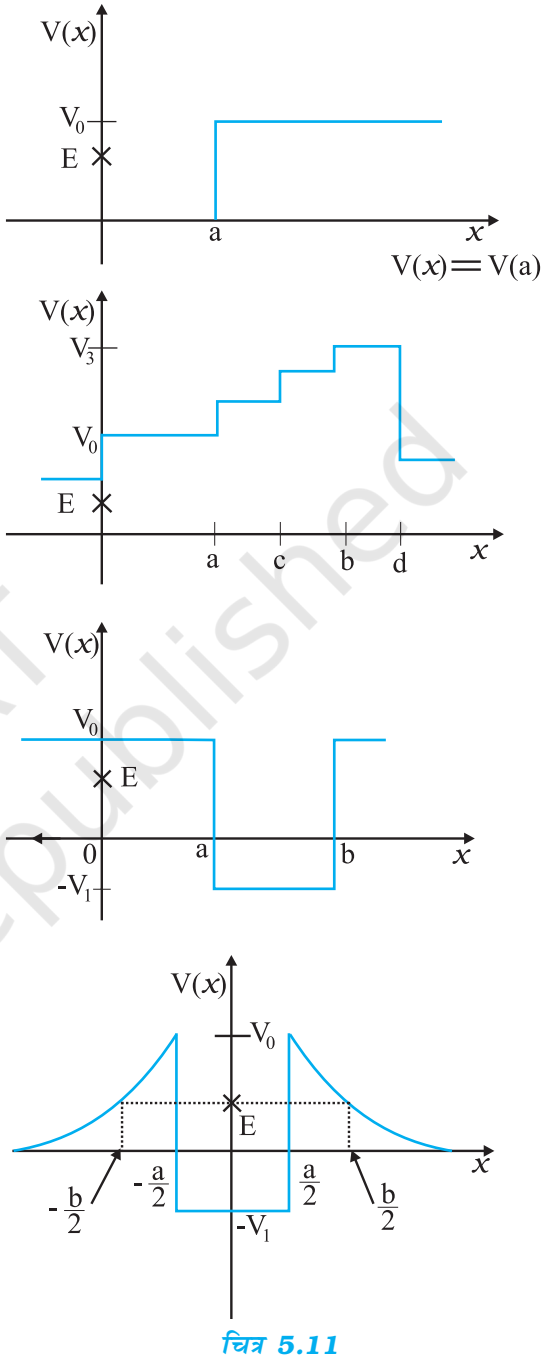
(a) लगाए गए बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य।

(b) घर्षण द्वारा 10 s में किया गया कार्य।

(c) वस्तु पर कुल बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य।

(d) वस्तु की गतिज ऊर्जा में 10 s में परिवर्तन।

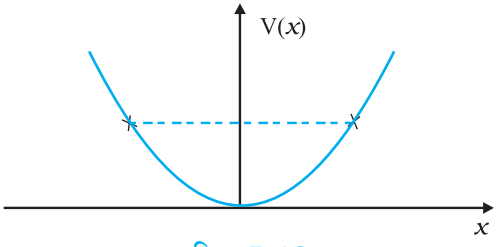
5.3 चित्र 5.11 में कुछ एकविमीय स्थितिज ऊर्जा-फलनों के उदाहरण दिए गए हैं। कण की कुल ऊर्जा कोटि-अक्ष पर क्रॉस द्वारा निर्देशित की गई है। प्रत्येक स्थिति में, कोई ऐसे क्षेत्र बताइए, यदि कोई हैं तो, जिनमें दी गई ऊर्जा के लिए, कण को नहीं पाया जा सकता। इसके अतिरिक्त, कण की कुल न्यूनतम ऊर्जा भी निर्देशित कीजिए। कुछ ऐसे भौतिक संदर्भों के विषय में सोचिए जिनके लिए ये स्थितिज ऊर्जा आकृतियाँ प्रासंगिक हों।



चित्र 5.11

© NCERT not to be republished

5.4 रेखीय सरल आवर्त गति कर रहे किसी कण का स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x) = kx^2/2$ है, जहां k दोलक का बल नियतांक है। $k = 0.5$ N m^{-1} के लिए $V(x)$ व x के मध्य ग्राफ चित्र 5.12 में दिखाया गया है। यह दिखाइए कि इस विभव के अंतर्गत गतिमान कुल 1J ऊर्जा वाले कण को अवश्य ही 'वापिस आना' चाहिए जब यह $x = \pm 2$ m पर पहुंचता है।



चित्र 5.12

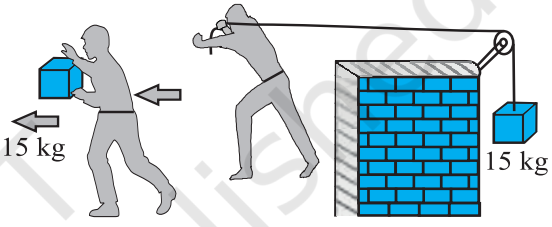
5.5 निम्नलिखित का उत्तर दीजिए:

(a) किसी राकेट का बाह्य आवरण उड़ान के दौरान घर्षण के कारण जल जाता है। जलने के लिए आवश्यक ऊष्मीय ऊर्जा किसके व्यय पर प्राप्त की गई—राकेट या वातावरण ?

(b) धूमकेतु सूर्य के चारों ओर बहुत ही दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में घूमते हैं। साधारणतया धूमकेतु पर सूर्य का गुरुत्वीय बल धूमकेतु के लंबवत् नहीं होता है। फिर भी धूमकेतु की संपूर्ण कक्षा में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। क्यों ?

(c) पृथ्वी के चारों ओर बहुत ही क्षीण वायुमण्डल में घूमते हुए किसी कृत्रिम उपग्रह की ऊर्जा धीरे-धीरे वायुमण्डलीय प्रतिरोध (चाहे यह कितना ही कम क्यों न हो) के विरुद्ध क्षय के कारण कम होती जाती है फिर भी जैसे-जैसे कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के समीप आता है तो उसकी चाल में लगातार वृद्धि क्यों होती है ?

(d) चित्र 5.13(i) में एक व्यक्ति अपने हाथों में 15kg का कोई द्रव्यमान लेकर 2 m चलता है। चित्र 5.13(ii) में वह उतनी ही दूरी अपने पीछे रस्सी को खींचते हुए चलता है। रस्सी घिरनी पर चढ़ी हुई है और उसके दूसरे सिरे पर 15 kg का द्रव्यमान लटका हुआ है। परिकलन कीजिए कि किस स्थिति में किया गया कार्य अधिक है ?



चित्र 5.13

5.6 सही विकल्प को रेखांकित कीजिए :

(a) जब कोई संरक्षी बल किसी वस्तु पर धनात्मक कार्य करता है तो वस्तु की स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है/घटती है/अपरिवर्ती रहती है।

(b) किसी वस्तु द्वारा घर्षण के विरुद्ध किए गए कार्य का परिणाम हमेशा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा में क्षय होता है।

(c) किसी बहुकण निकाय के कुल संवेग-परिवर्तन की दर निकाय के बाह्य बल/आंतरिक बलों के जोड़ के अनुक्रमानुपाती होती है।

(d) किन्हीं दो पिंडों के अप्रत्यास्थ संघट्ट में वे राशियाँ, जो संघट्ट के बाद नहीं बदलती हैं; निकाय की कुल गतिज ऊर्जा/कुल रेखीय संवेग/कुल ऊर्जा हैं।

5.7 बतलाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए।

(a) किन्हीं दो पिंडों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, प्रत्येक पिंड का संवेग व ऊर्जा संरक्षित रहती है।

(b) किसी पिंड पर चाहे कोई भी आंतरिक व बाह्य बल क्यों न लग रहा हो, निकाय की कुल ऊर्जा सर्वदा संरक्षित रहती है।

(c) प्रकृति में प्रत्येक बल के लिए किसी बंद लूप में, किसी पिंड की गति में किया गया कार्य शून्य होता है।

(d) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट में, किसी निकाय की अंतिम गतिज ऊर्जा, आरंभिक गतिज ऊर्जा से हमेशा कम होती है।

5.8 निम्नलिखित का उत्तर ध्यानपूर्वक, कारण सहित दीजिए :

(a) किन्हीं दो बिलियर्ड-गेंदों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, क्या गेंदों के संघट्ट की अल्पावधि में (जब वे संपर्क में होती हैं) कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है?

(b) दो गेंदों के किसी प्रत्यास्थ संघट्ट की लघु अवधि में क्या कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है?

(c) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट के लिए प्रश्न (a) व (b) के लिए आपके उत्तर क्या हैं?

© NCERT not to be republished

(d) यदि दो बिलियर्ड-गेंदों की स्थितिज ऊर्जा केवल उनके केंद्रों के मध्य, पृथक्करण-दूरी पर निर्भर करती है तो संघट्ट प्रत्यास्थ होगा या अप्रत्यास्थ ? (ध्यान दीजिए कि यहाँ हम संघट्ट के दौरान बल के संगत स्थितिज ऊर्जा की बात कर रहे हैं, ना कि गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा की)

5.9 कोई पिंड जो विरामावस्था में है, अचर त्वरण से एकविमीय गति करता है। इसको किसी t समय पर दी गई शक्ति अनुक्रमानुपाती है

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

5.10 एक पिंड अचर शक्ति के स्रोत के प्रभाव में एक ही दिशा में गतिमान है। इसका t समय में विस्थापन, अनुक्रमानुपाती है

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

5.11 किसी पिंड पर नियत बल लगाकर उसे किसी निर्देशांक प्रणाली के अनुसार z - अक्ष के अनुदिश गति करने के लिए बाध्य किया गया है जो इस प्रकार है

$$\mathbf{F} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})\ \text{N}$$

जहां $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ क्रमशः x-, y- एवं z- अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश हैं। इस वस्तु को z-अक्ष के अनुदिश 4 m की दूरी तक गति कराने के लिए आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

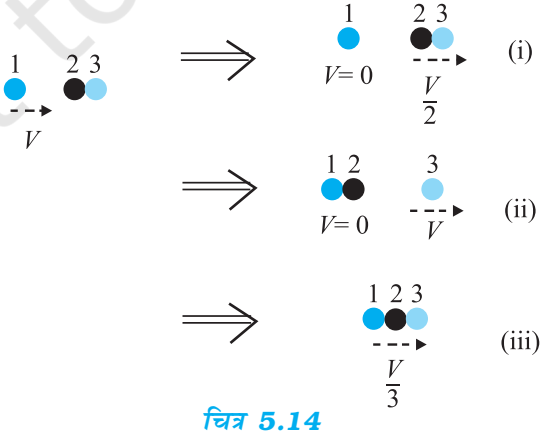
5.12 किसी अंतरिक्ष किरण प्रयोग में एक इलेक्ट्रॉन और एक प्रोटॉन का संसूचन होता है जिसमें पहले कण की गतिज ऊर्जा 10 keV है और दूसरे कण की गतिज ऊर्जा 100 keV है। इनमें कौन-सा तीव्रगामी है, इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन ? इनकी चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए। (इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान = 9.11×10^{-31} kg, प्रोटॉन का द्रव्यमान = 1.67×10^{-27} kg, 1 eV = 1.60×10^{-19}J)

5.13 2 mm त्रिज्या की वर्षा की कोई बूंद 500 m की ऊंचाई से पृथ्वी पर गिरती है। यह अपनी आरंभिक ऊंचाई के आधे हिस्से तक (वायु के श्यान प्रतिरोध के कारण) घटते त्वरण के साथ गिरती है और अपनी अधिकतम (सीमान्त) चाल प्राप्त कर लेती है, और उसके बाद एकसमान चाल से गति करती है। वर्षा की बूंद पर उसकी यात्रा के पहले व दूसरे अर्ध भागों में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ? यदि बूंद की चाल पृथ्वी तक पहुंचने पर 10 m s^{-1} हो तो संपूर्ण यात्रा में प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

5.14 किसी गैस-पात्र में कोई अणु 200 m s^{-1} की चाल से अभिलंब के साथ 30° का कोण बनाता हुआ क्षैतिज दीवार से टकराकर पुनः उसी चाल से वापस लौट जाता है। क्या इस संघट्ट में संवेग संरक्षित है? यह संघट्ट प्रत्यास्थ है या अप्रत्यास्थ ?

5.15 किसी भवन के भूतल पर लगा कोई पंप 30 m^3 आयतन की पानी की टंकी को 15 मिनट में भर देता है। यदि टंकी पृथ्वी तल से 40 m ऊपर हो और पंप की दक्षता 30% हो तो पंप द्वारा कितनी विद्युत शक्ति का उपयोग किया गया ?

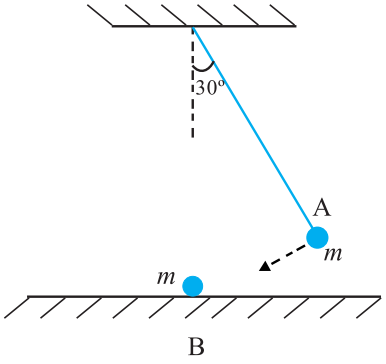
5.16 दो समरूपी बॉल-बियरिंग एक-दूसरे के संपर्क में हैं और किसी घर्षणरहित मेज पर विरामावस्था में हैं। इनके साथ समान द्रव्यमान का कोई दूसरा बॉल-बियरिंग, जो आरंभ में V चाल से गतिमान है, सम्मुख संघट्ट करता है। यदि संघट्ट प्रत्यास्थ है तो संघट्ट के पश्चात् निम्नलिखित (चित्र 5.14) में से कौन-सा परिणाम संभव है?



चित्र 5.14

© NCERT not to be republished

5.17 किसी लोलक के गोलक A को, जो ऊर्ध्वाधर से 30° का कोण बनाता है, छोड़े जाने पर मेज पर, विरामावस्था में रखे दूसरे गोलक B से टकराता है जैसा कि चित्र 5.15 में प्रदर्शित है। ज्ञात कीजिए कि संघट्ट के पश्चात् गोलक A कितना ऊंचा उठता है? गोलकों के आकारों की उपेक्षा कीजिए और मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है।



चित्र 5.15

5.18 किसी लोलक के गोलक को क्षैतिज अवस्था से छोड़ा गया है। यदि लोलक की लंबाई 1.5 m है तो निम्नतम बिंदु पर आने पर गोलक की चाल क्या होगी? यह दिया गया है कि इसकी आरंभिक ऊर्जा का 5% अंश वायु प्रतिरोध के विरुद्ध क्षय हो जाता है।

5.19 300 kg द्रव्यमान की कोई ट्रॉली, 25 kg रेत का बोरा लिए हुए किसी घर्षणरहित पथ पर 27 km h^{-1} की एकसमान चाल से गतिमान है। कुछ समय पश्चात् बोरे में किसी छिद्र से रेत 0.05 kg s^{-1} की दर से निकलकर ट्राली के फर्श पर रिसने लगती है। रेत का बोरा खाली होने के पश्चात ट्रॉली की चाल क्या होगी ?

5.20 0.5 kg द्रव्यमान का एक कण $v = a x^{3/2}$ वेग से सरल रेखीय गति करता है जहां $a = 5$ $m^{-1/2} s^{-1}$ है। $x = 0$ से $x = 2$ m तक इसके विस्थापन में कुल बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

5.21 किसी पवनचक्की के ब्लेड, क्षेत्रफल A के वृत्त जितना क्षेत्रफल प्रसर्प करते हैं। (a) यदि हवा v वेग से वृत्त के लंबवत् दिशा में बहती है तो t समय में इससे गुजरने वाली वायु का द्रव्यमान क्या होगा ? (b) वायु की गतिज ऊर्जा क्या होगी ? (c) मान लीजिए कि पवनचक्की हवा की 25% ऊर्जा को विद्युत ऊर्जा में रूपान्तरित कर देती है। यदि $A = 30$ m^2, और $v = 36$ km h^{-1} और वायु का घनत्व 1.2 kg m^{-3} है तो उत्पन्न विद्युत शक्ति का परिकलन कीजिए।

5.22 कोई व्यक्ति वजन कम करने के लिए 10 kg द्रव्यमान को 0.5 m की ऊंचाई तक 1000 बार उठाता है। मान लीजिए कि प्रत्येक बार द्रव्यमान को नीचे लाने में खोई हुई ऊर्जा क्षयित हो जाती है। (a) वह गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध कितना कार्य करता है ? (b) यदि वसा 3.8 10^7 J ऊर्जा प्रति किलोग्राम आपूर्ति करता हो जो कि 20% दक्षता की दर से यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है तो वह कितनी वसा खर्च कर डालेगा?

5.23 कोई परिवार 8 kW विद्युत-शक्ति का उपभोग करता है। (a) किसी क्षैतिज सतह पर सीधे आपतित होने वाली सौर ऊर्जा की औसत दर 200 W m^{-2} है। यदि इस ऊर्जा का 20% भाग लाभदायक विद्युत ऊर्जा में रूपान्तरित किया जा सकता है तो 8 kW की विद्युत आपूर्ति के लिए कितने क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी ? (b) इस क्षेत्रफल की तुलना किसी विशिष्ट भवन की छत के क्षेत्रफल से कीजिए।

© NCERT not to be republished

अध्याय 6

कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

6.1 भूमिका
6.2 द्रव्यमान केन्द्र
6.3 द्रव्यमान केन्द्र की गति
6.4 कणों के निकाय का रेखीय संवेग
6.5 दो सदिशों का सदिश गुणनफल
6.6 कोणीय वेग और इसका रेखीय वेग से संबंध
6.7 बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग
6.8 दृढ़ पिंडों का संतुलन
6.9 जड़त्व आघूर्ण
6.10 अचल अक्ष के परितः शुद्ध घूर्णी गतिकी
6.11 अचल अक्ष के परितः घूर्णी गतिकी
6.12 अचल अक्ष के परितः घूर्णी गति का कोणीय संवेग

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

6.1 भूमिका

पिछले अध्यायों में हमने मुख्य रूप से आदर्श बिन्दु कण (एक कण जिसे द्रव्यमान युक्त बिन्दु के रूप में व्यक्त किया जाए तथा इसका कोई आकार नहीं हो) की गति का अध्ययन किया था। फिर, यह मानते हुए कि परिमित आकार के पिण्डों की गति को बिन्दु कण की गति के पदों में व्यक्त किया जा सकता है, हमने उस अध्ययन के परिणामों को परिमित आकार के पिण्डों पर भी लागू कर दिया था।

दैनिक जीवन में जितने पिण्ड हमारे संपर्क में आते हैं वे सभी परिमित आकार के होते हैं। एक विस्तृत पिण्ड (परिमित आकार के पिण्ड) की गति को पूरे तौर पर समझने के लिए आमतौर पर उसका बिन्दुवत् आदर्श अपर्याप्त रहता है। इस अध्याय में हम इस प्रतिबंध के परे जाने की चेष्टा करेंगे और विस्तृत, पर परिमित पिण्डों की गति को समझने का प्रयास करेंगे। एक विस्तृत पिण्ड प्रथमतया कणों का एक निकाय है। अतः हम अपना विवेचन एक निकाय की गति से ही शुरू करना चाहेंगे। यहाँ कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र एक मुख्य अवधारणा होगी। हम कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति का वर्णन करेंगे और फिर, परिमित आकार के पिण्डों की गति को समझने में इस अवधारणा की उपयोगिता बतायेंगे।

बड़े पिण्डों से जुड़ी बहुत सी समस्याएं उनको दृढ़ पिण्ड मानकर हल की जा सकती हैं। *आदर्श दृढ़ पिण्ड एक ऐसा पिण्ड है जिसकी एक सुनिश्चित और अपरिवर्तनीय आकृति होती है। इस प्रकार के ठोस के सभी कण युग्मों के बीच की दूरियाँ परिवर्तित नहीं होती।* दृढ़ पिण्ड की इस परिभाषा से यह स्पष्ट है कि कोई भी वास्तविक पिण्ड पूरी तरह दृढ़ नहीं होता, क्योंकि सभी व्यावहारिक पिण्ड बलों के प्रभाव से विकृत हो जाते हैं। परन्तु ऐसी बहुत सी स्थितियाँ होती हैं जिनमें विकृतियाँ नगण्य होती हैं। अतः कई प्रकार की स्थितियों में यथा पहिये, लट्टू, स्टील के शहतीर और यहाँ तक कि अणु, ग्रह जैसे पिण्डों की गति का अध्ययन करते समय, हम ध्यान न देंगे कि उनमें विकृति आती है, वे मुड़ते हैं या कम्पन करते हैं। हम उन्हें दृढ़ पिण्ड मान कर उनकी गति का अध्ययन करेंगे।

© NCERT not to be republished

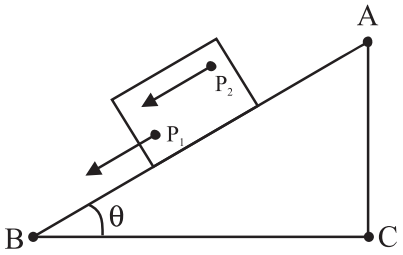
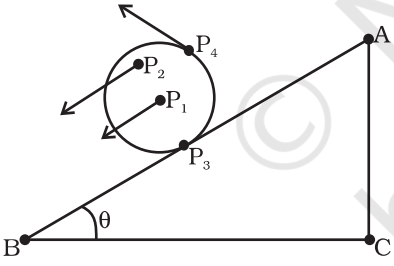


Fig 6.1 नत-तल पर एक ब्लॉक की अधोमुखी स्थानांतरण (फिसलन) गति (ब्लॉक का प्रत्येक बिंदु यथा P_1, P_2.... किसी भी क्षण समान गति में हैं)

6.1.1 एक दृढ़ पिण्ड में किस प्रकार की गतियाँ हो सकती हैं?

आइये, दृढ़ पिण्डों की गति के कुछ उदाहरणों से इस प्रश्न का उत्तर ढूंढ़ने की कोशिश करें। प्रथम एक आयताकार ब्लॉक पर विचार करें जो एक नत तल पर सीधा (बिना इधर-उधर हटे) नीचे की ओर फिसल रहा है। ब्लॉक एक दृढ़ पिण्ड लिया है। नत तल पर नीचे की ओर इसकी गति ऐसी है कि इसके सभी कण साथ-साथ चल रहे हैं, अर्थात् किसी क्षण सभी कण समान वेग से चलते हैं (चित्र 6.1)। यहाँ यह दृढ़ पिंड शुद्ध स्थानांतरण गति में है।

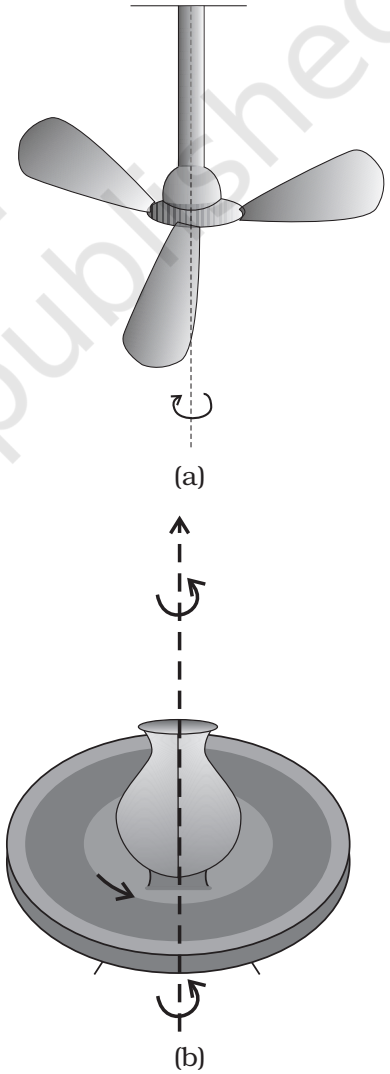
शुद्ध स्थानांतरण गति में किसी क्षण विशेष पर पिण्ड का प्रत्येक कण समान वेग से चलता है।



चित्र 6.2 नत तल पर नीचे की ओर लुढ़कता सिलिंडर (बेलन)। यह शुद्ध स्थानांतरण गति नहीं है। किसी क्षण पर बिन्दु P_1, P_2, P_3 एवं P_4 के अलग-अलग वेग हैं (जैसा कि तीर दर्शाते हैं)। वास्तव में सम्पर्क बिन्दु P_3 का वेग किसी भी क्षण शून्य है यदि बेलन बिना फिसले हुए लुढ़कता है।

आइये, अब उसी नत तल पर नीचे की ओर लुढ़कते हुए एक धातु या लकड़ी के बेलन की गति पर विचार करते हैं (चित्र 6.2)। यह दृढ़ पिण्ड (बेलन) नत तल के शीर्ष से उसकी तली तक स्थानांतरित होता है, अतः इसमें स्थानांतरण गति प्रतीत होती है। लेकिन चित्र 6.2 यह भी दर्शाता है कि इसके सभी कण क्षण विशेष पर एक ही वेग से नहीं चल रहे हैं। अतः पिण्ड शुद्ध स्थानांतरण गति में नहीं है। अतः इसकी गति स्थानांतरीय होने के साथ-साथ 'कुछ और अलग' भी है।

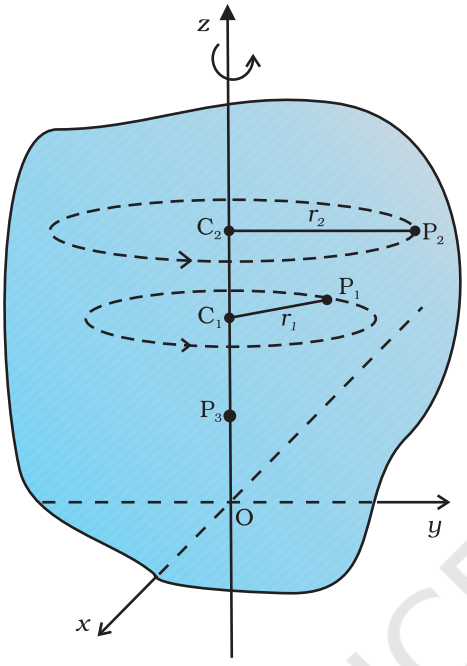
यह 'कुछ और अलग' भी क्या है? यह समझने के लिए, आइये, हम एक ऐसा दृढ़ पिंड लें जिसको इस प्रकार व्यवरुद्ध कर दिया गया है कि यह स्थानांतरण गति न कर सके। किसी दृढ़ पिण्ड की स्थानांतरण गति को निरुद्ध करने की सर्व सामान्य विधि यह है कि उसे एक सरल रेखा के अनुदिश स्थिर कर दिया जाए। तब इस दृढ़ पिण्ड की एकमात्र संभावित गति *घूर्णी गति* होगी। वह सरल रेखा जिसके अनुदिश इस दृढ़ पिण्ड को स्थिर बनाया गया है इसकी *घूर्णन-अक्ष* कहलाती है। यदि आप अपने चारों ओर देखें तो आपको छत का पंखा, कुम्हार का चाक (चित्र 6.3(a) एवं (b)), विशाल चक्री-झूला (जॉयन्ट व्हील), मेरी-गो-राउण्ड जैसे अनेक ऐसे उदाहरण मिल जायेंगे जहाँ किसी अक्ष के परितः घूर्णन हो रहा हो।



चित्र 6.3 एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन
(a) छत का पंखा
(b) कुम्हार का चाक

© NCERT not to be republished

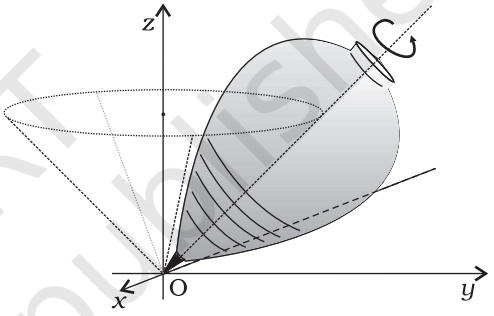
आइये, अब हम यह समझने की चेष्टा करें कि घूर्णन क्या है, और इसके क्या अभिलक्षण हैं? आप देख सकते हैं कि *एक दृढ़ पिण्ड के एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन में, पिण्ड का हर कण एक वृत्त में घूमता है। यह वृत्त अक्ष के लम्बवत् तल में है और इनका केन्द्र अक्ष पर अवस्थित है।* चित्र 6.4 में एक



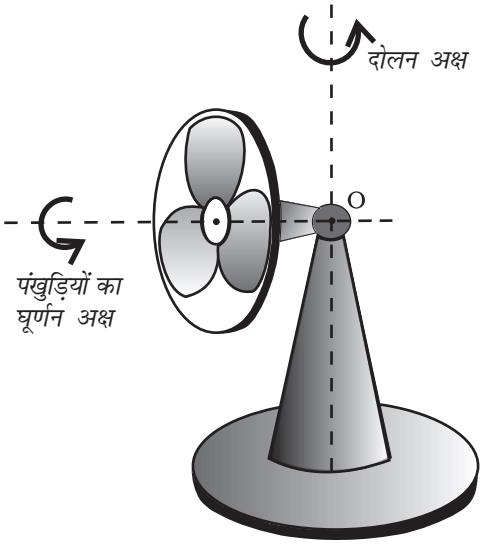
चित्र 6.4 *z-अक्ष के परितः एक दृढ़ पिण्ड का घूर्णन। पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु P_1 या P_2 एक वृत्त पर घूमता है जिसका केन्द्र (C_1 या C_2) अक्ष पर स्थित है। वृत्त की त्रिज्या (r_1 या r_2) अक्ष से बिन्दु (P_1 या P_2) की लम्बवत् दूरी है। अक्ष पर स्थित P_3 जैसा बिन्दु स्थिर रहता है।*

स्थिर अक्ष (निर्देश फ्रेम की z-अक्ष) के परितः किसी दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति दर्शायी है। हम अक्ष से r_1 दूरी पर स्थित दृढ़ पिण्ड का कोई स्वेच्छ कण P_1 लें। यह कण अक्ष के परितः r_1 त्रिज्या के वृत्त पर घूमता है जिसका केन्द्र C_1 अक्ष पर स्थित है। यह वृत्त अक्ष के लम्बवत् तल में अवस्थित है। चित्र में एक दूसरा कण P_2 भी दर्शाया गया है जो स्थिर अक्ष से r_2 दूरी पर है। कण P_2, r_2 त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर चलता है जिसका केन्द्र अक्ष पर C_2 है। यह वृत्त भी अक्ष के लम्बवत् तल में है। ध्यान दें कि P_1 एवं P_2 द्वारा बनाये गए वृत्त अलग-अलग तलों में हैं पर ये दोनों तल स्थिर अक्ष के लम्बवत् हैं। अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु, जैसे P_3 के लिए, $r = 0$। ये कण, पिण्ड के घूमते समय भी स्थित रहते हैं। यह अपेक्षित भी है क्योंकि घूर्णन अक्ष स्थिर है।

तथापि, घूर्णन के कुछ उदाहरणों में, अक्ष स्थिर नहीं भी रहती। इस प्रकार के घूर्णन के मुख्य उदाहरणों में एक है, एक ही स्थान पर घूमता लट्टू (चित्र 6.5(a))। (लट्टू की गति के संबंध में हमने यह मान लिया है कि यह एक स्थान से दूसरे स्थान पर स्थानांतरित नहीं होता और इसलिए इसमें स्थानांतरण गति नहीं है।) अपने अनुभव के आधार पर हम यह जानते हैं कि इस प्रकार घूमते लट्टू की अक्ष, भूमि पर इसके सम्पर्क-बिन्दु से गुजरते अभिलम्ब के परितः एक शंकु बनाती है जैसा कि चित्र 6.5(a) में दर्शाया गया है। (ऊर्ध्वाधर के परितः लट्टू की अक्ष का इस प्रकार घूमना पुरस्सरण कहलाता है)। *ध्यान दें कि लट्टू का वह बिन्दु जहाँ यह धरातल को छूता है, स्थिर है।* किसी भी क्षण, लट्टू की घूर्णन-अक्ष, इसके सम्पर्क बिन्दु से गुजरती है। इस प्रकार की घूर्णन गति का दूसरा सरल उदाहरण घूमने वाला मेज का पंखा या पीठिका-पंखा है। आपने देखा होगा कि इस प्रकार के पंखे की अक्ष, क्षैतिज तल में, दोलन गति (इधर से उधर घूमने की) करती है और यह गति ऊर्ध्वाधर रेखा के परितः होती है जो उस बिन्दु से गुजरती है जिस पर अक्ष की धुरी टिकी होती है (चित्र 6.5(b) में बिन्दु O)।



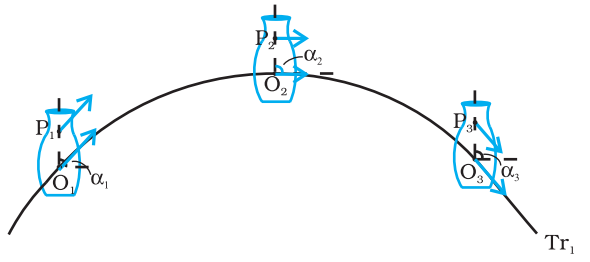
चित्र 6.5 *(a) घूमता हुआ लट्टू (इसकी टिप O का धरातल पर सम्पर्क बिन्दु स्थिर है)*



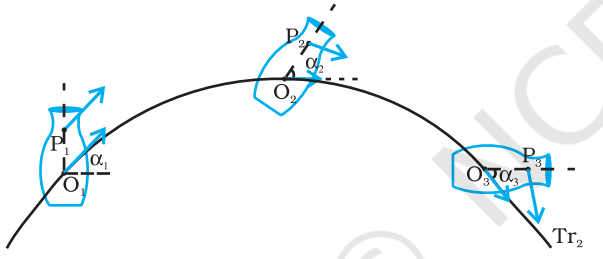
चित्र 6.5 *(b) दोलन करता हुआ मेज का पंखा जिसकी पंखुड़ियाँ घूर्णन गति में हैं। (पंखे की धुरी, बिन्दु O, स्थिर है)*

© NCERT not to be republished

जब पंखा घूमता है और इसकी अक्ष इधर से उधर दोलन करती है तब भी यह बिन्दु स्थिर रहता है। घूर्णन गति के अधिक सार्विक मामलों में, जैसे कि लट्टू या पीठिका-पंखे के घूमने में, दृढ़ पिण्ड का एक बिन्दु स्थिर रहता है, न कि एक रेखा। इस मामले में अक्ष तो स्थिर नहीं है पर यह हमेशा एक स्थिर बिन्दु से गुजरती है। तथापि, अपने अध्ययन में, अधिकांशतः, हम ऐसी सरल एवं विशिष्ट घूर्णन गतियों तक सीमित रहेंगे जिनमें एक रेखा (यानि अक्ष) स्थिर रहती है। अतः जब तक अन्यथा न कहा जाय, हमारे लिए घूर्णी गति एक स्थिर अक्ष के परितः ही होगी।



चित्र 6.6(a) *एक दृढ़ पिण्ड की गति जो शुद्ध स्थानांतरीय है*



चित्र 6.6(b) *दृढ़ पिण्ड की ऐसी गति जो स्थानांतरीय और घूर्णी गतियों का संयोजन है*

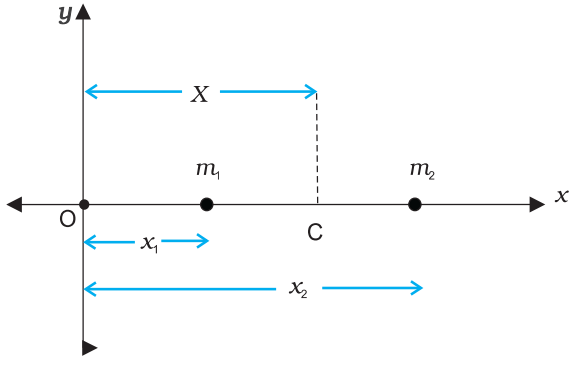
चित्र 6.6 (a) एवं 6.6 (b) एक ही पिण्ड की विभिन्न गतियाँ दर्शाते हैं। ध्यान दें, कि P पिण्ड का कोई स्वेच्छ बिन्दु है; O पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है, जिसके विषय में अगले खण्ड में बताया गया है। यहाँ यह कहना पर्याप्त होगा कि बिन्दु O के गमन पथ ही पिण्ड के स्थानांतरीय गमन पथ Tr_1 एवं Tr_2 हैं। तीन अलग-अलग क्षणों पर, बिन्दुओं O एवं P की स्थितियाँ चित्र 6.6(a) एवं 6.6 (b) दोनों ही क्रमशः O_1, O_2, O_3, एवं P_1, P_2 , P_3 द्वारा प्रदर्शित की गई हैं। चित्र 6.6(a) से यह स्पष्ट है कि शुद्ध स्थानांतरण की स्थिति में, पिण्ड के किन्हीं भी दो बिन्दुओं O एवं P के वेग, बराबर होते हैं। यह भी ज्ञातव्य है, कि इस स्थिति में OP, का दिग्विन्यास, यानि कि वह कोण जो OP एक नियत दिशा (माना कि क्षैतिज) से बनाता है, समान रहता है अर्थात् $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ । चित्र 6.6 (b) स्थानांतरण एवं घूर्णन के संयोजन से निर्मित गति दर्शाता है। इस गति में बिन्दुओं O एवं P के क्षणिक वेगों के मान अलग-अलग हो सकते हैं और कोणों α_1, α_2, α_3 के मान भी भिन्न हो सकते हैं।

एक नत तल पर नीचे की ओर बेलन का लुढ़कना दो तरह की गतियों का संयोजन है- स्थानांतरण गति और एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णी गति। अतः, लुढ़कन गति के संदर्भ में जिस 'कुछ और अलग' का जिक्र पहले हमने किया था वह घूर्णी गति है। इस दृष्टिकोण से चित्र 6.6(a) एवं (b) को आप पर्याप्त शिक्षाप्रद पायेंगे। इन दोनों चित्रों में एक ही पिण्ड की गति, समान स्थानांतरीय गमन-पथ के अनुदिश दर्शाई गई है। चित्र 6.6(a) में दर्शाई गई गति शुद्ध स्थानांतरीय है, जबकि चित्र 6.6(b) में दर्शाई गई गति स्थानांतरण एवं घूर्णी दोनों प्रकार की गतियों का संयोजन है। (आप स्वयं भारी पुस्तक जैसा एक दृढ़ पिण्ड फेंक कर दर्शाई गई दोनों प्रकार की गतियाँ उत्पन्न करने की कोशिश कर सकते हैं।)

आइये अब हम प्रस्तुत खण्ड में वर्णित महत्वपूर्ण तथ्यों का सार फिर से आपको बतायें। **एक ऐसा दृढ़ पिण्ड जो न तो किसी चूल पर टिका हो और न ही किसी रूप में स्थिर हो, दो प्रकार की गति कर सकता है - या तो शुद्ध स्थानांतरण या स्थानांतरण एवं घूर्णन गति का संयोजन।** *एक ऐसे दृढ़ पिण्ड की गति जो या तो चूल पर टिका हो या किसी न किसी रूप में स्थिर हो, घूर्णी गति होती है।* घूर्णन किसी ऐसी अक्ष के परितः हो सकता है जो स्थिर हो (जैसे छत के पंखे में) या फिर एक ऐसी अक्ष के परितः जो स्वयं घूमती हो (जैसे इधर से उधर घूमते मेज के पंखे में)। इस अध्याय में हम एक स्थिर अक्ष के परितः होने वाली घूर्णी गति का ही अध्ययन करेंगे।

6.2 द्रव्यमान केन्द्र

पहले हम यह देखेंगे कि द्रव्यमान केन्द्र क्या है और फिर इसके महत्व पर प्रकाश डालेंगे। सरलता की दृष्टि से हम दो कणों के निकाय से शुरुआत करेंगे। दोनों कणों की स्थितियों को मिलाने वाली रेखा को हम x- अक्ष मानेंगे। (चित्र 6.7)



चित्र 6.7 *दो कणों और उनके द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति*

© NCERT not to be republished

माना कि दो कणों की, किसी मूल बिन्दु O से दूरियाँ क्रमशः x_1 एवं x_2 हैं। इन कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 एवं m_2 हैं। इन दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र C एक ऐसा बिन्दु होगा जिसकी O से दूरी, X का मान हो

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.1)$$

समीकरण (6.1) में X को हम x_1 एवं x_2 का द्रव्यमान भारित माध्य मान सकते हैं। यदि दोनों कणों का द्रव्यमान बराबर हो तो $m_1 = m_2 = m$, तब

$$X = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

इस प्रकार समान द्रव्यमान के दो कणों का द्रव्यमान केन्द्र ठीक उनके बीचोंबीच है।

अगर हमारे पास n कण हों, जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, ...m_n हों और सबको x- अक्ष के अनुदिश रखा गया हो, तो परिभाषा के अनुसार इन सब कणों का द्रव्यमान केन्द्र होगा

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad (6.2)$$

जहाँ x_1, x_2,...x_n कणों की क्रमशः मूलबिन्दु से दूरियाँ हैं; X भी उसी मूलबिन्दु से मापा गया है। संकेत $\sum$ (यूनानी भाषा का अक्षर सिग्मा) संकलन को व्यक्त करता है जो इस मामले में n कणों के लिए किया गया है। संकलन फल

$$\sum m_i = M$$

निकाय का कुल द्रव्यमान है।

माना हमारे पास तीन कण हैं जो एक सरल रेखा में तो नहीं, पर एक समतल में रखे गए हैं। तब हम उस तल में जिसमें ये तीन कण रखे गए हैं x- एवं y-अक्ष निर्धारित कर सकते हैं, और इन तीन कणों की स्थितियों को क्रमशः निर्देशांकों (x_1, y_1), (x_2, y_2) एवं (x_3, y_3) द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। मान लीजिए कि इन तीन कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2 एवं m_3 हैं। इन तीन कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र C निर्देशांकों (X, Y) द्वारा व्यक्त किया जायेगा जिनके मान हैं-

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (6.3a)$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (6.3b)$$

समान द्रव्यमान वाले कणों के लिए $m = m_1 = m_2 = m_3$,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

अर्थात् समान द्रव्यमान वाले कणों के लिए तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र उनकी स्थिति बिन्दुओं को मिलाने से बने त्रिभुज के केन्द्रक पर होगा।

समीकरण (6.3a,b) के परिणामों को, सरलतापूर्वक, ऐसे n कणों के एक निकाय के लिए सार्विक किया जा सकता है जो एक समतल में न होकर, अंतरिक्ष में फैले हों। इस तरह के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र (X, Y, Z) है, जहाँ

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad (6.4a)$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad (6.4b)$$

और $$Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \qquad (6.4c)$$

यहाँ $M = \sum m_i$ निकाय का कुल द्रव्यमान है। सूचक i का मान 1 से n तक बदलता है, m_i i वें कण का द्रव्यमान है, और i वें कण की स्थिति (x_i, y_i, z_i) से व्यक्त की गई है। यदि हम स्थिति-सदिश की अवधारणा का उपयोग करें तो समीकरण (6.4a, b, c) को संयोजित करके एकल समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है। यदि $\mathbf{r}_i$, i वें कण का स्थिति-वेक्टर है और $\mathbf{R}$ द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति-सदिश है:

$$\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$

एवं $$\mathbf{R} = X \hat{\mathbf{i}} + Y \hat{\mathbf{j}} + Z \hat{\mathbf{k}}$$

तब $$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \qquad (6.4d)$$

समीकरण के दाहिनी ओर लिखा गया योग सदिश-योग है।

सदिशों के इस्तेमाल से समीकरणों की संक्षिप्तता पर ध्यान दीजिए। यदि संदर्भ-फ्रेम (निर्देशांक निकाय) के मूल बिन्दु को, दिए गए कण-निकाय के द्रव्यमान केन्द्र में लिया जाए तो $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$।

एक दृढ़ पिण्ड, जैसे कि मीटर-छड़ या फ्लाइ व्हील, बहुत पास-पास रखे गए कणों का निकाय है; अतः समीकरण (6.4a, b, c, d) दृढ़ पिण्ड के लिए भी लागू होते हैं। इस प्रकार के पिण्डों में कणों (परमाणुओं या अणुओं) की संख्या इतनी

© NCERT not to be republished

अधिक होती है, कि इन समीकरणों में, सभी पृथक-पृथक कणों को लेकर संयुक्त प्रभाव ज्ञात करना असंभव कार्य है। पर, क्योंकि कणों के बीच की दूरी बहुत कम है, हम पिण्ड में द्रव्यमान का सतत वितरण मान सकते हैं। यदि पिण्ड को n छोटे द्रव्यमान खण्डों में विभाजित करें जिनके द्रव्यमान $\Delta m_1, \Delta m_2 \ldots \Delta m_n$ हैं तथा i-वाँ खण्ड Δm_i बिन्दु (x_i, y_i, z_i) पर अवस्थित है ऐसा सोचें तो द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांकों के लगभग मान इस प्रकार व्यक्त करेंगे –

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i}, Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}, Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum \Delta m_i}$$

यदि हम n को वृहत्तर करें अर्थात् Δm_i को और छोटा करें तो ये समीकरण काफी यथार्थ मान बताने लगेंगे। उस स्थिति में i-कणों के योग को हम समाकल से व्यक्त करेंगे।

$$\sum \Delta m_i \to \int \mathrm{d}m = M,$$

$$\sum(\Delta m_i)x_i \to \int x\,\mathrm{d}m,$$

$$\sum(\Delta m_i)y_i \to \int y\,\mathrm{d}m,$$

और $$\sum(\Delta m_i)z_i \to \int z\,\mathrm{d}m$$

यहाँ M पिण्ड का कुल द्रव्यमान है। द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांकों को अब हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\ Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m \text{ और } Z = \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad (6.5a)$$

इन तीन अदिश व्यंजकों के तुल्य सदिश व्यंजक इस प्रकार लिख सकते हैं-

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m \qquad (6.5b)$$

यदि हम द्रव्यमान केन्द्र को अपने निर्देशांक निकाय का मूल-बिन्दु चुनें तो

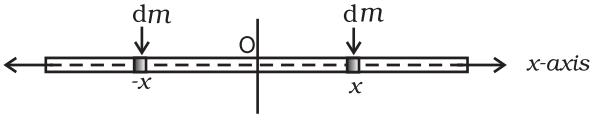
$$\mathbf{R}\ (x,y,z) = 0$$

अर्थात्, $$\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m = 0$$

या $$\int x\,\mathrm{d}m = \int y\,\mathrm{d}m = \int z\,\mathrm{d}m = 0 \qquad (6.6)$$

प्रायः हमें नियमित आकार के समांग पिण्डों; जैसे – वलयों, गोल-चकतियों, गोलों, छड़ों इत्यादि के द्रव्यमान केन्द्रों की गणना करनी पड़ती है। (समांग पिण्ड से हमारा तात्पर्य एक ऐसी वस्तु से है जिसमें द्रव्यमान का समान रूप से वितरण हो)। सममिति का विचार करके हम सरलता से यह दर्शा सकते हैं कि इन पिण्डों के द्रव्यमान केन्द्र उनके ज्यामितीय केन्द्र ही होते हैं।

आइये, एक पतली छड़ पर विचार करें, जिसकी चौड़ाई और मोटाई (यदि इसकी अनुप्रस्थ काट आयताकार है) अथवा त्रिज्या (यदि छड़ बेलनाकार है), इसकी लम्बाई की तुलना में बहुत छोटी है। छड़ की लम्बाई x-अक्ष के अनुदिश रखें और मूल बिन्दु इसके ज्यामितीय केन्द्र पर ले लें तो परावर्तन सममिति की दृष्टि से हम कह सकते हैं कि प्रत्येक x पर स्थित प्रत्येक dm घटक के समान dm का घटक $-x$ पर भी स्थित होगा (चित्र 6.8)।



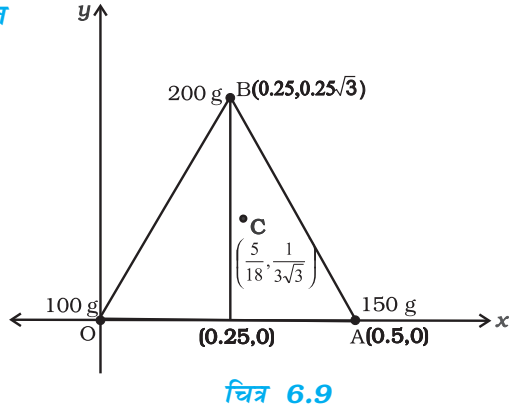
चित्र 6.8 एक पतली छड़ का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात करना

समाकल में हर जोड़े का योगदान शून्य है और इस कारण स्वयं $\int x\,\mathrm{d}m$ का मान शून्य हो जाता है। समीकरण (6.6) बताती है कि जिस बिन्दु के लिए समाकल शून्य हो वह पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है। अतः समांग छड़ का ज्यामितीय केन्द्र इसका द्रव्यमान केन्द्र है। इसे परावर्तन सममिति के प्रयोग से समझ सकते हैं।

सममिति का यही तर्क, समांग वलयों, चकतियों, गोलों और यहाँ तक कि वृत्ताकार या आयताकार अनुप्रस्थ काट वाली मोटी छड़ों के लिए भी लागू होगा। ऐसे सभी पिण्डों के लिए आप पायेंगे कि बिन्दु (x,y,z) पर स्थित हर द्रव्यमान घटक के लिए बिन्दु $(-x,-y,-z)$ पर भी उसी द्रव्यमान का घटक लिया जा सकता है। (दूसरे शब्दों में कहें तो इन सभी पिण्डों के लिए मूल बिन्दु परावर्तन-सममिति का बिन्दु है)। परिणामतः, समीकरण (6.5 a) में दिए गए सभी समाकल शून्य हो जाते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि उपरोक्त सभी पिण्डों का द्रव्यमान केन्द्र उनके ज्यामितीय केन्द्र पर ही पड़ता है।

उदाहरण 6.1 एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गए तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए। कणों के द्रव्यमान क्रमशः 100g, 150g, एवं 200g हैं। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 0.5 m है।

हल



चित्र 6.9

© NCERT not to be republished

x एवं y- अक्ष चित्र 6.9 में दर्शाये अनुसार चुनें तो समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं O, A एवं B के निर्देशांक क्रमशः (0,0), (0.5,0) एवं $(0.25, 0.25\sqrt{3})$ होंगे। माना कि 100g, 150g एवं 200g के द्रव्यमान क्रमशः O, A एवं B पर अवस्थित हैं। तब

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100\,(0) + 150(0.5) + 200(0.25)]\ \text{g m}}{(100 + 150 + 200)\ \text{g}}$$

$$= \frac{75 + 50}{450}\text{m} = \frac{125}{450}\text{m} = \frac{5}{18}\text{m}$$

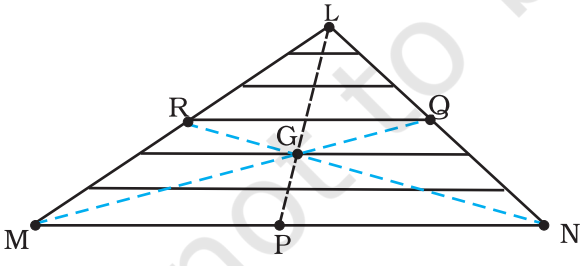
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25\sqrt{3})]\ \text{g m}}{450\ \text{g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\text{m}$$

द्रव्यमान केन्द्र C चित्र में दर्शाया गया है। ध्यान दें कि यह त्रिभुज OAB का ज्यामितीय केन्द्र नहीं है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों नही है?

उदाहरण 6.2: एक त्रिभुजाकार फलक का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए।

हल फलक (ΔLMN) को आधार (MN) के समान्तर पतली पट्टियों में बांटा जा सकता है जैसा चित्र 6.10 में दर्शाया गया है।

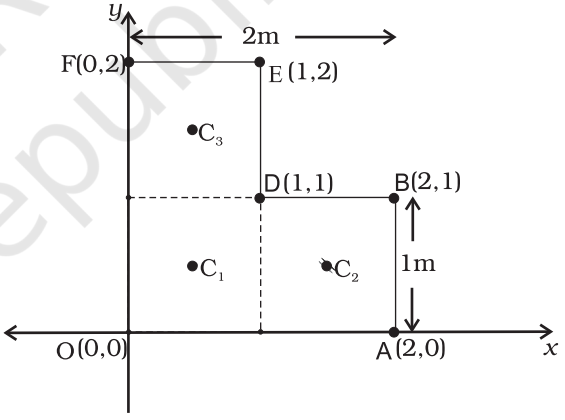


चित्र 6.10

सममिति के आधार पर हम कह सकते हैं कि हर पट्टी का द्रव्यमान केन्द्र उसका मध्य बिन्दु है। अगर हम सभी पट्टियों के मध्य बिन्दुओं को मिलाते हैं तो हमें माध्यिका LP प्राप्त होती है। इसलिए, पूरे त्रिभुज का द्रव्यमान केन्द्र इस माध्यिका LP पर कहीं अवस्थित होगा। इसी प्रकार हम तर्क कर सकते हैं कि यह माध्यिका MQ और NR पर भी अवस्थित होगा। अतः यह द्रव्यमान केन्द्र तीनों माध्यिकाओं का संगामी बिन्दु गति त्रिभुज का केन्द्रक G है।

उदाहरण 6.3: एक दिए गए L-आकृति के फलक (एक पतली चपटी प्लेट) का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए, जिसका विभिन्न भुजाओं को चित्र 6.11 में दर्शाया है। फलक का द्रव्यमान 3 kg है।

हल चित्र 6.11 के अनुसार X एवं Y अक्षों को चुनें तो L-आकृति फलक के विभिन्न शीर्षों के निर्देशांक वही प्राप्त होते हैं जो चित्र में अंकित किए गए हैं। हम L-आकृति को तीन वर्गों से मिलकर बना हुआ मान सकते हैं जिनमें से प्रत्येक वर्ग की भुजा 1m है। प्रत्येक वर्ग का द्रव्यमान 1kg है, क्योंकि फलक समांग हैं। इन तीन वर्गों के द्रव्यमान केन्द्र C_1, C_2 और C_3 हैं, जो सममिति के विचार से उनके ज्यामितीय केन्द्र हैं और इनके निर्देशांक क्रमशः (1/2,1/2), (3/2,1/2), (1/2,3/2) हैं। हम कह सकते हैं कि L-आकृति का द्रव्यमान केन्द्र (X, Y) इन द्रव्यमान बिन्दुओं का द्रव्यमान केन्द्र हैं।



चित्र 6.11

अतः

$$X = \frac{[1(1/2) + 1(3/2) + 1(1/2)]\,\text{kg m}}{(1 + 1 + 1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\text{m}$$

$$Y = \frac{[[1(1/2) + 1(1/2) + 1(3/2)]]\,\text{kg m}}{(1 + 1 + 1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\text{m}$$

L-आकृति का द्रव्यमान केन्द्र रेखा OD पर पड़ता है। इस बात का अंदाजा हम बिना किसी गणना के लगा सकते थे। क्या आप बता सकते हैं, कैसे? यदि यह मानें कि चित्र 6.11 में

© NCERT not to be republished

दर्शाये गए L आकृति फलक के तीन वर्गों के द्रव्यमान अलग-अलग होते तब आप इस फलक का द्रव्यमान केन्द्र कैसे ज्ञात करेंगे? ◀

6.3 द्रव्यमान केन्द्र की गति

द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा जानने के बाद, अब हम इस स्थिति में हैं कि n कणों के एक निकाय के लिए इसके भौतिक महत्व की विवेचना कर सकें। समीकरण (6.4d) को हम फिर से इस प्रकार लिख सकते हैं-

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n \quad (6.7)$$

समीकरण के दोनों पक्षों को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर-

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

या

$$M\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \quad (6.8)$$

जहाँ, $\mathbf{v}_1 (= d\mathbf{r}_1/dt)$ प्रथम कण का वेग है, $\mathbf{v}_2 (= d\mathbf{r}_2/dt)$ दूसरे कण का वेग है, इत्यादि और $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$ कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का वेग है। ध्यान दें, कि हमने यह मान लिया है कि m_1, m_2, ... आदि के मान समय के साथ बदलते नहीं हैं। इसलिए, समय के सापेक्ष समीकरणों को अवकलित करते समय हमने उनके साथ अचरांकों जैसा व्यवहार किया है।

समीकरण (6.8) को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर-

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{v}_n}{dt}$$

या

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\mathbf{a}_n \quad (6.9)$$

जहाँ $\mathbf{a}_1 (= d\mathbf{v}_1/dt)$ प्रथम कण का त्वरण है, $\mathbf{a}_2 (= d\mathbf{v}_2/dt)$ दूसरे कण का त्वरण है, इत्यादि और $\mathbf{A} (= d\mathbf{V}/dt)$ कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण है।

अब, न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार, पहले कण पर लगने वाला बल है $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$, दूसरे कण पर लगने वाला बल है $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$, आदि। तब समीकरण (6.9) को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं-

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n \quad (6.10)$$

अतः कणों के निकाय के कुल द्रव्यमान को द्रव्यमान केन्द्र के त्वरण से गुणा करने पर हमें उस कण-निकाय पर लगने वाले सभी बलों का सदिश योग प्राप्त होता है।

ध्यान दें कि जब हम पहले कण पर लगने वाले बल $\mathbf{F}_1$ की बात करते हैं, तो यह कोई एकल बल नहीं है, बल्कि, इस कण पर लगने वाले सभी बलों का सदिश योग है। यही बात हम अन्य कणों के विषय में भी कह सकते हैं। प्रत्येक कण पर लगने वाले उन बलों में कुछ *बाह्य बल* होंगे जो निकाय से बाहर के पिण्डों द्वारा आरोपित होंगे और कुछ *आंतरिक बल* होंगे जो निकाय के अंदर के कण एक दूसरे पर आरोपित करते हैं। न्यूटन के तृतीय नियम से हम जानते हैं कि ये आंतरिक बल सदैव बराबर परिमाण के और विपरीत दिशा में काम करने वाले जोड़ों के रूप में पाए जाते हैं और इसलिए समीकरण (6.10) में बलों को जोड़ने में इनका योग शून्य हो जाता है। समीकरण में केवल बाह्य बलों का योगदान रह जाता है। समीकरण (6.10) को फिर इस प्रकार लिख सकते हैं

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \quad (6.11)$$

जहाँ $\mathbf{F}_{ext}$ निकाय के कणों पर प्रभावी सभी बाह्य बलों का सदिश योग है।

समीकरण (6.11) *बताती है कि कणों के किसी निकाय का द्रव्यमान केन्द्र इस प्रकार गति करता है मानो निकाय का संपूर्ण द्रव्यमान उसमें संकेन्द्रित हो और सभी बाह्य बल उसी पर आरोपित हों।*

ध्यान दें कि द्रव्यमान केन्द्र की गति के विषय में जानने के लिए, कणों के निकाय के आंतरिक बलों के विषय में कोई जानकारी नहीं चाहिए, इस उद्देश्य के लिए हमें केवल बाह्य बलों को ही जानने की आवश्यकता है।

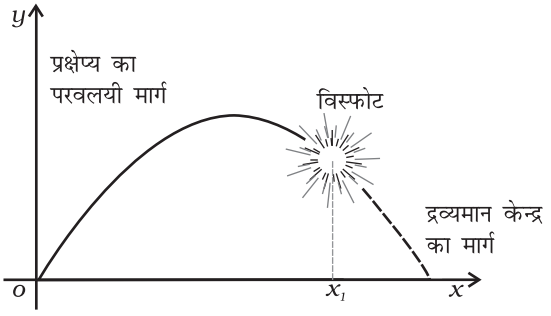
समीकरण (6.11) व्युत्पन्न करने के लिए हमें कणों के निकाय की प्रकृति सुनिश्चित नहीं करनी पड़ी। निकाय कणों का ऐसा संग्रह भी हो सकता है जिसमें तरह-तरह की आंतरिक गतियाँ हों, और शुद्ध स्थानांतरण गति करता हुआ, अथवा, स्थानांतरण एवं घूर्णी गति के संयोजन युक्त एक दृढ़ पिण्ड भी हो सकता है। निकाय कैसा भी हो और इसके अवयवी कणों में किसी भी प्रकार की गतियाँ हों, इसका द्रव्यमान केन्द्र समीकरण (6.11) के अनुसार ही गति करेगा।

परिमित आकार के पिण्डों को एकल कणों की तरह व्यवहार में लाने के बजाय अब हम उनको कणों के निकाय की तरह व्यवहार में ला सकते हैं। हम उनकी गति का शुद्ध स्थानांतरीय अवयव यानि निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिए, बस, पूरे निकाय का कुल द्रव्यमान और निकाय पर लगे सभी बाह्य बलों को निकाय के द्रव्यमान केन्द्र पर प्रभावी मानना होगा।

यही कार्यविधि हमने पिण्डों पर लगे बलों के विश्लेषण और उनसे जुड़ी समस्या के हल के लिए अपनाई थी। हालांकि, इसके लिए कोई स्पष्ट कारण नहीं बताया गया था। अब हम यह समझ सकते हैं, कि पूर्व के अध्ययनों में, हमने बिन कहे ही यह मान लिया था कि निकाय में घूर्णी गति, एवं

© NCERT not to be republished

कणों में आंतरिक गति या तो थी ही नहीं और यदि थी तो नगण्य थी। आगे से हमें यह मानने की आवश्यकता नहीं रहेगी। न केवल हमें अपनी पहले अपनाई गई पद्धति का औचित्य समझ में आ गया है, वरन्, हमने वह विधि भी ज्ञात कर ली है जिसके द्वारा (i) ऐसे दृढ़ पिण्ड की जिसमें घूर्णी गति भी हो, (ii) एक ऐसे निकाय की जिसके कणों में तरह-तरह की आंतरिक गतियाँ हों, स्थानांतरण गति को अलग करके समझा समझाया जा सकता है।



चित्र 6.12 किसी प्रक्षेप्य के खण्डों का द्रव्यमान केन्द्र विस्फोट के बाद भी उसी परवलयाकार पथ पर चलता हुआ पाया जायेगा जिस पर यह विस्फोट न होने पर चलता।

चित्र 6.12 समीकरण (6.11) को स्पष्ट करने वाला एक अच्छा उदाहरण है। अपने निर्धारित परवलयाकार पथ पर चलता हुआ एक प्रक्षेप्य हवा में फट कर टुकड़ों में बिखर जाता है। विस्फोट कारक बल आंतरिक बल है इसलिए उनका द्रव्यमान केन्द्र की गति पर कोई प्रभाव नहीं होता। प्रक्षेप्य और उसके खण्डों पर लगने वाला कुल बाह्य बल विस्फोट के बाद भी वही है जो विस्फोट से पहले था, यानि पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल। अतः, बाह्य बल के अंतर्गत प्रक्षेप्य के द्रव्यमान केन्द्र का परवलयाकार पथ विस्फोट के बाद भी वही बना रहता जो विस्फोट न होने की स्थिति में होता।

6.4 कणों के निकाय का रेखीय संवेग

आपको याद होगा कि रेखीय संवेग की परिभाषा करने वाला व्यंजक है

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (6.12)$$

और, एकल कण के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम को हम सांकेतिक भाषा में लिख सकते हैं

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \qquad (6.13)$$

जहाँ $\mathbf{F}$ कण पर आरोपित बल है। आइये, अब हम n कणों के एक निकाय पर विचार करें जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, \ldots m_n$ है और वेग क्रमशः $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots \mathbf{v}_n$ हैं। कण, परस्पर अन्योन्य क्रियारत हो सकते हैं और उन पर बाह्य बल भी लगे हो सकते हैं। पहले कण का रेखीय संवेग $m_1\mathbf{v}_1$, दूसरे कण का रेखीय संवेग $m_2\mathbf{v}_2$ और इसी प्रकार अन्य कणों के रेखीय संवेग भी हैं।

n कणों के इस निकाय का कुल रेखीय संवेग, एकल कणों के रेखीय संवेगों के सदिश योग के बराबर है।

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n$$
$$= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \qquad (6.14)$$

इस समीकरण की समीकरण (6.8) से तुलना करने पर,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \qquad (6.15)$$

अतः *कणों के एक निकाय का कुल रेखीय संवेग, निकाय के कुल द्रव्यमान तथा इसके द्रव्यमान केन्द्र के वेग के गुणनफल के बराबर होता है।* समीकरण (6.15) का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = M\mathbf{A} \qquad (6.16)$$

समीकरण (6.16) एवं समीकरण (6.11) की तुलना करने पर

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (6.17)$$

यह गति के *न्यूटन के द्वितीय नियम का कथन है जो कणों के निकाय के लिए लागू किया गया है।*

यदि कणों के किसी निकाय पर लगे बाह्य बलों का योग शून्य हो, तो समीकरण (6.17) के आधार पर,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{या} \quad \mathbf{P} = \text{अचरांक} \qquad (6.18a)$$

अतः जब कणों के किसी निकाय पर लगे बाह्य बलों का योग शून्य होता है तो उस निकाय का कुल रेखीय संवेग अचर रहता है। यह कणों के एक निकाय के लिए लागू होने वाला रेखीय संवेग के संरक्षण का नियम है। समीकरण (6.15) के कारण, इसका अर्थ यह भी होता है कि जब निकाय पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है तो इसके द्रव्यमान केन्द्र का वेग परिवर्तित नहीं होता। (इस अध्याय में कणों के निकाय का अध्ययन करते समय हम हमेशा यह मान कर चलेंगे कि निकाय का कुल द्रव्यमान अचर रहता है।)

ध्यान दें, कि आंतरिक बलों के कारण, यानि उन बलों के कारण जो कण एक दूसरे पर आरोपित करते हैं, किसी विशिष्ट

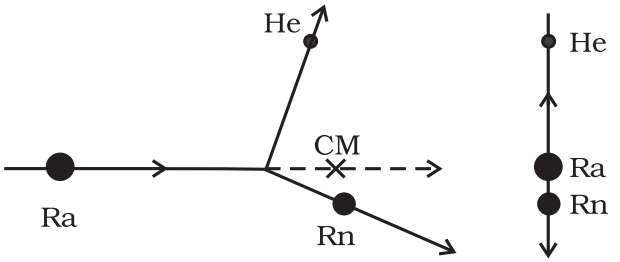
© NCERT not to be republished

कण का गमन-पथ काफी जटिल हो सकता है। फिर भी, यदि निकाय पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य हो तो द्रव्यमान केन्द्र अचर-वेग से ही चलता है, अर्थात्, मुक्त कण की तरह समगति से सरल रेखीय पथ पर चलता है।

सदिश समीकरण (6.18a) जिन अदिश समीकरणों के तुल्य है, वे हैं-

$$P_x = C_1,\ P_y = C_2 \text{ तथा } P_z = C_3 \qquad (6.18\ b)$$

यहाँ P_x, P_y, P_z कुल रेखीय संवेग सदिश **P** के, क्रमशः x, y एवं z दिशा में अवयव हैं और C_1, C_2, C_3 अचरांक हैं।

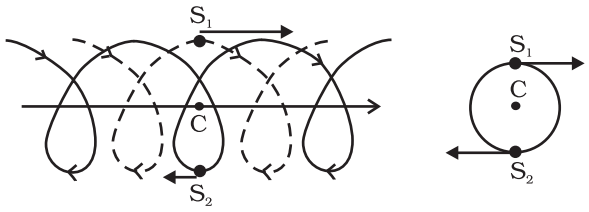


चित्र 6.13 (a) एक भारी नाभिक रेडियम (Ra) एक अपेक्षाकृत हलके नाभिक रेडॉन (Rn) एवं एक अल्फा-कण (हीलियम परमाणु का नाभिक, He) में विखंडित होता है। निकाय का द्रव्यमान केन्द्र समगति में है।

(b) द्रव्यमान केन्द्र की स्थिर अवस्था में उसी भारी कण रेडियम (Ra) का विखंडन। दोनों उत्पन्न हुए कण एक दूसरे की विपरीत दिशा में गतिमान होते हैं।

एक उदाहरण के रूप में, आइये, रेडियम के नाभिक जैसे किसी गतिमान अस्थायी नाभिक के रेडियोएक्टिव क्षय पर विचार करें। रेडियम का नाभिक एक रेडन के नाभिक और एक अल्फा कण में विखंडित होता है। क्षय-कारक बल निकाय के आंतरिक बल हैं और उस पर प्रभावी बाह्य बल नगण्य हैं। अतः निकाय का कुल रेखीय संवेग, क्षय से पहले और क्षय के बाद समान रहता है। विखंडन में उत्पन्न हुए दोनों कण, रेडन का नाभिक एवं अल्फा-कण, विभिन्न दिशाओं में इस प्रकार चलते हैं कि उनके द्रव्यमान केन्द्र का गमन-पथ वही बना रहता है जिस पर क्षयित होने से पहले मूल रेडियम नाभिक गतिमान था (चित्र 6.13(a))।

यदि हम एक ऐसे संदर्भ फ्रेम से इस क्षय प्रक्रिया को देखें जिसमें द्रव्यमान केन्द्र स्थिर हो, तो इसमें शामिल कणों की गति विशेषकर सरल दिखाई पड़ती है; उत्पन्न हुए दोनों कण एक दूसरे की विपरीत दिशा में इस प्रकार गतिमान होते हैं कि उनका द्रव्यमान केन्द्र स्थिर रहे, जैसा चित्र 6.13 (b) में दर्शाया गया है।



चित्र 6.14 (a) बायनरी निकाय बनाते दो नक्षत्रों S_1 एवं S_2 के गमन पथ, जो क्रमशः बिन्दु रेखा एवं सतत रेखा द्वारा दर्शाये गए हैं। इनका द्रव्यमान केन्द्र C समगति में है।

(b) उसी बायनरी निकाय की गति जब द्रव्यमान केन्द्र C स्थिर है।

कणों की निकाय संबंधी बहुत सी समस्याओं में जैसा ऊपर बताई गई रेडियोएक्टिव क्षय संबंधी समस्या में दर्शाया है, प्रयोगशाला के संदर्भ-फ्रेम की अपेक्षा, द्रव्यमान-केन्द्र के फ्रेम में कार्य करना आसान होता है।

खगोलिकी में युग्मित (बायनरी) नक्षत्रों का पाया जाना एक आम बात है। यदि कोई बाह्य बल न लगा हो तो किसी युग्मित नक्षत्र का द्रव्यमान केन्द्र एक मुक्त-कण की तरह चलता है जैसा चित्र 6.14 (a) में दर्शाया गया है। चित्र में समान द्रव्यमान वाले दोनों नक्षत्रों के गमन पथ भी दर्शाये गए हैं; वे काफी जटिल दिखाई पड़ते हैं। यदि हम द्रव्यमान केन्द्र के फ्रेम से देखें तो हम पाते हैं कि ये दोनों नक्षत्र द्रव्यमान केन्द्र के परितः एक वृत्ताकार पथ पर गतिमान हैं जबकि द्रव्यमान केन्द्र स्थिर है। ध्यान दें, कि दोनों नक्षत्रों को वृत्ताकार पथ के व्यास के विपरीत सिरों पर बने रहना है (चित्र 6.14(b))। इस प्रकार इन नक्षत्रों का गमन पथ दो गतियों के संयोजन से निर्मित होता है (i) द्रव्यमान केन्द्र की सरल रेखा में समांग गति (ii) द्रव्यमान केन्द्र के परितः नक्षत्रों की वृत्ताकार कक्षाएँ।

उपरोक्त दो उदाहरणों से दृष्टव्य है, कि निकाय के एकल कणों की गति को द्रव्यमान केन्द्र की गति और द्रव्यमान केन्द्र के परितः गति में अलग करके देखना एक अत्यंत उपयोगी तकनीक है जिससे निकाय की गति को समझने में सहायता मिलती है।

6.5 दो सदिशों का सदिश गुणनफल

हम सदिशों एवं भौतिकी में उनके उपयोग के विषय में पहले से ही जानते हैं। अध्याय 5 (कार्य, ऊर्जा, शक्ति) में हमने दो

© NCERT not to be republished

सदिशों के अदिश गुणन की परिभाषा की थी। एक महत्वपूर्ण भौतिक राशि, कार्य, दो सदिश राशियों, बल एवं विस्थापन के अदिश गुणनफल द्वारा परिभाषित की जाती है।

अब हम दो सदिशों का एक अन्य प्रकार का गुणन परिभाषित करेंगे। यह सदिश गुणन है। घूर्णी गति से संबंधित दो महत्वपूर्ण राशियाँ, बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग, सदिश गुणन के रूप में परिभाषित की जाती हैं।

सदिश गुणन की परिभाषा

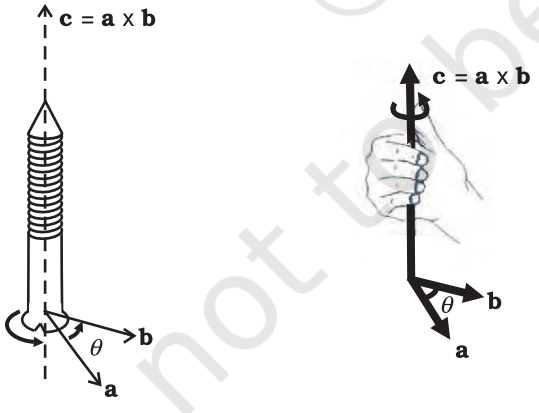
दो सदिशों **a** एवं **b** का सदिश गुणनफल एक ऐसा सदिश **c** है

(i) जिसका परिमाण $c = ab \sin\theta$ है, जहाँ a एवं b क्रमशः **a** एवं **b** के परिमाण हैं और θ दो सदिशों के बीच का कोण है।

(ii) **c** उस तल के अभिलम्बवत् है जिसमें **a** एवं **b** अवस्थित हैं।

(iii) यदि हम एक दक्षिणावर्त्त पेंच लें और इसको इस प्रकार रखें कि इसका शीर्ष **a** एवं **b** के तल में हो और लम्बाई इस तल के अभिलम्बवत् हो और फिर शीर्ष को **a** से **b** की ओर घुमायें, तो पेंच की नोंक **c** की दिशा में आगे बढ़ेगा। दक्षिणावर्त पेंच का नियम चित्र 6.15a में दर्शाया गया है।

यदि आप सदिशों **a** एवं **b** के तल के अभिलम्बवत् रेखा के परितः अपने दाहिने हाथ की उंगलियों को इस प्रकार मोड़ें कि उनके सिरे **a** से **b** की ओर इंगित करें, तब इस हाथ का फैला हुआ अंगूठा **c** की दिशा बतायेगा जैसा चित्र 6.15b में दर्शाया गया है।



(a) (b)

चित्र 6.15(a) दो सदिशों के सदिश गुणनफल की दिशा निर्धारित करने के लिए दक्षिणावर्त पेंच का नियम
(b) सदिश गुणनफल की दिशा बताने के लिए दाहिने हाथ का नियम

दाहिने हाथ के नियम को सरल रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं : अपने दाहिने हाथ की हथेली को **a** से **b** की ओर संकेत करते हुए खोलो। आपके फैले हुए अंगूठे का सिरा **c** की दिशा बतायेगा।

यह याद रखना चाहिए कि **a** और **b** के बीच दो कोण बनते हैं। चित्र 6.15 (a) एवं (b) में इनमें से कोण θ दर्शाया गया है, स्पष्टतः दूसरा $(360^0 - \theta)$ है। उपरोक्त नियमों में से कोई भी नियम लगाते समय **a** एवं **b** के बीच का छोटा कोण $(<180^0)$ लेकर नियम लगाना चाहिए। यहाँ यह θ है।

क्योंकि सदिश गुणन में, गुणा व्यक्त करने के लिए क्रॉस (×) चिह्न का उपयोग किया जाता है इसलिए इस गुणन को क्रॉस गुणन भी कहते हैं।

- ध्यान दें कि दो सदिशों का अदिश गुणन क्रमविनियम नियम का पालन करता है जैसा पहले बताया गया है **a.b = b.a**

  परन्तु, सदिश गुणन क्रमविनिमय नियम का पालन नहीं करता, अर्थात् $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ एवं $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ के परिमाण समान $(ab \sin\theta)$ हैं ; और ये दोनों ही उस तल के अभिलम्बवत् हैं जिसमें **a** एवं **b** विद्यमान है। लेकिन, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ के लिए दक्षिणावर्त पेंच को **a** से **b** की ओर घुमाना होता है जबकि $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ के लिए **b** से **a** की ओर। परिणामतः ये दो सदिश विपरीत दिशा में होते हैं

  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

- सदिश गुणन का दूसरा रोचक गुण है इसका परावर्तन-गत व्यवहार। परावर्तन के अंतर्गत (यानि दर्पण में प्रतिबिम्ब लेने पर) हमें $x \to -x, y \to -y$ और $z \to -z$ मिलते हैं। परिणामस्वरूप सभी सदिशों के अवयवों के चिह्न बदल जाते हैं और इस प्रकार $a \to -a$, $b \to -b$। देखें कि परावर्तन में $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ का क्या होता है?

  $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \to (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

  अतः परावर्तन से $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ का चिह्न नहीं बदलता।

- अदिश एवं सदिश दोनों ही गुणन सदिश-योग पर वितरणशील होते हैं। अतः

  $$\mathbf{a}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$$

  $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

- हम $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ को अवयवों के रूप में भी लिख सकते हैं। इसके लिए हमें कुछ सदिश गुणनफलों की जानकारी आवश्यक होगी :

  (i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (**0** एक शून्य सदिश है, यानि शून्य परिमाण वाला सदिश)

© NCERT not to be republished

स्पष्टत: ऐसा इसलिए है क्योंकि $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ का परिमाण $a^2 \sin 0^\circ = 0$ ।

इससे हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं कि

(i) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

ध्यान दें, कि $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण $\sin 90^0$ या 1 है, चूंकि $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ दोनों का परिमाण 1 है और उनके बीच 90^0 का कोण है। अत: $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ एक एकांक सदिश है। $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ के तल के अभिलम्बवत् दक्षिणावर्त पेंच के नियमानुसार ज्ञात करें तो इनसे संबंधित यह एकांक सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ है। इसी प्रकार आप यह भी पुष्ट कर सकते हैं कि

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad \text{और} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

सदिश गुणन के क्रम विनिमेयता गुण के आधार पर हम कह सकते हैं–

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$$

ध्यान दें कि उपरोक्त सदिश गुणन व्यंजकों में यदि $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ चक्रीय क्रम में आते हैं तो सदिश गुणन धनात्मक है और यदि चक्रीय क्रम में नहीं आते हैं तो सदिश गुणन ऋणात्मक है।

अब,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_xb_y\hat{\mathbf{k}} - a_xb_z\hat{\mathbf{j}} - a_yb_x\hat{\mathbf{k}} + a_yb_z\hat{\mathbf{i}} + a_zb_x\hat{\mathbf{j}} - a_zb_y\hat{\mathbf{i}}$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{\mathbf{k}}$$

उपरोक्त व्यंजक प्राप्त करने में हमने सरल सदिश गुणनफलों का उपयोग किया है। $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ को व्यक्त करने वाले व्यंजक को हम एक डिटरमिनेंट (सारणिक) के रूप में लिख सकते हैं जो याद रखने में आसान है।

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

उदाहरण 6.4: *दो सदिशों* $\mathbf{a} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ *एवं* $\mathbf{b} = (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$ *के अदिश एवं सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।*

हल

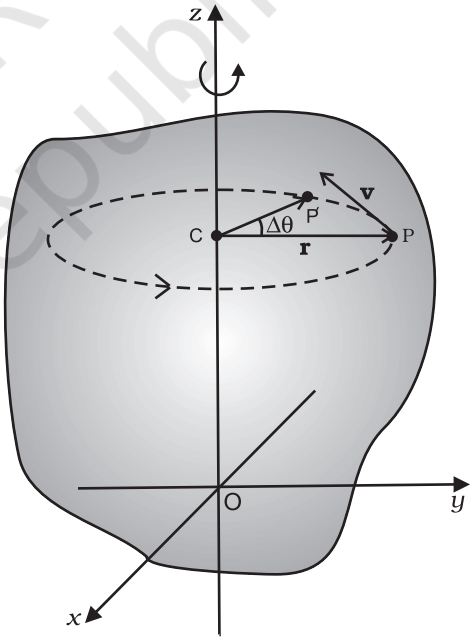
$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -6 - 4 - 15$$
$$= -25$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

ध्यान दें कि, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ ◀

6.6 कोणीय वेग और इसका रेखीय वेग से संबंध

इस अनुभाग में हम अध्ययन करेंगे कि कोणीय वेग क्या है, और घूर्णी गति में इसकी क्या भूमिका है? हम यह समझ चुके हैं कि घूर्णी गति में पिण्ड का प्रत्येक कण एक वृत्ताकार पथ पर चलता है। किसी कण का रेखीय वेग उसके कोणीय वेग से संबंधित



चित्र 6.16 *एक स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन। स्थिर (z-) अक्ष के परित: घूमते दृढ़ पिण्ड के किसी कण P का वृत्ताकार पथ पर चलना। वृत्त का केन्द्र (C), अक्ष पर अवस्थित है।*

होता है। इन दो राशियों के बीच का संबंध एक सदिश गुणन से व्यक्त होता है। सदिश गुणन के विषय में आपने पिछले अनुभाग में पढ़ा है।

© NCERT not to be republished

आइये चित्र 6.4 पुनः देखें। जैसा ऊपर बताया गया है, किसी दृढ़ पिण्ड की एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णी गति में, पिण्ड का प्रत्येक कण एक वृत्त में गति करता है। ये वृत्त अक्ष के लम्बवत् समतल में होते हैं जिनके केन्द्र अक्ष के ऊपर अवस्थित होते हैं। चित्र 6.16 में हमने चित्र 6.4 को फिर से बनाया है और इसमें स्थिर (z-) अक्ष के परितः घूमते, दृढ़ पिण्ड के, एक विशिष्ट कण को बिन्दु P पर दर्शाया है। यह कण एक वृत्त बनाता है जिसका केन्द्र C, अक्ष पर स्थित है। वृत्त की त्रिज्या r है, जो बिन्दु P की अक्ष से लम्बवत् दूरी है। चित्र में हमने P बिन्दु पर कण का रेखीय वेग सदिश $\mathbf{v}$ भी दर्शाया है। इसकी दिशा वृत्त के P बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है।

माना कि Δt समय अंतराल के बाद कण की स्थिति P' है (चित्र 6.16)। कोण PCP', Δt समय में कण के कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ का माप है। Δt समय में कण का औसत कोणीय वेग $\Delta\theta/\Delta t$ है। जैसे-जैसे Δt का मान घटाते हुए शून्योन्मुख करते हैं, अनुपात $\Delta\theta/\Delta t$ का मान एक सीमांत मान प्राप्त करता है जो P बिन्दु पर कण का तात्क्षणिक कोणीय वेग $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ है। *तात्क्षणिक कोणीय वेग* को हम ω से व्यक्त करते हैं। वृत्तीय गति के अध्ययन से हम जानते हैं कि रेखीय वेग सदिश का परिमाण v एवं कोणीय वेग ω के बीच संबंध एक सरल समीकरण $v = \omega r$ द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

हमने देखा कि किसी दिए गए क्षण पर समीकरण $v = \omega r$ दृढ़ पिण्ड के सभी कणों पर लागू होती है। अतः स्थिर अक्ष से r_i दूरी पर स्थित किसी कण का, किसी क्षण पर, रेखीय वेग v_i होगा

$$v_i = \omega r_i \qquad (6.19)$$

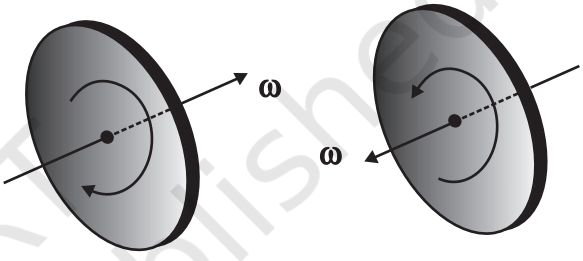
यहाँ भी सूचकांक i का मान 1 से n तक बदलता है, जहाँ n पिण्ड के कुल कणों की संख्या है।

अक्ष पर स्थित कणों के लिए $r = 0$, और इसलिए $v = a\ r = 0$। अतः अक्ष पर स्थित कण रेखीय गति नहीं करते। इससे यह पुष्ट होता है कि अक्ष *स्थिर* है।

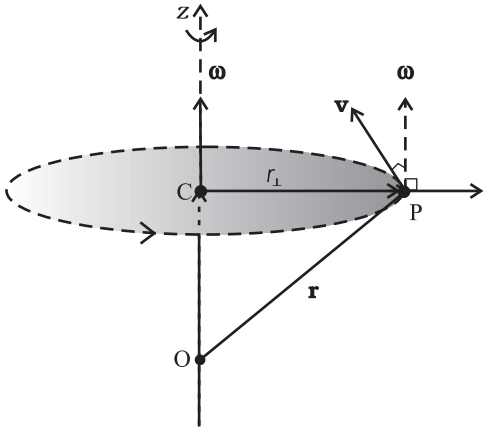
ध्यान दें कि हमने सभी कणों का समान कोणीय वेग लिया है। इसलिए *हम ω को पूरे पिण्ड का कोणीय वेग कह सकते हैं।*

किसी पिण्ड की *शुद्ध स्थानांतरण गति का अभिलक्षण हमने यह बताया कि इसके सभी कण, किसी दिए गए क्षण पर समान वेग से चलते हैं। इसी प्रकार, शुद्ध घूर्णी गति के लिए हम कह सकते हैं कि किसी दिए गए क्षण पर पिण्ड के सभी कण समान कोणीय वेग से घूमते हैं।* ध्यान दें कि स्थिर अक्ष के परितः घूमते दृढ़ पिण्ड की घूर्णी गति का यह अभिलक्षण, दूसरे शब्दों में (जैसा अनुभाग 6.1 में बताया गया है) पिण्ड का हर कण एक वृत्त में गति करता है और यह वृत्त अक्ष के अभिलम्बवत् तल में स्थित होता है जिसका केन्द्र अक्ष पर होता है।

हमारे अभी तक के विवेचन से ऐसा लगता है कि कोणीय वेग एक अदिश राशि है। किंतु तथ्य यह है, कि यह एक सदिश राशि है। हम इस तथ्य के समर्थन या पुष्टि के लिए कोई तर्क नहीं देंगे, बस यह मान कर चलेंगे। एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन में, कोणीय वेग सदिश, घूर्णन अक्ष के अनुदिश होता है, और उस दिशा में संकेत करता है जिसमें एक दक्षिणावर्त पेंच आगे बढ़ेगा जब उसके शीर्ष को पिण्ड के घूर्णन की दिशा में घुमाया जाएगा। देखिए चित्र 6.17(a)। इस सदिश का परिमाण, $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, जैसा ऊपर बताया गया है।



चित्र 6.17(a) *यदि दक्षिणावर्त पेंच के शीर्ष को पिण्ड के घूर्णन की दिशा में घुमाया जाए तो पेंच कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा में आगे बढ़ेगा। यदि पिण्ड के घूर्णन की दिशा (वामावर्त या दक्षिणावर्त) बदलेगी तो $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा भी बदल जाएगी।*



चित्र 6.17 (b) *कोणीय वेग सदिश $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा स्थिर घूर्णन अक्ष के अनुदिश है। P बिन्दु पर स्थित कण का रेखीय वेग $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ है। यह $\boldsymbol{\omega}$ एवं $\boldsymbol{r}$ दोनों के लम्बवत् है और कण जिस वृत्त पर चलता है उसके ऊपर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है।*

© NCERT not to be republished

आइये, अब हम सदिश गुणनफल $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ को ठीक से समझें और जानें कि यह क्या व्यक्त करता है। चित्र 6.17(b) को देखें, जो वैसे तो चित्र 6.16 का ही भाग है पर, यहाँ इसे कण P का पथ दर्शाने के लिए दोबारा बनाया गया है। चित्र में, स्थिर (z-) अक्ष के अनुदिश सदिश $\boldsymbol{\omega}$ और मूल बिन्दु O के सापेक्ष दृढ़ पिण्ड के बिन्दु P का स्थिति-सदिश $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ दर्शाया गया है। ध्यान दें कि मूल बिन्दु को घूर्णन अक्ष के ऊपर ही रखा गया है।

अब $\boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{OP} = \boldsymbol{\omega} \quad (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$

लेकिन $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC} = \mathbf{0}$ क्योंकि के अनुदिश $\boldsymbol{\omega}$ $\mathbf{OC}$ है।

अत: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$

सदिश $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$, $\boldsymbol{\omega}$ के लम्बवत् है, यानि z-अक्ष पर भी तथा कण P द्वारा बनाये गए वृत्त की त्रिज्या $\mathbf{CP}$ पर भी। अत: यह वृत्त के P बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है। $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$ का परिमाण ω (CP) है, क्योंकि $\boldsymbol{\omega}$ एवं $\mathbf{CP}$ एक दूसरे के लम्बवत् हैं। हमें $\mathbf{CP}$ को $\boldsymbol{r}_{\perp}$ से प्रदर्शित करना चाहिए ताकि इसके और $\mathrm{OP} = r$ के परिमाण में संभ्रम की स्थिति से बचा जा सके।

अत: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $\omega r_{\perp}$ है और जिसकी दिशा कण P द्वारा बनाये गए वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है। यही बिन्दु P पर रेखीय वेग सदिश का परिमाण और दिशा है। अत:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{r} \tag{6.20}$$

वास्तव में, समीकरण (6.20) उन दृढ़ पिण्डों की घूर्णन गति पर भी लागू होती है जो एक बिन्दु के परित: घूमते हैं, जैसे लट्टू का घूमना (चित्र 6.6(a))। इस तरह के मामलों में, $\mathbf{r}$ कण का स्थिति सदिश प्रदर्शित करता है जो स्थिर बिन्दु को मूल बिन्दु लेकर मापा गया हो।

ध्यान दें, *कि जब कोई वस्तु एक स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन करती है तो समय के साथ सदिश $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा नहीं बदलती। हाँ, इसका परिमाण क्षण-क्षण पर बदलता रहता है। अधिक व्यापक घूर्णन के मामलों में $\boldsymbol{\omega}$ के परिमाण और दिशा दोनों समय के साथ बदलते रह सकते हैं।*

6.6.1 कोणीय त्वरण

आपने ध्यान दिया होगा कि हम घूर्णी गति संबंधी अध्ययन को भी उसी तरह आगे बढ़ा रहे हैं जिस तरह हमने अपने स्थानांतरण गति संबंधी अध्ययन को आगे बढ़ाया था और जिसके बारे में अब हम भली-भाँति परिचित हैं। स्थानांतरण गति की गतिज चर राशियों यथा रेखीय विस्थापन ($\Delta\mathbf{r}$) और रेखीय वेग ($\mathbf{v}$) के सदृश ही घूर्णी गति में कोणीय विस्थापन ($\boldsymbol{\theta}$) एवं कोणीय वेग ($\boldsymbol{\omega}$) की अवधारणाएं हैं। तब यह स्वाभाविक ही है कि जैसे हमने स्थानांतरीय गति में रेखीय त्वरण को वेग परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित किया था वैसे ही घूर्णी गति में कोणीय त्वरण को भी परिभाषित करें। अत: कोणीय त्वरण $\boldsymbol{\alpha}$ की परिभाषा, समय के सापेक्ष कोणीय वेग परिवर्तन की दर के रूप में कर सकते हैं। यानि,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{6.21}$$

यदि घूर्णन अक्ष स्थिर है तो $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा और इसलिए $\boldsymbol{\alpha}$ की दिशा भी स्थिर होगी। इस स्थिति में तब सदिश समीकरण अदिश समीकरण में बदल जाती है और हम लिख सकते हैं-

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{6.22}$$

6.7 बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग

इस अनुभाग में, हम आपको ऐसी दो राशियों से अवगत करायेंगे जिनको दो सदिशों के सदिश गुणन के रूप में परिभाषित किया जाता है। ये राशियाँ, जैसा हम देखेंगे, कणों के निकायों, विशेषकर दृढ़ पिण्डों की गति का विवेचन करने में बहुत महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती हैं।

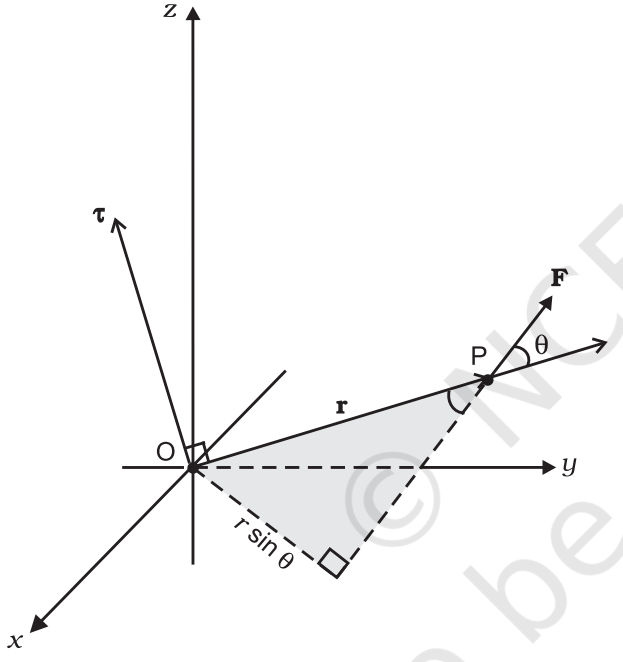
6.7.1 एक कण पर आरोपित बल का आघूर्ण

हमने सीखा है, कि किसी दृढ़ पिण्ड की गति, व्यापक रूप में, घूर्णन एवं स्थानांतरण का संयोजन होती है। यदि पिण्ड किसी बिन्दु या किसी रेखा के अनुदिश स्थिर है तो इसमें केवल घूर्णी गति होती है। हम जानते हैं कि किसी वस्तु की स्थानांतरीय गत्यावस्था में परिवर्तन लाने के लिए (यानि इसमें रेखीय त्वरण पैदा करने के लिए) बल की आवश्यकता होती है। तब स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि घूर्णी गति में बल के तुल्य रूप कौन सी राशि है? एक समग्र स्थिति द्वारा इस प्रश्न का उत्तर तलाशने के लिए आइये किसी द्वार को खोलने या बंद करने का उदाहरण लें। द्वार एक दृढ़ पिण्ड है जो कब्ज़ों से होकर गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के परित: घूम सकता है। द्वार को कौन घुमाता है? यह तो स्पष्ट ही है कि जब तक दरवाजे पर बल नहीं लगाया जायेगा यह नहीं घूम सकता। किन्तु, किसी भी बल द्वारा यह कार्य किया जा सकता हो, ऐसा नहीं है। कब्जों से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा पर लगने वाला बल, द्वार में कोई भी घूर्णन गति उत्पन्न नहीं कर सकता किंतु किसी दिए गए परिमाण का

© NCERT not to be republished

द्वार को घुमाने में सबसे अधिक प्रभावी होता है। घूर्णी गति में बल का परिमाण ही नहीं, बल्कि, यह कहाँ और कैसे लगाया जाता है यह भी महत्वपूर्ण होता है।

घूर्णी गति में बल के समतुल्य राशि *बल आघूर्ण* है। इसको ऐंठन (टॉर्क) अथवा बल युग्म भी कहा जाता है। (हम बल आघूर्ण और टॉर्क शब्दों का इस्तेमाल एकार्थी मानकर करेंगे। पहले हम एकल कण के विशिष्ट मामले में बल आघूर्ण की परिभाषा देंगे। बाद में इस अवधारणा को आगे बढ़ाकर कणों के निकाय और दृढ़ पिण्डों के लिए लागू करेंगे। हम, घूर्णन गति में इसके कारण होने वाले परिवर्तन यानि दृढ़ पिण्ड के कोणीय त्वरण से इसका संबंध भी जानेंगे।



चित्र 6.18 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\boldsymbol{\tau}$ *उस तल के लम्बवत् है जिसमें* $\mathbf{r}$ *एवं* $\mathbf{F}$ *हैं, और इसकी दिशा दक्षिणावर्त पेंच के नियम द्वारा जानी जा सकती है।*

यदि, P बिन्दु पर स्थित किसी कण पर बल $\mathbf{F}$ लगा हो और मूल बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु P का स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ हो (चित्र 6.18), तो मूल बिन्दु के सापेक्ष कण पर लगने वाले बल का आघूर्ण निम्नलिखित सदिश गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जायेगा–

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (6.23)$$

बल आघूर्ण एक सदिश राशि है। इसका संकेत चिह्न ग्रीक वर्णमाला का एक अक्षर τ *टॉव* है। $\boldsymbol{\tau}$ का परिमाण है

$$\tau = rF \sin\theta \qquad (6.24a)$$

जहाँ r स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ का परिमाण यानि OP की लंबाई है, F, बल $\mathbf{F}$ का परिमाण है तथा θ, $\mathbf{r}$ एवं $\mathbf{F}$ के बीच का लघु कोण है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है।

बल आघूर्ण का विमीय सूत्र $M L^2 T^{-2}$ है । इसकी विमायें वही हैं जो कार्य और ऊर्जा की। तथापि, यह कार्य से बिलकुल अलग भौतिक राशि है। बल आघूर्ण एक सदिश राशि है, जबकि, कार्य एक अदिश राशि है। बल आघूर्ण का S.I मात्रक न्यूटन मीटर (Nm) है। चित्र से स्पष्ट है कि बल आघूर्ण के परिमाण को हम लिख सकते हैं–

$$\tau = (r \sin\theta)F = r_\perp F \qquad (6.24b)$$

या $$\tau = rF \sin\theta = rF_\perp \qquad (6.24c)$$

जहाँ $r_\perp = r \sin\theta$ बल की क्रिया-रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी है और $F_\perp (= F \sin\theta)$, $\boldsymbol{r}$ के लम्बवत् दिशा में $\mathbf{F}$ का अवयव है। ध्यान दें कि जब $r = 0$ या $F = 0$ या $\theta = 0^0$ अथवा 180^0 तब $\tau = 0$ । अत: यदि बल का परिमाण शून्य हो या बल मूल बिन्दु पर प्रभावी हो या बल की क्रिया रेखा मूल बिन्दु से गुजरती हो तो बल आघूर्ण शून्य हो जाता है।

आपका ध्यान इस बात की ओर जाना चाहिए कि $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ सदिश गुणन होने के कारण दो सदिशों के सदिश गुणनफल के सभी गुण इस पर भी लागू होते हैं। अत: यदि बल की दिशा उलट दी जायेगी तो बल आघूर्ण की दिशा भी उलटी हो जायेगी। परन्तु यदि $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ दोनों की दिशा उलट दी जाए तो बल आघूर्ण की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

6.7.2 किसी कण का कोणीय संवेग

जैसे बल आघूर्ण, रेखीय गति में बल का घूर्णी समतुल्य है, ठीक वैसे ही कोणीय संवेग, रेखीय संवेग का घूर्णी समतुल्य है। पहले हम एकल कण के विशिष्ट मामले में कोणीय संवेग को परिभाषित करेंगे और एकल कण की गति के संदर्भ में इसकी उपयोगिता देखेंगे। तब, कोणीय संवेग की परिभाषा को दृढ़ पिण्डों सहित कणों के निकायों के लिए लागू करेंगे।

बल आघूर्ण की तरह ही कोणीय संवेग भी एक सदिश गुणन है। इसको हम (रेखीय) संवेग का आघूर्ण कह सकते हैं। इस नाम से कोणीय संवेग की परिभाषा का अनुमान लगाया जा सकता है।

m द्रव्यमान और $\mathbf{p}$ रेखीय संवेग का एक कण लीजिए, मूल बिन्दु O के सापेक्ष, जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ हो। तब मूल बिन्दु O के सापेक्ष इस कण का कोणीय संवेग $\boldsymbol{l}$ निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित होगा–

© NCERT not to be republished

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (6.25a)$$

कोणीय संवेग सदिश की परिमाण है

$$l = r\, p \sin\theta \qquad (6.26a)$$

जहाँ p सदिश $\mathbf{p}$ का परिमाण है तथा θ $\mathbf{r}$ एवं $\mathbf{p}$ के बीच का लघु कोण है। इस समीकरण को हम लिख सकते हैं-

$$l = r\, p_\perp \text{ या } r_\perp p \qquad (6.26b)$$

जहाँ $r_\perp$ $(= r\sin\theta)$ सदिश $\mathbf{p}$ की दिशा रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी है और $p_\perp (= p\sin\theta)$, $\mathbf{r}$ की लम्बवत् दिशा में $\mathbf{p}$ का अवयव है। जब या तो रेखीय संवेग शून्य हो $(p = 0)$ या कण मूल बिन्दु पर हो $(r = 0)$ या फिर $\mathbf{p}$ की दिशा रेखा मूल बिन्दु से गुजरती हो $\theta = 0^0$ या 180^0) तब हम अपेक्षा कर सकते हैं कि कोणीय संवेग शून्य होगा $(l = 0)$।

भौतिक राशियों, बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग में एक महत्वपूर्ण पारस्परिक संबंध है। यह संबंध भी बल एवं रेखीय संवेग के बीच के संबंध का घूर्णी समतुल्य है। एकल कण के संदर्भ में यह संबंध व्युत्पन्न करने के लिए हम $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ को समय के आधार पर अवकलित करते हैं,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

दाईं ओर के व्यंजक पर गुणन के अवकलन का नियम लागू करें, तो

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

अब, कण का वेग $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ एवं $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ लिखें, तो

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0,$$

क्योंकि दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य होता है। तथा, चूंकि $\mathrm{d}\mathbf{p} / \mathrm{d}t = \mathbf{F}$,

$$\therefore \qquad \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

अतः $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$$

या, $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau} \qquad (6.27)$$

अतएव, किसी कण के कोणीय संवेग में समय के साथ होने वाले परिवर्तन की दर इस पर प्रभावी बल आघूर्ण के बराबर होती है। यह समीकरण $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$, जो एकल कण की स्थानांतरीय गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम को व्यक्त करता है, का घूर्णी समतुल्य है।

कणों के निकाय का बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग

कणों के किसी निकाय का, किसी दिए गए बिन्दु के परितः कुल कोणीय संवेग ज्ञात करने के लिए हमें एकल कणों के कोणीय संवेगों के सदिश योग की गणना करनी होगी। अतः n कणों के निकाय के लिए,

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \ldots + \boldsymbol{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i$$

iवें कण का कोणीय संवेग होगा,

$\boldsymbol{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$

जहाँ, $\mathbf{r}_i$ दिए गए मूल बिन्दु के सापेक्ष iवें कण का स्थिति सदिश है और $\mathbf{p} = (m_i\mathbf{v}_i)$ उस कण का रेखीय संवेग है। (कण का द्रव्यमान m_i एवं वेग $\mathbf{v}_i$ है)। कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग को हम निम्नवत् लिख सकते हैं-

$$\mathbf{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (6.25b)$$

यह समीकरण (6.25a) में दी गई एकाकी कण के संवेग की परिभाषा का कणों के निकाय के लिए किया गया व्यापकीकरण है।

समीकरणों (6.23) और (6.25b)का उपयोग करें तो

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \boldsymbol{l}_i\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (6.28a)$$

जहाँ $\boldsymbol{\tau}_i$, i वें कण पर प्रभावी बल आघूर्ण है;

$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$

iवें कण पर लगने वाला बल $\mathbf{F}_i$, इस पर लगने वाले सभी बाह्य बलों $\mathbf{F}_i^{ext}$ एवं निकाय के दूसरे कणों द्वारा इस कण पर लगने वाले आंतरिक बलों $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$ का सदिश योग है। इसलिए, हम कुल बल आघूर्ण में बाह्य एवं आंतरिक बलों के योगदान को अलग-अलग कर सकते हैं।

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ अर्थात्}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{\text{int}},$$

जहाँ $$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$$

और $$\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}}$$

हम, न सिर्फ न्यूटन के गति का तृतीय नियम यानि यह तथ्य कि निकाय के किन्हीं दो कणों के बीच लगने वाले बल बराबर होते हैं और विपरीत दिशा में लगते हैं, बल्कि यह भी मानकर चलेंगे कि ये बल दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश लगते हैं। इस स्थिति में आंतरिक बलों का, निकाय के कुल बल आघूर्ण में योगदान शून्य होगा। क्योंकि, प्रत्येक क्रिया-प्रतिक्रिया

© NCERT not to be republished

युग्म का परिणामी बल आघूर्ण शून्य है। अत: $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = \mathbf{0}$ और इसलिए $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$

चूंकि $\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i$, समीकरण (6.28a) से निष्कर्ष निकलता है, कि

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \qquad (6.28\,b)$$

अत:, *कणों के किसी निकाय के कुल कोणीय संवेग में समय के अनुसार होने वाले परिवर्तन की दर उस पर आरोपित बाह्य बल आघूर्णों (यानि बाह्य बलो के आघूर्णों) के सदिश योग के बराबर होती है।* ध्यान रहे कि जिस बिन्दु (यहाँ हमारे संदर्भ-फ्रेम का मूल बिन्दु) के परित: कुल कोणीय संवेग लिया जाता है उसी के परित: बाह्य बल आघूर्णों की गणना की जाती है। समीकरण (6.28 b), कणों के निकाय के व्यापकीकृत कण की समीकरण (6.27) ही है। यह भी ध्यान देने की बात है कि एक कण के मामले में आंतरिक बलों या आंतरिक बल आघूर्णों का कोई अस्तित्व नहीं होता। समीकरण (6.28 b) निम्नलिखित समीकरण (6.17) का घूर्णी समतुल्य है।

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (6.17)$$

ध्यान दें कि समीकरण (6.17) की तरह ही, समीकरण (6.28b) भी कणों के सभी निकायों के लिए लागू होती है चाहे वह पिण्ड दृढ़ हो या विभिन्न प्रकार की गतियों से युक्त पृथक पृथक कणों का निकाय।

कोणीय संवेग का संरक्षण

यदि $\boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{0}$, तो समीकरण (6.28b) रह जाती है

$$\therefore \qquad \mathbf{L} = \text{अचरांक} \qquad (6.29a)$$

अत:, कणों के किसी निकाय पर आरोपित कुल बाह्य बल आघूर्ण यदि शून्य हो तो उस निकाय का कुल कोणीय संवेग संरक्षित होता है अर्थात् अचर रहता है। समीकरण (6.29a) तीन अदिश समीकरणों के समतुल्य है।

$$L_x = K_1,\ L_y = K_2 \text{ एवं } L_z = K_3 \qquad (6.29\,b)$$

यहाँ K_1, K_2 एवं K_3 अचरांक हैं तथा L_x, L_y और L_z कुल कोणीय संवेग सदिश $\mathbf{L}$ के क्रमश: x, y एवं z दिशाओं में वियोजित अवयव हैं। यह कथन कि कुल कोणीय संवेग संरक्षित है, इसका यह भी अर्थ है कि ये तीनों अवयव भी संरक्षित हैं।

समीकरण (6.29a), समीकरण (6.18a) यानि कणों के निकाय के कुल रेखीय संवेग के संरक्षण के नियम, का घूर्णी समतुल्य है। समीकरण (6.18a) की तरह ही अनेक व्यावहारिक स्थितियों में इसके अनुप्रयोग हैं। इस अध्याय में कुछ रोचक अनुप्रयोगों की हम चर्चा करेंगे।

उदाहरण 6.5: मूल बिन्दु के परित:, बल $7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$ का बल आघूर्ण ज्ञात कीजिए। बल जिस कण पर लगता है उसका स्थिति सदिश $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ है।

हल : यहाँ $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

एवं $\mathbf{F} = 7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

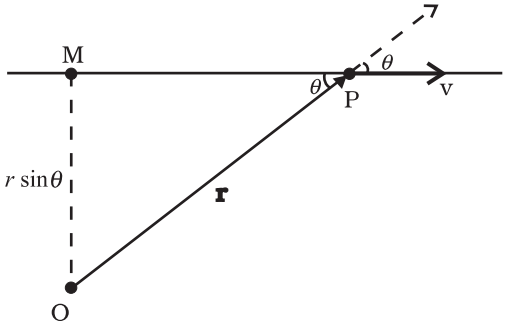
बलाघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ज्ञात करने के लिए हम डिटरमिनेंट हल करेंगे

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3-(-7))\hat{\mathbf{k}}$$

या $\boldsymbol{\tau} = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ ◀

उदाहरण 6.6: दर्शाइये, कि अचर-वेग से चलते एकल कण का किसी बिन्दु के परित: कोणीय संवेग उसकी समस्त गति के दौरान अचर रहता है।

हल : माना कि कोई कण P किसी कण t पर, $\boldsymbol{v}$ वेग से चल रहा है। हम, इस कण का कोणीय संवेग, स्वेच्छ बिन्दु O के परित: ज्ञात करना चाहते हैं।



चित्र 6.19

कोणीय संवेग $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ है। इसका परिमाण $mvr\sin\theta$ है, जहाँ θ , $\mathbf{r}$ और $\mathbf{v}$ के बीच का कोण है (देखिए चित्र 6.19)। यद्यपि कण समय के साथ अपनी स्थिति बदल रहा है, फिर भी, $\mathbf{v}$ की दिशा रेखा वही बनी रहती है और इसलिए OM = $r \sin \theta$ अचर है।

© NCERT not to be republished

l की दिशा, **r** एवं **v** के तल के अभिलम्बवत्, पृष्ठ के अंदर की ओर जाती हुई है। यह दिशा भी नहीं बदलती।

अत:, **l** का परिमाण एवं दिशा वही रहती है और इसलिए यह संरक्षित है। क्या कण पर कोई बाह्य बल आरोपित है? ◀

6.8 दृढ़ पिण्डों का संतुलन

अब हम व्यापक कण-निकायों के बजाय दृढ़ पिण्डों की गति पर अपना ध्यान केंद्रित करेंगे।

आइये, स्मरण करें कि दृढ़ पिण्डों पर बाह्य बलों के क्या प्रभाव होते हैं? (आगे से हम विशेषण 'बाह्य' का प्रयोग नहीं करेंगे। जब तक अन्यथा न कहा जाय, हम केवल बाह्य बलों और बल आघूर्णों से ही व्यवहार करेंगे)। बल, किसी दृढ़ पिण्ड की स्थानांतरीय गत्यावस्था में परिवर्तन लाते हैं, अर्थात् वे समीकरण (6.17) के अनुसार, इसके कुल रेखीय संवेग को परिवर्तित करते हैं। लेकिन, बलों का यह एकमात्र प्रभाव नहीं है। यदि पिण्ड पर लगने वाला कुल बल आघूर्ण शून्य न हो तो इसके कारण, दृढ़ पिण्ड की घूर्णी गति में परिवर्तन होगा अर्थात् पिण्ड का कुल कोणीय संवेग समीकरण (6.28b) के अनुसार बदलेगा।

किसी दृढ़ पिण्ड को यांत्रिक संतुलन की अवस्था में तब कहा जाएगा जब इसके रेखीय संवेग और कोणीय संवेग दोनों का ही मान समय के साथ न बदलता हो यानि उस पिण्ड में न रेखीय त्वरण हो न कोणीय त्वरण। इसका अर्थ होगा कि

(1) पिण्ड पर लगने वाला कुल बल यानि बलों का सदिश योग शून्य हो :

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad (6.30a)$$

यदि पिण्ड पर लगने वाला कुल बल शून्य होगा तो उस पिण्ड के रेखीय संवेग में समय के साथ कोई परिवर्तन नहीं होगा। समीकरण (6.30a) पिण्ड के स्थानांतरीय संतुलन की शर्त है।

(2) कुल बल आघूर्ण, यानि दृढ़-पिण्ड पर लगने वाले बल-आघूर्णों का सदिश योग शून्य होगा :

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \ldots + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \qquad (6.30b)$$

यदि दृढ़ पिण्ड पर आरोपित कुल बल आघूर्ण शून्य हो तो इसका कुल कोणीय संवेग समय के साथ नहीं बदलेगा। समीकरण (6.30b) पिण्ड के घूर्णी संतुलन की शर्त है।

अब यह प्रश्न उठ सकता है, कि यदि वह मूल बिन्दु जिसके परित: आघूर्णों की गणना की गई है बदल जाए, तो क्या घूर्णी संतुलन की शर्त बदलेगी? यह दिखाया जा सकता है कि यदि किसी दृढ़ पिण्ड के लिए स्थानांतरीय संतुलन की शर्त समीकरण (6.30b) लागू होती है तो इस पर मूल बिन्दु के स्थानांतरण का कोई प्रभाव नहीं होगा अर्थात् घूर्णी संतुलन की शर्त उस मूल बिन्दु की स्थिति के ऊपर निर्भर नहीं करती जिसके परित: आघूर्ण लिए गए हैं। उदाहरण 6.7, में बलयुग्म (यानि स्थानांतरीय संतुलन में, किसी पिण्ड के ऊपर लगने वाले बलों का एक जोड़ा) के विशिष्ट मामले में इस तथ्य की पुष्टि की जाएगी। n बलों के लिए इस परिणाम का व्यापक व्यंजक प्राप्त करना आपके अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है।

समीकरण (6.30a) एवं समीकरण (6.30b) दोनों ही सदिश समीकरणें हैं। इनमें से प्रत्येक तीन अदिश समीकरणों के समतुल्य हैं। समीकरण (6.30a) के संगत ये समीकरणें हैं

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,,\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \text{ एवं } \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (6.31a)$$

जहाँ F_{ix}, F_{iy} एवं F_{iz} बल $\mathbf{F}_i$ के क्रमश: x, y एवं z दिशा में वियोजित अवयव हैं। इसी प्रकार, समीकरण (6.30b) जिन तीन अदिश समीकरणों के समतुल्य हैं, वे हैं

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0, \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \text{ एवं } \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (6.31b)$$

जहाँ τ_{ix}, τ_{iy} एवं τ_{iz} क्रमश: x, y एवं z दिशा में बल आघूर्ण τ_i के अवयव हैं।

समीकरण (6.31a) एवं (6.31b), हमें किसी दृढ़ पिण्ड के यांत्रिक संतुलन के लिए आवश्यक छ: ऐसी शर्तें बताते हैं जो एक दूसरे के ऊपर निर्भर नहीं करतीं। बहुत सी समस्याओं में किसी पिण्ड पर लगने वाले सभी बल एक ही तल में होते हैं। इस स्थिति में यांत्रिक संतुलन के लिए केवल तीन शर्तों को पूरी किए जाने की आवश्यकता होगी। इनमें से दो शर्तें स्थानांतरीय संतुलन के संगत होंगी, जिनके अनुसार, सभी बलों के, इस तल में स्वेच्छ चुनी गई दो परस्पर लम्बवत् अक्षों के अनुदिश, अवयवों का सदिश योग अलग-अलग शून्य होगा। तीसरी शर्त घूर्णी-संतुलन के संगत है। बलों के तल के अभिलम्बवत् अक्ष के अनुदिश बल आघूर्ण के अवयवों का योग शून्य होना चाहिए।

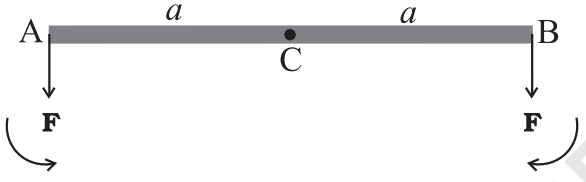
एक दृढ़ पिण्ड के संतुलन की शर्तों की तुलना, एकल कण के संतुलन की शर्तों से की जा सकती है। इस विषय में हमने पहले के अध्यायों में बात की है। कण पर घूर्णी गति का कोई विचार आवश्यक नहीं होता। इसके संतुलन के लिए केवल स्थानांतरीय संतुलन की शर्तें

© NCERT not to be republished

(समीकरण 6.30 a) ही पर्याप्त हैं। अत: किसी कण के संतुलन के लिए इस पर आरोपित सभी बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए। क्योंकि ये सब बल एक ही कण पर कार्य करते हैं इसलिए संगामी भी होते हैं। संगामी बलों के तहत संतुलन का विवेचन पहले के अध्यायों में किया जा चुका है।

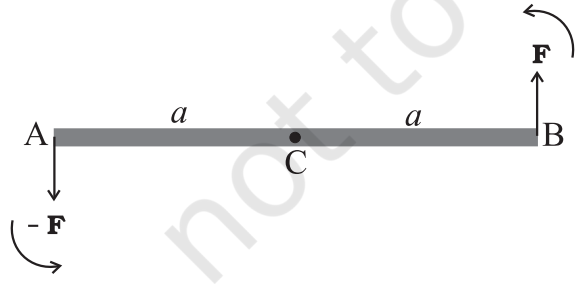
ज्ञातव्य है कि एक पिण्ड आंशिक संतुलन में हो सकता है यानि यह हो सकता है कि यह स्थानांतरीय संतुलन में हो परन्तु घूर्णी संतुलन में न हो या फिर घूर्णी संतुलन में तो हो पर स्थानांतरीय संतुलन में ना हो।

एक हलकी (यानि नगण्य द्रव्यमान वाली) स्वतंत्र छड़ (AB) पर विचार कीजिए, जिसके दो सिरों (A एवं B) पर, बराबर परिमाण वाले दो समांतर बल, (जो समान दिशा में लगे हों) **F**, चित्र 6.20(a) में दर्शाये अनुसार, छड़ के लम्बवत् लगे हों।



चित्र 6.20(a)

माना कि छड़ AB का मध्य बिन्दु C है और CA = CB = a है। A एवं B पर लगे बलों के C के परित: आघूर्ण, परिमाण में समान (aF) हैं, पर जैसा चित्र में दिखाया गया है, विपरीत दिशाओं में प्रभावकारी हैं। छड़ पर कुल बल आघूर्ण शून्य होगा। निकाय घूर्णी संतुलन में है, पर यह स्थानांतरीय संतुलन में नहीं है, क्योंकि $\sum \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$।



चित्र 6.20(b)

चित्र 6.20(b) में, चित्र (6.20a) में B सिरे पर लगाए गए बल की दिशा उलट दी गई है। अब उसी छड़ पर किसी क्षण पर बराबर परिमाण के दो बल, विपरीत दिशाओं में, छड़ के लम्बवत् लगे हैं एक A सिरे पर और दूसरा B सिरे पर। यहाँ दोनों बलों के आघूर्ण बराबर तो हैं पर वे विपरीत दिशा में नहीं हैं; वे एक ही दिशा में हैं और छड़ में वामावर्त घूर्णन की प्रवृत्ति लाते हैं। छड़ पर लगने वाला कुल बल शून्य है। अत: छड़ स्थानांतरीय संतुलन में है, लेकिन यह घूर्णी संतुलन में नहीं है। यद्यपि यह छड़ किसी भी तरह से स्थिर नहीं की गई है, इसमें शुद्ध घूर्णी संभव होती है (यानि स्थानांतरण रहित घूर्णन गति)।

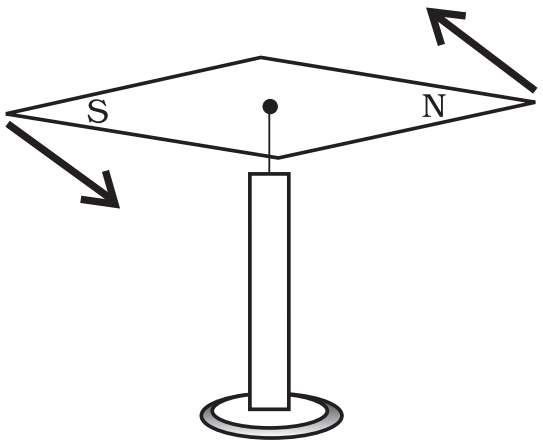
दो बराबर परिमाण के, विपरीत दिशाओं में लगे बलों का जोड़ा जिनकी क्रिया रेखाएँ एक न हों *बलयुग्म* अथवा ऐंठन (टॉर्क) कहलाता है। बलयुग्म बिना स्थानांतरण के घूर्णन पैदा करता है।

जब हम घुमाकर किसी बोतल का ढक्कन खोलते हैं तो हमारी उंगलियाँ ढक्कन पर एक बलयुग्म आरोपित करती हैं। [चित्र 6.21(a)]। इसका दूसरा उदाहरण पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र में रखी चुम्बकीय सुई है [चित्र 6.21(b)]। पृथ्वी का चुम्बकीय क्षेत्र, चुम्बकीय सुई के उत्तरी और दक्षिणी ध्रुवों पर बराबर बल लगाता है। उत्तरी ध्रुव पर लगा बल उत्तर दिशा की ओर एवं दक्षिणी ध्रुव पर लगा बल दक्षिणी दिशा की ओर होता है। उस अवस्था के अतिरिक्त जब सुई उत्तर-दक्षिण दिशा में संकेत करती हो, दोनों बलों की क्रिया रेखा एक नहीं होती। अत: उस पर, पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र के कारण, एक बलयुग्म प्रभावी होता है।



चित्र 6.21(a) *ढक्कन को घुमाने के लिए हमारी उंगलियाँ उस पर एक बलयुग्म लगाती हैं*

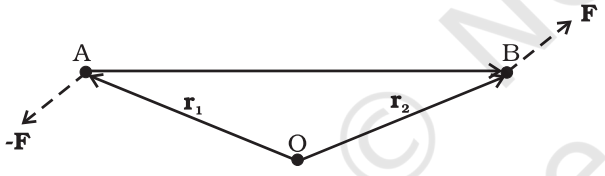
© NCERT not to be republished



चित्र 6.21(b) *पृथ्वी का चुम्बकीय क्षेत्र, सुई के ध्रुवों पर, बराबर परिमाण वाले दो बल विपरीत दिशाओं में लगाता है। ये दो बल एक बलयुग्म बनाते हैं।*

उदाहरण 6.7: दर्शाइये कि किसी बलयुग्म का आघूर्ण उस बिन्दु के ऊपर निर्भर नहीं करता जिसके परित: आप आघूर्ण ज्ञात करते हैं।

हल



चित्र 6.22

एक दृढ़ पिण्ड लीजिए जिस पर चित्र 6.22 में दिखाये अनुसार बलयुग्म लगा है। बल **F** एवं -**F** क्रमश: बिन्दु B और A पर लगे हैं। मूल बिन्दु O के सापेक्ष इन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमश: $\mathbf{r}_2$ एवं $\mathbf{r}_1$ हैं। आइये, मूल बिन्दु के परित: बलों के आघूर्ण ज्ञात करें।

बलयुग्म का आघूर्ण = युग्म बनाने वाले बलों के आघूर्णों का योग

$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$

$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$

$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$

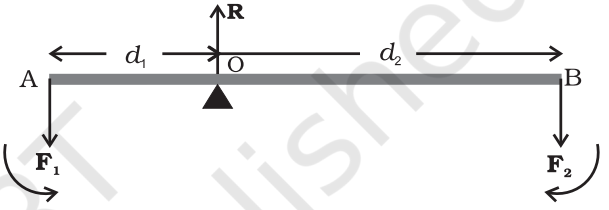
लेकिन $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$, $\therefore$ $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

बलयुग्म का आघूर्ण $= \mathbf{AB} \times \mathbf{F}$

स्पष्टत:, यह मान मूल बिन्दु यानि वह बिन्दु जिसके परित: हमने बलों के आघूर्ण लिए हैं उसकी स्थिति पर निर्भर नहीं करता। ◀

6.8.1 आघूर्णों का सिद्धांत

एक आदर्श *उत्तोलक*, अनिवार्य रूप से, एक ऐसी हलकी (यानि नगण्य द्रव्यमान वाली) छड़ है जो अपनी लम्बाई के अनुदिश लिए गए किसी बिन्दु के परित: घूम सकती हो। यह बिन्दु *आलम्ब* कहलाता है। बच्चों के खेल के मैदान में लगा सी-सा, उत्तोलक का एक प्रतिनिधिक उदाहरण है। दो बल F_1 एवं F_2, जो एक दूसरे के समांतर हैं उत्तोलक के सिरों पर, इसके लम्बवत् तथा आलम्ब से क्रमश: d_1 एवं d_2 दूरियों पर लगाये गए हैं जैसा चित्र 6.23 में दर्शाया गया है।



चित्र 6.23

यह उत्तोलक यांत्रिक रूप से एक संतुलित निकाय है। माना कि आलम्ब पर बलों का प्रतिक्रिया बल R है। यह बलों F_1 एवं F_2 की विपरीत दिशा में प्रभावी है। स्थानांतरीय संतुलन के लिए,

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

और घूर्णी संतुलन में, आलम्ब के परित: आघूर्ण लेने पर, इन आघूर्णों का योग शून्य होगा। अत:

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

सामान्यत: वामावर्त आघूर्णों को धनात्मक एवं दक्षिणावर्त आघूर्णों को ऋणात्मक लिया जाता है। ध्यान दें कि R आलम्ब, पर ही कार्यरत है और इसका आघूर्ण शून्य है।

उत्तोलक के मामले में, F_1 प्राय: कोई लोड होता है जिसे उठाना होता है इसे *भार* कहते हैं। आलम्ब से इसकी दूरी d_1 *भार की भुजा* कहलाती है। बल F_2, लोड को उठाने के लिए लगाया गया बल, *प्रयास* है। आलम्ब से इसकी दूरी *प्रयास भुजा* कहलाती है।

समीकरण (ii) को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad \text{(6.32a)}$$

या, भार × भार की भुजा = प्रयास × प्रयास की भुजा

© NCERT not to be republished

उपरोक्त समीकरण, किसी उत्तोलक के लिए आघूर्णों का नियम व्यक्त करती है। अनुपात F_1/F_2 यांत्रिक लाभ (M.A) कहलाता है।

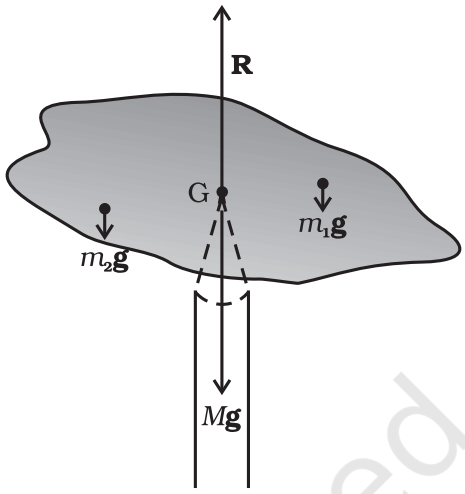
अत: $$\text{M.A.} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (6.32b)$$

यदि प्रयास भुजा d_2 की लम्बाई, भार-भुजा d_1 से अधिक हो, तो यांत्रिक लाभ एक से अधिक होता है। यांत्रिक लाभ एक से अधिक होने का अर्थ होता है कि कम प्रयास से अधिक भार उठाया जा सकता है। सी-सा के अतिरिक्त भी आपके इर्द-गिर्द उत्तोलकों के बहुत से उदाहरण आपको मिल जायेंगे। तुलादण्ड भी एक उत्तोलक ही है। कुछ अन्य उत्तोलकों के उदाहरण अपने परिवेश से ढूँढ़िए। प्रत्येक के लिए उनके आलम्ब, भार, भार-भुजा, प्रयास और प्रयास-भुजा की पहचान कीजिए।

आप यह सरलता से दर्शा सकते हैं कि यदि समांतर बल F_1 और F_2 उत्तोलक के लम्बवत् न हों बल्कि कोई कोण बनाते हुए लगे हों तब भी आघूर्णों का नियम लागू होता है।

6.8.2 गुरुत्व केन्द्र

आपमें से कई लोगों ने अपनी नोट बुक को अपनी उंगली की नोक पर संतुलित किया होगा। चित्र 6.24 उसी तरह का एक क्रियाकलाप है जो आप आसानी से कर सकते हैं। एक अनियमित आकार का M द्रव्यमान वाला गत्ते का टुकड़ा और पेंसिल जैसी कोई बारीक नोक वाली वस्तु लो। कुछ बार प्रयास करके आप गत्ते के टुकड़े में एक ऐसा बिन्दु G ढूँढ़ सकते हैं जिसके नीचे पेंसिल की नोक रखने पर गत्ते का टुकड़ा उस नोक पर संतुलित हो जाएगा। (इस स्थिति में गत्ते का टुकड़ा पूर्णत: क्षैतिज अवस्था में रहना चाहिए)। यह संतुलन बिन्दु गत्ते के टुकड़े का गुरुत्व केन्द्र (CG) है। पेंसिल की नोक ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर लगने वाला एक बल प्रदान करती है जिसके कारण गत्ते का टुकड़ा यांत्रिक संतुलन में आ जाता है। जैसा चित्र 6.24 में दर्शाया गया है, पेंसिल की नोक का प्रतिक्रिया बल R गत्ते के टुकड़े के कुल भार $M\mathbf{g}$ के बराबर और विपरीत है और इसलिए यह स्थानांतरीय संतुलनावस्था में है। साथ ही यह घूर्णी संतुलन में भी है। क्योंकि, अगर ऐसा न होता तो असंतुलित बल आघूर्ण के कारण यह एक ओर झुक जाता और गिर जाता। गुरुत्व बल के कारण गत्ते के टुकड़े पर बहुत से बल आघूर्ण प्रभावी हैं क्योंकि एकाकी कणों के भार $m_1\mathbf{g}, m_2\mathbf{g}$.... आदि G से विभिन्न दूरियों पर कार्य कर रहे हैं।



चित्र 6.24 *गत्ते के टुकड़े को पेंसिल की नोक पर संतुलित करना। पेंसिल की नोक गत्ते के टुकड़े का गुरुत्व केन्द्र निर्धारित करती है।*

गत्ते के टुकड़े का गुरुत्व केन्द्र इस प्रकार निर्धारित किया गया है कि $m_1\mathbf{g}, m_2\mathbf{g}$.... आदि बलों का इसके परित: लिया गया आघूर्ण शून्य है।

यदि $\mathbf{r}_i$ गुरुत्व केन्द्र के सापेक्ष किसी पिण्ड के i-वें कण का स्थिति सदिश हो, तो इस पर लगने वाले गुरुत्व बल का गुरुत्व केन्द्र के परित: बल आघूर्ण $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \; m_i\mathbf{g}$। गुरुत्व केन्द्र के परित: कुल गुरुत्वीय बल आघूर्ण शून्य होने के कारण

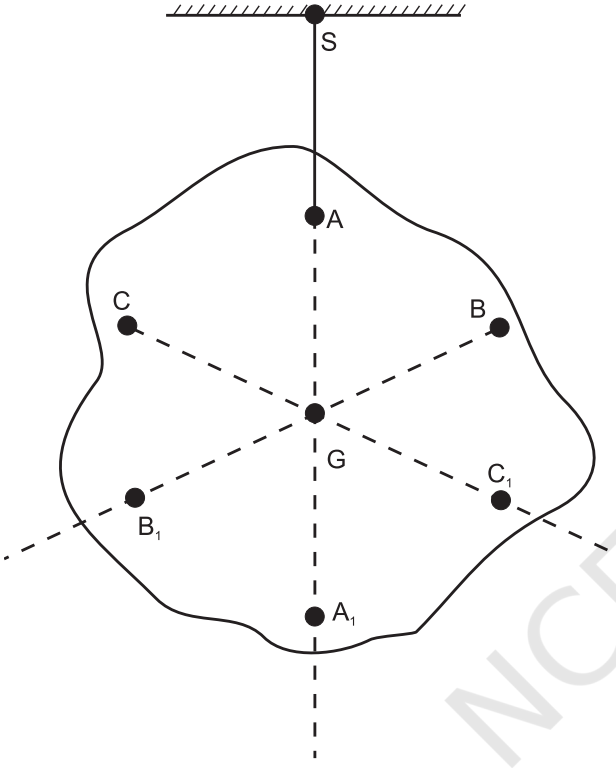
$$\boldsymbol{\tau}_g = \sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad (6.33)$$

इसलिए, किसी पिण्ड के गुरुत्व-केन्द्र को हम एक ऐसे बिन्दु के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जिसके परित: पिण्ड का कुल गुरुत्वीय बल आघूर्ण शून्य हो।

हम देखते हैं कि समीरकण (6.33) में $\mathbf{g}$ सभी कणों के लिए समान है अत: यह योग-चिन्ह $\sum$ से बाहर आ सकता है। अत:, $\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$। याद रखिए कि स्थिति सदिश ($\mathbf{r}_i$) गुरुत्व केन्द्र के सापेक्ष नापे गए हैं। अब अनुभाग 6.2 की समीकरण (6.4a) के अनुसार यदि $\sum m_i\mathbf{r}_i = 0$, तो मूल बिन्दु पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र होना चाहिए। अत: पिण्ड का गुरुत्व केन्द्र एवं द्रव्यमान केन्द्र एक ही है। हमारे ध्यान में यह बात आनी चाहिए कि ऐसा इसलिए है, क्योंकि, वस्तु का आकार इतना छोटा है कि इसके सभी बिन्दुओं के लिए $\mathbf{g}$ का मान समान है। यदि पिण्ड इतना बड़ा हो जाए कि इसके एक भाग की तुलना में दूसरे भाग के लिए $\mathbf{g}$ का मान बदल जाए तब गुरुत्व केन्द्र एवं द्रव्यमान

© NCERT not to be republished

केन्द सम्पाती नहीं होंगे। मूल रूप में, ये दो अलग-अलग अवधारणाएँ हैं। द्रव्यमान केन्द्र का गुरुत्व से कुछ लेना देना नहीं है। यह केवल पिण्ड में द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है।



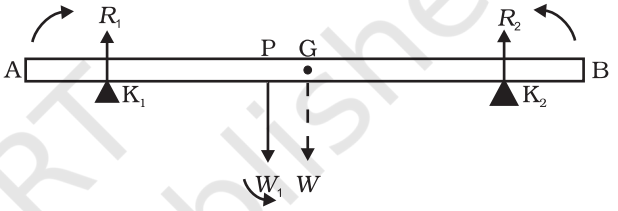
चित्र 6.25 *अनियमित आकार के फलक का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात करना। फलक का गुरुत्व केन्द्र G इसको A कोने से लटकाने पर इससे होकर गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा पर पड़ता है।*

अनुभाग 6.2 में हमने कई नियमित, समांग, पिण्डों के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात की थी। स्पष्टत:, यदि पिण्ड विशालकाय नहीं है, तो उसी विधि से हम उनके गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कर सकते हैं।

चित्र 6.25, गत्ते के टुकड़े जैसे किसी अनियमित आकार के फलक का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात करने की एक अन्य विधि दर्शाता है। यदि आप इस फलक को किसी बिन्दु जैसे A से लटकायें तो A से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा गुरुत्व केन्द्र से गुजरेगी। हम इस ऊर्ध्वाधर रेखा AA_1, को अंकित कर लेते हैं। अब हम फलक को किसी दूसरे बिन्दु जैसे B या C से लटकाते हैं। इन दो ऊर्ध्वाधर रेखाओं का कटान बिन्दु गुरुत्व केन्द्र है। समझाइये कि यह विधि क्यों प्रभावी होती है? चूंकि यहाँ पिण्ड छोटा सा ही है अत: इस विधि से इसका द्रव्यमान केन्द्र भी ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 6.8: 70 सेंटीमीटर लंबी और 4.00 kg द्रव्यमान की धातु की छड़ के दोनों सिरों से 10 सेंटीमीटर दूर रखे दो क्षुर-धारों पर टिकी है। इसके एक सिरे से 40 सेंटीमीटर की दूरी पर 6.00 kg द्रव्यमान का एक भार लटकाया गया है। क्षुर-धारों पर लगने वाले प्रतिक्रिया बलों की गणना कीजिए। (छड़ को समांग और समान अनुप्रस्थ काट वाली मान सकते हैं।)

हल :



चित्र 6.26

चित्र 6.26 में छड़ को AB से दर्शाया गया है। K_1 एवं K_2 क्षुर-धारों की स्थिति दर्शाते हैं। G एवं P क्रमश: गुरुत्व केन्द्र एवं लटकाये गए बल की स्थितियाँ हैं।

ध्यान दें कि छड़ का भार W इसके गुरुत्व केन्द्र G पर कार्य करता है। छड़ समान अनुप्रस्थ काट वाली और समांग द्रव्य से बनी है इसलिए G इसका केन्द्र है। AB = 70 cm. AG = 35 cm, AP = 30 cm, PG = 5 cm, AK_1 = BK_2 = 10 cm और K_1G = K_2G = 25 cm एवं W = छड़ का भार = 4.00 kg तथा W_1 = लटकाया गया भार = 6.00 kg; R_1 एवं R_2 क्षुर-धारों के आधारों के अभिलम्बवत् प्रतिक्रिया बल हैं।

छड़ के स्थानांतरीय संतुलन के लिए

$$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

ध्यान दें कि W_1 एवं W ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर तथा R_1 एवं R_2 ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर लगते हैं।

घूर्णी संतुलन की दृष्टि से हम बलों के आघूर्ण ज्ञात करते हैं। एक ऐसा बिन्दु जिसके परित: आघूर्ण ज्ञात करने से सुविधा रहेगी G है। R_2 और W_1 के आघूर्ण वामावर्त (धनात्मक) हैं, जबकि R_1 का आघूर्ण दक्षिणावर्त (ऋणात्मक) है।

अत: घूर्णी संतुलन के लिए

© NCERT not to be republished

$-R_1 (K_1G) + W_1 (PG) + R_2 (K_2G) = 0$ (ii)

यह दिया गया है कि $W = 4.00g$ N, $W_1 = 6.00g$ N, जहाँ g = गुरुत्व के कारण त्वरण $g = 9.8$ m/s^2.

समीकरण (i) में आंकिक मान प्रतिस्थापित करने पर,

$R_1 + R_2 - 4.00g - 6.00g = 0$

या $R_1 + R_2 = 10.00g$ N (iii)

$= 98.00$ N

समीकरण (ii) से $-0.25\, R_1 + 0.05\, W_1 + 0.25\, R_2 = 0$

या $R_1 - R_2 = 1.2g$ N $= 11.76$ N (iv)

समीकरण (iii) and (iv) से $R_1 = 54.88$ N,

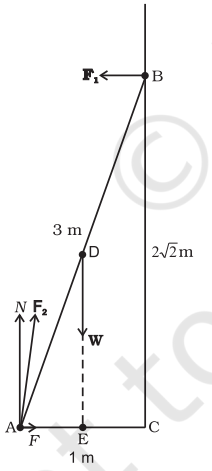
$R_2 = 43.12$ N

अत: क्षुर-धारों के आधारों के प्रतिक्रिया बल हैं-

K_1 पर 55 N तथा K_2 पर 43 N ◀

उदाहरण 6.9: 20 kg द्रव्यमान की एक 3 m लंबी सीढ़ी एक घर्षणविहीन दीवार के साथ झुका कर टिकाई गई है। जैसा चित्र 6.27 में दर्शाया गया है, इसका निचला सिरा फर्श पर दीवार से 1 m की दूरी पर है। दीवार और फर्श के प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिए।

हल



चित्र 6.27

सीढ़ी AB की लंबाई = 3 m, इसके पैरों की दीवार से दूरी AC = 1 m, पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार BC = $2\sqrt{2}$ m। सीढ़ी पर लगने वाले बल हैं - इसके गुरुत्व केन्द्र D पर प्रभावी इसका भार W। दीवार और फर्श के प्रतिक्रिया बल F_1 एवं F_2। बल F_1 दीवार पर अभिलम्बवत् है, क्योंकि, दीवार घर्षणविहीन है। बल F_2 को दो अवयवों में वियोजित किया जा सकता है -अभिलम्बवत् प्रतिक्रिया बल N एवं घर्षण बल F। ध्यान दें कि F सीढ़ी को दीवार से दूर फिसलने से रोकता है इसलिए इसकी दिशा दीवार की ओर है।

स्थानांतरीय संतुलन के लिए, ऊर्ध्वाधर बलों का योग शून्य करने पर

$N - W = 0$ (i)

इसी प्रकार क्षैतिज बल लें तो,

$F - F_1 = 0$ (ii)

घूर्णी संतुलन के कारण बिन्दु A के परित: आघूर्ण लेने पर

$2\sqrt{2}\, F_1 - (1/2)\, W = 0$ (iii)

अब, $W = 20\, g = 20 \quad 9.8$ N $= 196.0$ N

$(g = 9.8$ m/s$^2)$

समीकरण (i) से $N = 196.0\, N$

समीकरण (iii) से

$F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6$ N

समीकरण (ii) से $F = F_1 = 34.6$ N

अत: $F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0$ N

बल F_2, क्षैतिज से α कोण बनाता है

$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}$, $\alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80$ ◀

6.9 जड़त्व आघूर्ण

हम पहले ही यह उल्लेख कर चुके हैं कि घूर्णी गति का अध्ययन हम स्थानांतरण गति के समांतर ही चलायेंगे। इस विषय में आप पहले से ही सुपरिचित हैं। इस संबंध में एक मुख्य प्रश्न का उत्तर देना अभी शेष है कि *घूर्णी गति में द्रव्यमान के समतुल्य राशि क्या है?* इस प्रश्न का उत्तर हम प्रस्तुत अनुभाग में देंगे। विवेचना को सरल बनाए रखने के लिए हम केवल स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन पर ही विचार करेंगे। आइये, *घूर्णन करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा* के लिए व्यंजक प्राप्त करें। हम जानते हैं कि स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन करते पिण्ड का प्रत्येक कण, एक वृत्ताकार पथ पर चलता है (देखें चित्र 6.16)। और अक्ष से r_i दूरी पर स्थित कण का रेखीय वेग, जैसा समीकरण (6.19) दर्शाती है, $v_i = r_i\omega$ है। इस कण की गतिज ऊर्जा है

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

जहाँ m_i कण का द्रव्यमान है। पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा K इसके पृथक-पृथक कणों की गतिज ऊर्जाओं का योग है।

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2 \omega^2)$$

© NCERT not to be republished

यहाँ n पिण्ड के कुल कणों की संख्या है। ज्ञातव्य है कि ω सभी कणों के लिए समान है अत: ω^2 को योग-चिह्न के बाहर निकाल सकते हैं। तब,

$$K = \frac{1}{2}\omega^2(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2)$$

हम दृढ़ पिण्ड को अभिलक्षित करने वाला एक नया प्राचल परिभाषित करते हैं जिसका नाम जड़त्व आघूर्ण है और जिसका व्यक्तिकरण है

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (6.34)$$

इस परिभाषा के साथ

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (6.35)$$

ध्यान दें कि प्राचल I कोणीय वेग के परिमाण पर निर्भर नहीं करता। यह दृढ़ पिण्ड और उस अक्ष का अभिलक्षण है जिसके परित: पिण्ड घूर्णन करता है।

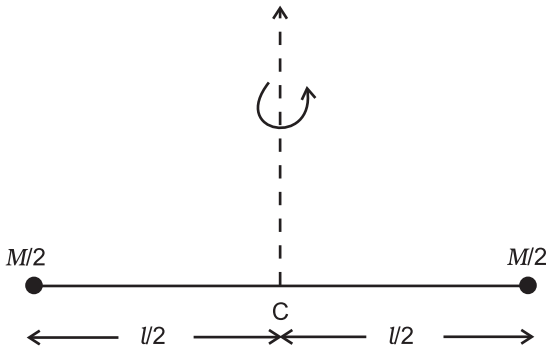
समीकरण (6.35) द्वारा व्यक्त घूर्णन करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा की रेखीय (स्थानांतरीय) गति करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ से तुलना कीजिए। यहाँ m पिण्ड का द्रव्यमान और v उसका वेग है। कोणीय वेग ω (किसी स्थिर अक्ष के घूर्णन के संदर्भ में) और रेखीय वेग v (रेखीय गति के संदर्भ में) की समतुल्यता हम पहले से ही जानते हैं। अत: यह स्पष्ट है कि जड़त्व आघूर्ण I, प्राचल द्रव्यमान का घूर्णी समतुल्य है। (स्थिर अक्ष के परित:) घूर्णन में जड़त्व आघूर्ण वही भूमिका अदा करता है जो रेखीय गति में द्रव्यमान।

अब हम समीकरण (6.34) में दी गई परिभाषा का उपयोग दो सरल स्थितियों में जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिए करेंगे।

a) त्रिज्या R और द्रव्यमान M के एक पतले वलय पर विचार कीजिए जो अपने तल में, अपने केन्द्र के परित: ω कोणीय वेग से घूर्णन कर रहा है। वलय का प्रत्येक द्रव्यमान घटक इसकी अक्ष से R दूरी पर है और $v = R\omega$ चाल से चलता है। इसलिए इसकी गतिज ऊर्जा है-

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

समीकरण (6.35) से तुलना करने पर हम पाते हैं कि वलय के लिए $I = MR^2$



चित्र 6.28 *द्रव्यमान के एक जोड़े से युक्त, l लंबाई की छड़, जो निकाय के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली इसकी लंबाई के लम्बवत् अक्ष के परित: घूम रही है। निकाय का कुल द्रव्यमान M है।*

b) अब, हम l लंबाई की दृढ़, नगण्य द्रव्यमान की छड़ के सिरों पर लगे दो द्रव्यमानों से बने एक निकाय पर विचार करेंगे। यह निकाय इसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती छड़ के लम्बवत् अक्ष के परित: घूम रहा है (चित्र 6.28)। प्रत्येक द्रव्यमान $M/2$ अक्ष से $l/2$ दूरी पर है। इसलिए, इन द्रव्यमानों का जड़त्व आघूर्ण होगा,

$(M/2)\,(l/2)^2 + (M/2)(l/2)^2$

अत:, द्रव्यमानों के इस जोड़े का, द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती छड़ के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

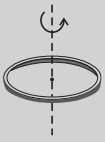
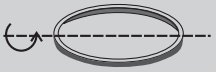
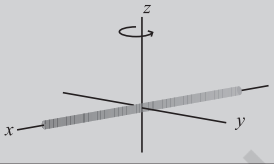
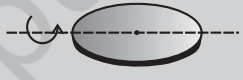
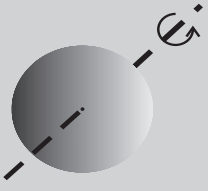
$I = Ml^2 / 4$

सारणी 6.1 में कुछ सुपरिचित नियमित आकार के पिंडों के विशिष्ट अक्षों के परित: जड़त्व आघूर्ण केवल दिए गए हैं। (इन सूत्रों के व्युत्पन्न इस पाठ्यपुस्तक के क्षेत्र से बाहर हैं। आगे आप इनके विषय में उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे।)

क्योंकि, किसी पिण्ड का द्रव्यमान, उसकी रेखीय गत्यावस्था में परिवर्तन का प्रतिरोध करता है, वह उसकी रेखीय गति के जड़त्व का माप है। उसी प्रकार, दी गई अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण, घूर्णी गति में परिवर्तन का प्रतिरोध करता है, अत: इसको पिण्ड के घूर्णी जड़त्व का माप माना जा सकता है। इस माप से यह बोध होता है कि किसी पिण्ड में पिण्ड के विभिन्न कण घूर्णन अक्ष के आपेक्ष किस प्रकार अवस्थित हैं। द्रव्यमान की तरह जड़त्व आघूर्ण एक नियत राशि नहीं होती, बल्कि, इसका मान पिण्ड के सापेक्ष इसकी अक्ष की स्थिति और दिग्विन्यास के ऊपर निर्भर करता है। किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करते दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान किस प्रकार वितरित है इसके एक माप के रूप में हम एक नया प्राचल परिभाषित करते हैं, जिसे *परिभ्रमण त्रिज्या* कहते हैं। यह पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण और कुल द्रव्यमान से संबंधित है।

© NCERT not to be republished

सारणी 6.1 विशिष्ट अक्षों के परितः कुछ नियमित आकार के पिण्डों के जड़त्त्व आघूर्ण

Z	पिण्ड	अक्ष	आरेख	I
1.	R त्रिज्या का पतला, वृत्ताकार वलय	वलय तल के लम्बवत् केन्द्र से गुजरती		MR^2
2.	R त्रिज्या का पतला, वृत्ताकार वलय	व्यास		$MR^2/2$
3.	L लंबाई की पतली छड़	मध्य बिन्दु से गुजरती लंबाई के लम्बवत्		$ML^2/12$
4.	R त्रिज्या की वृत्ताकार चकती	केन्द्र से गुजरती तल के लम्बवत्		$MR^2/2$
5.	R त्रिज्या की वृत्ताकार चकती	व्यास		$MR^2/4$
6.	R त्रिज्या का खोखला बेलन	बेलन की अक्ष		MR^2
7.	R त्रिज्या का ठोस बेलन	बेलन की अक्ष		$MR^2/2$
8.	R त्रिज्या का ठोस गोला	व्यास		$2MR^2/5$

सारणी 6.1 से हम देख सकते हैं कि सभी पिण्डों के लिए, $I = Mk^2$, जहाँ k की विमा वही है जो लंबाई की। मध्य बिन्दु से गुजरती छड़ के लम्बवत् अक्ष के लिए $k^2 = L^2/12$, अर्थात् $k = L/\sqrt{12}$ । इसी प्रकार वृत्ताकार चकती के उसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण के लिए $k = R/2$। k पिण्ड और घूर्णन अक्ष का एक ज्यामितीय गुण है। इसे *परिभ्रमण त्रिज्या* कहा जाता है। *किसी अक्ष के परितः किसी पिण्ड की परिभ्रमण त्रिज्या* अक्ष से एक ऐसे कण की दूरी है जिसका द्रव्यमान सम्पूर्ण पिण्ड के द्रव्यमान के बराबर है। फलतः जिसका जड़त्व आघूर्ण, दी गई अक्ष के परितः पिण्ड के वास्तविक जड़त्व आघूर्ण के बराबर है।

© NCERT not to be republished

अत:, किसी दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण, उसके द्रव्यमान, उसके आकार एवं आकृति, घूर्णन-अक्ष के परित: इसके द्रव्यमान के वितरण और इस अक्ष की स्थिति एवं दिग्विन्यास पर निर्भर करता है। समीकरण (6.34), में दी गई परिभाषा के आधार पर हम तुरन्त इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि जड़त्व आघूर्ण का विमीय सूत्र ML^2 एवं इसके SI मात्रक $kg\ m^2$ हैं।

किसी पिण्ड के घूर्णन के जड़त्व के माप के रूप में इस अत्यंत महत्वपूर्ण राशि I के बहुत से व्यावहारिक उपयोग हैं। वाष्प इंजन और ऑटोमोबाइल इंजन जैसी मशीनें जो घूर्णी गति पैदा करती हैं, इनमें बहुत अधिक जड़त्व आघूर्ण वाली एक चकती लगी रहती है जिसे *गतिपालक चक्र* कहते हैं। अपने विशाल जड़त्व आघूर्ण के कारण यह चक्र वाहन की गति में अचानक परिवर्तन नहीं होने देता। इससे गति धीरे-धीरे परिवर्तित होती है, गाड़ी झटके खा-खाकर नहीं चलती और वाहन पर सवार यात्रियों के लिए सवारी आरामदेह हो जाती है।

6.10 अचल अक्ष के परित: शुद्ध घूर्णी गतिकी

हमने पहले भी स्थानांतरण गति और घूर्णी गति के बीच समतुल्यता के संकेत दिए हैं। उदारहण के लिए यह कि कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ का घूर्णी गति में वही भूमिका है जो रेखीय वेग $\mathbf{v}$ का स्थानांतरण गति में। हम इस समतुल्यता को आगे बढ़ाना चाहते हैं। ऐसा करते समय हम अपना विवेचन अचर (स्थिर) अक्ष के परित: घूर्णन तक ही सीमित रखेंगे। ऐसी गति के लिए केवल एक स्वातंत्र्य-कोटि की आवश्यकता होगी अर्थात् इसका वर्णन करने के लिए केवल एक स्वतंत्र चर कोणीय विस्थापन चाहिए। यह रेखीय गति में स्थानांतरण के संगत है। यह अनुभाग केवल शुद्ध गतिकी से संबंधित है। गति विज्ञान की ओर हम अगले अनुभाग में मुखातिब होंगे।

याद करें, कि किसी घूर्णन करते हुए पिण्ड का कोणीय विस्थापन बताने के लिए हमने इस पिण्ड पर कोई कण P ले लिया था (चित्र 6.29)। जिस तल में यह कण गति करता है उसमें इसका कोणीय विस्थापन θ ही सम्पूर्ण पिण्ड का कोणीय विस्थापन है; θ एक नियत दिशा से मापा जाता है, जिसको यहाँ हम x' - अक्ष ले लेते हैं जो बिन्दु P के गति के तल में स्थित x-अक्ष के समानांतर रेखा है। ध्यान दें कि z – अक्ष घूर्णन-अक्ष है और कण P की गति का तल x - y तल के समानांतर है। चित्र 6.29 में θ_0, भी दर्शाया गया है जो $t = 0$ पर कोणीय विस्थापन है।

हम यह भी याद करें कि कोणीय वेग, समय के साथ कोणीय विस्थापन में होने वाले परिवर्तन की दर है। यानि, $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$। ध्यान दें, कि चूंकि घूर्णन अक्ष अचल है, कोणीय वेग के साथ सदिश की तरह व्यवहार करने की आवश्यकता नहीं है। कोणीय त्वरण, $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ है।

शुद्ध घूर्णी गतिकी में प्रयुक्त होने वाली राशियाँ, कोणीय विस्थापन ($\boldsymbol{\theta}$), कोणीय वेग ($\boldsymbol{\omega}$) एवं कोणीय त्वरण ($\boldsymbol{\alpha}$) क्रमश: स्थानांतरीय शुद्ध गतिकी की राशियों रेखीय विस्थापन ($\mathbf{x}$), रेखीय वेग ($\mathbf{v}$) एवं रेखीय त्वरण ($\mathbf{a}$) के समतुल्य हैं। सम (यानि अचर) त्वरण के तहत स्थानांतरीय शुद्ध गतिकी के समीकरण हम जानते हैं। वे हैं :

$$v = v_0 + at \qquad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(b)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad \text{(c)}$$

जहाँ x_0 = प्रारंभिक विस्थापन एवं v_0= प्रारंभिक वेग है। शब्द 'प्रारंभिक' का अर्थ है $t = 0$ पर राशि का मान।

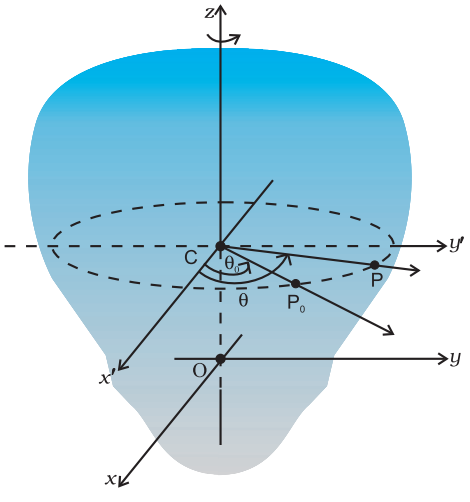
इनके संगत, अचर त्वरण से घूर्णी गति करती हुई वस्तु के लिए शुद्ध घूर्णी गतिकी के समीकरण होंगे :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (6.36)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (6.37)$$

$$\text{और } \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (6.38)$$

जहाँ θ_0= घूर्णन करते पिण्ड का प्रारंभिक कोणीय विस्थापन है एवं ω_0 = इस पिण्ड का प्रारंभिक कोणीय वेग है।



चित्र 6.29 किसी दृढ़ पिण्ड की कोणीय स्थिति बताना

© NCERT not to be republished

उदाहरण 6.10: मूल सिद्धांत के आधार पर समीकरण (6.38) व्युत्पन्न कीजिए।

हल : कोणीय त्वरण समान है, अत:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{अचर} \qquad \text{(i)}$$

इस समीकरण का समाकलन करने पर

$$\omega = \int \alpha\, dt + c$$

$$= \alpha t + c \quad (\because \alpha \text{ अचर है})$$

$t = 0$, $\omega = \omega_0$ (दिया है)

समीकरण (i) से, $t = 0$ पर

$\omega = c = \omega_0$

अत: $\omega = \alpha t + \omega_0$, जो वांछित समीकरण है।

परिभाषा $\omega = d\theta/dt$ का इस्तेमाल करके हम समीकरण (6.36) का समाकलन कर समीकरण (6.37) प्राप्त कर सकते हैं। यह व्युत्पत्ति एवं समीकरण (6.38) की व्युत्पत्ति हम आपके अभ्यास के लिए छोड़ते हैं। ◀

उदाहरण 6.11: ऑटोमोबाइल इंजन का कोणीय वेग 16 सेकेंड में 1200 rpm से बढ़कर 3120 rpm हो जाता है। (i) यह मानते हुए कि कोणीय त्वरण समान रहता है, इसका मान ज्ञात कीजिए। (ii) इस समय में इंजन कितने चक्कर लगाता है?

हल :

(i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$, जहाँ ω_0 = rad/s में व्यक्त इसका प्रारंभिक कोणीय वेग है

$\omega_0 = 2\pi \times$ rev/s में प्रारंभिक कोणीय वेग

$$= \frac{2\pi \times \text{rev s}^{-1} \text{ में कोणीय वेग}}{60 \text{ सेकेंड/मिनट}}$$

$$= \frac{2\pi \times 1200}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 40\pi \text{ rad/s}$$

इसी प्रकार, ω = rad/s में अंतिम कोणीय वेग

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 2\pi \quad 52 \text{ rad/s}$$

$$= 104\, \pi \text{ rad/s}$$

$\therefore$ कोणीय त्वरण, $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 4\pi$ rad/s^2

इंजन का कोणीय त्वरण 4π rad/s^2 है।

(ii) t समय में कोणीय विस्थापन,

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

चक्करों की संख्या $= \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$ ◀

6.11 अचल अक्ष के परित: घूर्णी गतिकी

सारणी 6.2 में रेखीय गति से संबंधी राशियों और उनके संगत घूर्णी गति की समतुल्य राशियों की सूची दी गई है। पिछले अनुभाग में हमने इन दोनों प्रकार की गतियों की शुद्ध गतिकी से तुलना की है। हमें यह भी पता है कि घूर्णी गति में जड़त्व आघूर्ण एवं बल आघूर्ण, रेखीय गति के क्रमश: द्रव्यमान एवं बलों का प्रतिनिधित्व करते हैं। यह सब जानने के बाद सारणी में दिए गए अन्य समतुल्यों के विषय में अनुमान लगा लेना अधिक कठिन नहीं है। उदाहरण के लिए, रेखीय गति में कार्य = F dx। अत: एक अचल अक्ष के परित: घूर्णी गति में कार्य $\tau d\theta$ होना चाहिए क्योंकि हम पहले से ही यह जानते हैं कि dx के संगत राशि है $d\theta$ एवं F के संगत राशि τ है। तथापि यह आवश्यक है कि राशियों की यह संगतता, गति विज्ञान के मजबूत आधार पर प्रतिष्ठापित की जाए। आगे हम यही करने जा रहे हैं।

इससे पहले कि हम अपनी बात शुरू करें, *एक अचल अक्ष के परित: घूर्णी गति में एक सरलीकरण की ओर ध्यान दिलाना आवश्यक है।* क्योंकि अक्ष स्थिर है, हमें अपने विवेचन में बल आघूर्णों एवं कोणीय संवेगों के इसके अनुदिश अवयवों पर ही विचार करने की आवश्यकता होगी। केवल यही घटक पिण्ड को घूर्णन कराते हैं। बल आघूर्ण का अक्ष से अभिलंबवत घटक अक्ष को उसकी स्थिति से घुमाने का प्रयास करता है। हालांकि हम मानकर चलेंगे कि बल आघूर्ण के इस घटक को संतुलित करने हेतु आवश्यक बल आघूर्ण उत्पन्न होंगे जो अक्ष की स्थिति बनाए रखने के लिए उत्तरदायी होंगे। अत: इन अभिलंबवत् बल आघूर्ण के घटकों पर विचार में करने की आवश्यकता नहीं है। पर्याय में हमें निम्न विचार में लाने की आवश्यकता है:

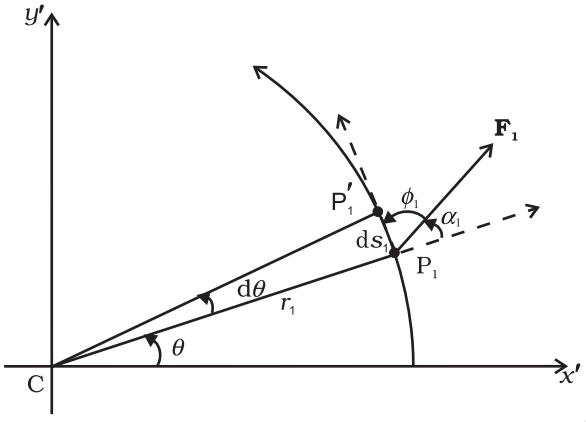
© NCERT not to be republished

(1) पिण्ड पर कार्य करने वाले वे बल जो घूर्णन अक्ष के लम्बवत् तल में हैं।

(2) पिण्ड के कणों की स्थिति-सदिशों के केवल वे अवयव जो घूर्णन अक्ष के लम्बवत् हैं।

या यूँ कहें कि बलों और स्थिति सदिशों के अक्ष के अनुदिश लिए गए अवयवों को हमें गणना में लाने की आवश्यकता नहीं है।

बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य



चित्र 6.30 एक अचल अक्ष के परित: घूमते पिण्ड के किसी कण पर लगे बल $\mathbf{F}_1$ *द्वारा किया गया कार्य। कण, अक्ष पर स्थित केन्द्र C वाले वृत्त पर चलता है। चाप* $P_1P'_1(ds_1)$ *कण का विस्थापन बताता है।*

चित्र 6.30 में एक अचल अक्ष के परित: घूर्णन करता एक दृढ़ पिण्ड दर्शाया गया है। घूर्णन अक्ष, z-अक्ष है, जो पृष्ठ के अभिलम्बवत् है। जैसा ऊपर बताया गया है हमें केवल उन्हीं बलों पर विचार करने की आवश्यकता है जो अक्ष के अभिलंबवत् तल में अवस्थित है। पिण्ड के किसी कण पर, जिसकी स्थिति P_1, से दर्शाई गई है, एक बल $\mathbf{F}_1$ लगता है जिसकी क्रिया रेखा, अक्ष के अभिलम्बवत् तल में है। सुविधा के लिए हम इसको x'–y' तल कहते हैं (यह हमारे पृष्ठ का तल ही है)। P_1 पर स्थित कण r_1 त्रिज्या के वृत्त पर चलता है जिसका केन्द्र अक्ष पर है; $CP_1 = r_1$।

Δt समय में, कण, P_1' पर पहुँच जाता है। इसलिए कण के विस्थापन $d\mathbf{s}_1$ का परिमाण $ds_1 = r_1 d\theta$ है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इसकी दिशा वृत्त के स्पर्श रेखा के अनुदिश हैं। कण पर बल द्वारा किया गया कार्य –

$$dW_1 = \mathbf{F}_1 . d\mathbf{s}_1 = F_1 ds_1 \cos\phi_1 = F_1 (r_1 d\theta)\sin\alpha_1$$

जहाँ ϕ_1, $\mathbf{F}_1$ और P_1 पर खींची गई स्पर्श रेखा के बीच बना कोण है, और α_1, $\mathbf{F}_1$ एवं त्रिज्या $\mathbf{OP}_1$ के मध्य कोण हैं। $\phi_1 + \alpha_1 = 90°$।

मूल बिन्दु के परित: $\mathbf{F}_1$ के कारण बल आघूर्ण $\mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1$ है। $\mathbf{OP}_1 = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}_1$ [चित्र 6.17(b) देखें] चूंकि $\mathbf{OC}$ अक्ष के अनुदिश है इसके कारण बल आघूर्ण पर विचार करने की आवश्यकता नहीं है। $\mathbf{F}_1$ के कारण प्रभाव बल आघूर्ण है : $\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{CP}_1 \times \mathbf{F}_1$; यह घूर्णी अक्ष के अनुदिश है तथा इसका परिमाण $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\alpha$ है। अत:

$$dW_1 = \tau_1 d\theta$$

यदि पिण्ड पर एक से अधिक बल कार्य कर रहे हों, तो उन सबके द्वारा किए गए कार्यों को जोड़ने से पिण्ड पर किया गया कुल कार्य प्राप्त होगा। विभिन्न बलों के कारण लगे बल आघूर्णों के परिमाणों को τ_1, τ_2,... इत्यादि से दर्शाएँ तो

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + ...)d\theta$$

सारणी 6.2 स्थानांतरीय एवं घूर्णी गति की तुलना

	रेखीय गति	अचल अक्ष के परित: घूर्णी गति
1	विस्थापन x	कोणीय विस्थापन θ
2	वेग $v = dx/dt$	कोणीय वेग $\omega = d\theta/dt$
3	त्वरण $a = dv/dt$	कोणीय त्वरण, $\alpha = d\omega/dt$
4	द्रव्यमान M	जड़त्व आघूर्ण I
5	बल $F = Ma$	बल आघूर्ण $\tau = I\alpha$
6	कार्य $dW = F\,ds$	कार्य $W = \tau\,d\theta$
7	गतिज ऊर्जा $K = Mv^2/2$	गतिज ऊर्जा $K = I\omega^2/2$
8	शक्ति $P = F\,v$	शक्ति $P = \tau\omega$
9	रेखीय संवेग $p = Mv$	कोणीय संवेग $L = I\,\omega$

© NCERT not to be republished

याद रहे, कि बल आघूर्णों को जन्म देने वाले बल तो अलग-अलग कणों पर लग रहे हैं, मगर कोणीय विस्थापन $d\theta$ सभी कणों के लिए समान है। अब जैसा कि इस अनुभाग के प्रारंभ में कहा गया था, हमारे लिए सभी बल आघूर्ण z-अक्ष के अनुदिश प्रभावी हैं। अतः कुल बल आघूर्ण का परिमाण τ, प्रत्येक बल आघूर्णों के परिमाणों τ_1, τ_2 ..... के बीजगणितीय योग के बराबर है। अर्थात् $\tau = \tau_1 + \tau_2 + ...$, अतः हम कह सकते हैं

$$dW = \tau d\theta \qquad (6.39)$$

यह समीकरण एक अचल अक्ष के परितः घूमते पिण्ड पर लगे कुल बाह्य बल आघूर्ण τ के द्वारा किया गया कार्य बताता है। रेखीय गति के संगत समीकरण

$$dW = F\,ds$$

से इसकी तुल्यता स्पष्ट ही है। समीकरण (6.39) के दोनों पक्षों को dt से विभाजित करने पर

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

या $$P = \tau\omega \qquad (6.40)$$

यह तात्क्षणिक शक्ति के लिए समीकरण है। अचल अक्ष के परितः घूर्णी गति में शक्ति के इस समीकरण की तुलना रेखीय गति में शक्ति की समीकरण $P = Fv$ से कर सकते हैं।

एक पूर्णतः दृढ़ पिण्ड में विभिन्न कणों की कोई आंतरिक गति नहीं होती। अतः, बाह्य बल आघूर्णों द्वारा किया गया कार्य विसरित नहीं होता। परिणामस्वरूप पिण्ड की गतिज ऊर्जा बढ़ती चली जाती है। पिण्ड पर किए गए कार्य की दर, समीकरण (6.40) द्वारा प्राप्त होती है। इसी दर से पिण्ड की गतिज ऊर्जा बढ़ती है। गतिज ऊर्जा की वृद्धि की दर

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

हम मानते हैं कि समय के साथ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण नहीं बदलता। यानि कि पिण्ड का द्रव्यमान स्थिर रहता है तथा पिण्ड दृढ़ बना रहता है और इसके सापेक्ष घूर्णन अक्ष की स्थिति नहीं बदलती।

तब, चूंकि $\alpha = d\omega/dt$, अतः

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega\alpha$$

कार्य करने की दर को गतिज ऊर्जा में वृद्धि की दर के बराबर रखने पर

$$\tau\omega = I\omega\alpha$$

$$\tau = I\alpha \qquad (6.41)$$

समीकरण (6.41) सरल रेखीय गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम $F = ma$ से मिलती जुलती है।

ठीक वैसे ही जैसे बल पिण्ड में रेखीय त्वरण उत्पन्न करता है, बल आघूर्ण इसमें कोणीय त्वरण पैदा करता है। कोणीय त्वरण, आरोपित बल आघूर्ण के समानुपाती और पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण के व्युत्क्रमानुपाती होता है। इस संदर्भ में समीकरण (6.41) को, एक अचल अक्ष के परितः घूर्णन के लिए लागू होने वाला न्यूटन का द्वितीय नियम, कह सकते हैं।

उदाहरण 6.12: नगण्य द्रव्यमान वाली एक रस्सी, 20 kg द्रव्यमान एवं 20 cm त्रिज्या के गतिपालक पहिये के रिम पर लपेटी हुई है। रस्सी पर 25 N का एकसमान कर्षण बल लगाया जाता है जैसा कि चित्र 6.31 में दर्शाया गया है। गतिपालक पहिया एक क्षैतिज धुरी पर लगाया गया है जिसके वियरिंगों में कोई घर्षण नहीं है।

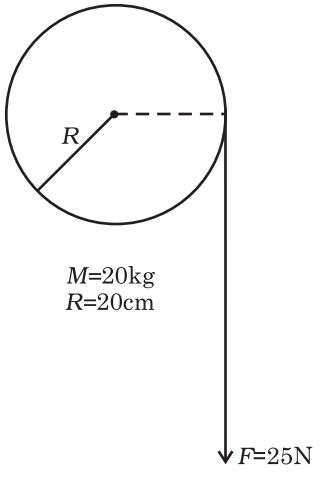
(a) पहिये के कोणीय त्वरण की गणना कीजिए।

(b) 2 m रस्सी खुलने तक कर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

(c) इस क्षण पर पहिये की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। यह मानिए कि पहिया शून्य से गति प्रारंभ करता है।

(d) भाग (b) एवं (c) के उत्तरों की तुलना कीजिए।

हल



चित्र 6.31

(a) इसके लिए $I\alpha = \tau$

बल आघूर्ण $\tau = FR$

$= 25 \times 0.20$ Nm ($R = 0.20$m)

$= 5.0$ Nm

© NCERT not to be republished

और I = अपनी अक्ष के परितः पहिये का जड़त्व आघूर्ण $= \frac{MR^2}{2}$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

कोणीय त्वरण $\alpha = 5.0 \text{ N m}/0.4 \text{ kg m}^2 = 12.5 \text{ s}^{-2}$

(b) 2 m रस्सी खोलने में किया गया कार्य
$= 25 \text{ N} \times 2 \text{ m} = 50 \text{ J}$

(c) माना कि ω अंतिम कोणीय वेग है। तब पहिये की गतिज ऊर्जा में हुई वृद्धि $= \frac{1}{2} I\omega^2$

चूंकि पहिया विरामावस्था से गति प्रारंभ करता है

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$

तथा कोणीय विस्थापन θ = खोली गई रस्सी की लंबाई/पहिये की त्रिज्या
$= 2 \text{ m}/0.2 \text{ m} = 10 \text{ rad}$

$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250 (\text{rad/s})^2$

$\therefore$ गतिज ऊर्जा में वृद्धि $= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50 \text{ J}$

(d) दोनों उत्तर समान हैं, अर्थात् पहिये द्वारा प्राप्त गतिज ऊर्जा = बल द्वारा किया गया कार्य। यहाँ घर्षण के कारण ऊर्जा का बिलकुल क्षय नहीं हुआ है। ◀

6.12 अचल अक्ष के परितः घूर्णी गति का कोणीय संवेग

अनुभाग 6.7 में, हमने कणों के निकाय के कोणीय संवेग के विषय में पढ़ा था। उससे हम यह जानते हैं, कि किसी बिन्दु के परितः, कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग में समय के साथ होने वाले परिवर्तन की दर, उस निकाय पर उसी बिन्दु के परितः लिए गए कुल बाह्य बल आघूर्ण के बराबर होती है। जब कुल बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो, तो निकाय का कुल कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

अब हम कोणीय संवेग का अध्ययन, एक अचल अक्ष के परितः घूर्णन के विशिष्ट मामलों में करना चाहते हैं। n-कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग की व्यापक समीकरण है,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (6.25b)$$

अब हम पहले, एक अचल अक्ष के परितः किसी दृढ़ पिण्ड के कोणीय संवेग पर विचार करेंगे। प्राप्त समीकरण को सरलतम पदों में लाकर फिर पिण्ड के सभी कणों के लिए इसका जोड़ निकालेंगे तथा पूरे पिण्ड के लिए **L** प्राप्त करेंगे।

एकाकी कण के लिए, $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

चित्र (6.17b) देखिए। घूर्णन करती वस्तु के किसी विशिष्ट कण का स्थिति सदिश **OP** = **r** है। चित्र में **r** = **OC** + **CP** (क्योंकि **p** = m**v**)

$$\boldsymbol{l} = (\mathbf{OC} \times m\mathbf{v}) + (\mathbf{OC} \times m\mathbf{v})$$

P पर कण के रेखीय वेग **v** का परिमाण $v = \omega r_\perp$ है जहाँ $r_\perp$ CP की लम्बाई या P की घूर्णी अक्ष के लम्बवत् दूरी है। **v** कण द्वारा बनाए गए वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा के अनुदिश है। दाहिने हाथ के नियम द्वारा ज्ञात कर सकते हैं कि **CP** × **v** अचल अक्ष के अनुदिश है। घूर्णन अक्ष (जो यहाँ z-अक्ष है) को इकाई सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश व्यक्त करने पर

$$\mathbf{CP} \times m\mathbf{v} = r_\perp (mv)\hat{\mathbf{k}}$$
$$= mr_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}} \qquad (v = \omega r_\perp)$$

इसी प्रकार हम जाँच सकते हैं कि **OC** × **v** अचर अक्ष के लम्बवत् हैं। अचर अक्ष (यानि z-अक्ष) के अनुदिश $\boldsymbol{l}$ के घटक से $\boldsymbol{l}_z$ से दर्शाने पर

$$\boldsymbol{l}_z = \mathbf{CP} \times m\mathbf{v} = mr_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}}$$

तथा $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_z + \mathbf{OC} \times m\mathbf{v}$

ध्यान दें कि $\boldsymbol{l}_z$ अचर अक्ष के समांतर है परन्तु $\boldsymbol{l}$ नहीं। सामान्यतया किसी कण का कोणीय संवेग घूर्णी अक्ष के अनुदिश नहीं होता है अर्थात् आवश्यक नहीं कि $\boldsymbol{l}$ तथा $\boldsymbol{\omega}$ एक-दूसरे के समांतर हों। रेखीय गति में इससे संगत तथ्य से इसकी तुलना करें। रेखीय गति में किसी कण के **p** तथा **v** सदैव एक दूसरे के समांतर होते हैं।

पूरे पिण्ड का कोणीय संवेग ज्ञात करने के लिए, हम इसके सभी कणों के लिए $\boldsymbol{l}_i$ के मानों को जोड़ेंगे यानि i का मान 1 से n तक रखते हुए

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{l}_i = \sum \boldsymbol{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

z-अक्ष के अनुदिश तथा लम्बवत् **L** के घटकों को हम $\mathbf{L}_z$ तथा $\mathbf{L}_\perp$ से दर्शात हैं।

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i \qquad (6.42a)$$

जहाँ m_i तथा $\mathbf{v}_i$ i वें कण के द्रव्यमान तथा वेग हैं तथा C_i कण द्वारा बनाए गए वृत्त का केन्द्र है।

$$\mathbf{L}_z \sum \boldsymbol{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega \hat{\mathbf{k}}$$

या $\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$ (6.42b)

© NCERT not to be republished

समीकरण (6.42b) स्वाभाविक रूप से अनुसरित है, क्योंकि iवें कण की अक्ष से लंबवत् दूरी r_i है, एवं घूर्णन अक्ष के परित: पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण $I = \sum m_i r_i^2$ है।

ध्यान दें $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ (6.42c)

दृढ़ पिण्ड, जिन पर हमने इस अध्याय में मुख्यत: विचार किया है, घूर्णन अक्ष के परित: सममित हैं अर्थात्, घूर्णन अक्ष उनकी सममिति अक्षों में से एक है। इस प्रकार के पिण्डों के लिए, दिए गए $\mathbf{OC}_i$ के संगत प्रत्येक $\mathbf{v}_i$ वेग युक्त कण के लिए C_i केन्द्र वाले वृत्त के, व्यास के दूसरे सिरे पर, $-\mathbf{v}_i$ वेग वाला दूसरा कण होता है। इस प्रकार के कण-युगलों का $\mathbf{L}_\perp$ में कुल योगदान शून्य होगा। परिणामस्वरूप सममित पिण्डों के लिए $\mathbf{L}_\perp$ शून्य होता है। अत:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \quad (6.42d)$$

उन पिण्डों के लिए जो घूर्णन अक्ष के परित: सममित नहीं है, $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_z$। इसलिए $\mathbf{L}$ घूर्णन अक्ष के अनुदिश नहीं होता।

सारणी 6.1 में क्या आप बता सकते हैं कि किन मामलों में $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z$ लागू नहीं होता?

आइये, समीकरण (6.42a) को समय के आधार पर अवकलित करें क्योंकि $\hat{\mathbf{k}}$ एक अचर सदिश है :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{d}{dt}(Iw)\right)\hat{\mathbf{k}}$$

समीकरण (6.26b) के अनुसार

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

जैसा कि आपने पिछले भाग में देखा है एक अचर अक्ष के परित: घूर्णी पिण्ड के लिए बाह्य बल आघूर्णी के केवल उन्हीं घटकों पर विचार करने की आवश्यकता है जो घूर्णी अक्ष के अनुदिश हैं। अत: $\boldsymbol{\tau} = \tau\hat{\mathbf{k}}$। चूँकि $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ तथा $\mathbf{L}_z$ की दिशा (सदिश $\hat{\mathbf{k}}$) अचर है, एक अचर अक्ष के परित: घूर्णी पिण्ड के लिए

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \tau\hat{\mathbf{k}} \quad (6.43a)$$

तथा $$\frac{d\mathbf{L}_\perp}{dt} = 0 \quad (6.43b)$$

अत: अचल अक्ष के परित: घूर्णी पिण्ड का अचल अक्ष के लम्बवत् कोणीय संवेग का घटक अचर है। चूँकि $\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$, समीकरण (6.43a) से

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \quad (6.43c)$$

यदि जड़त्व आघूर्ण I समय के साथ परिवर्तित नहीं होता है तो

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

और समीकरण (6.43c) से

$$\tau = I\alpha \quad (6.41)$$

कार्य-गतिज ऊर्जा संबंध से यह समीकरण हम पहले ही व्युत्पन्न कर चुके हैं।

6.12.1 कोणीय संवेग का संरक्षण

अब हम इस स्थिति में हैं कि कोणीय संवेग के संरक्षण के सिद्धांत का पुनरावलोकन कर सकें। हम अपने विवेचन को एक अचल अक्ष के परित: घूर्णन तक सीमित रखेंगे। समीकरण (6.43c) से, यदि बाह्य बल आघूर्ण शून्य है तो

$$L_z = I\omega = \text{अचरांक} \quad (6.44)$$

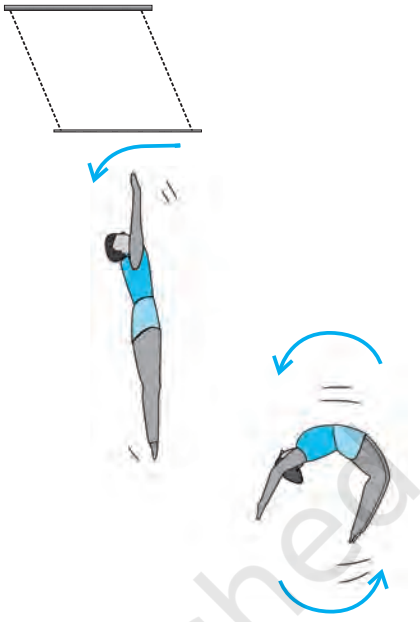
सममित पिण्डों के लिए, समीकरण (6.42d) से, L_z के स्थान पर L लेते हैं। (L तथा L_z क्रमश: $\mathbf{L}$ तथा $\mathbf{L}_z$ के परिमाण हैं)।

यह अचल अक्ष घूर्णन के लिए समीकरण (6.29a) का अन्य रूप है जो कोणीय संवेग के संरक्षण का व्यापक नियम व्यक्त करता है। समीकरण (6.44) हमारे दैनिक जीवन की बहुत सी स्थितियों पर उपयोगी है। अपने मित्र के साथ मिल कर आप यह प्रयोग कर सकते हैं। एक घुमाव कुर्सी पर बैठिए अपनी भुजाएँ मोड़े रखिए और पैरों को जमीन से ऊपर उठाकर रखिए। अपने मित्र से कहिए कि वह कुर्सी को तेजी से घुमाए। जबकि कुर्सी पर्याप्त कोणीय चाल से घूम रही हो अपनी भुजाओं को क्षैतिज दिशा में फैलाइये। क्या परिणाम होता है? आपकी कोणीय चाल घट जाती है। यदि आप अपनी भुजाओं को फिर शरीर के पास ले आयें तो कोणीय चाल फिर से बढ़ जाती है। यह एक ऐसी स्थिति है जिसमें कोणीय संवेग का संरक्षण स्पष्ट है। यदि घूर्णन यंत्र व्यवस्था में घर्षण नगण्य हो, तो कुर्सी की घूर्णन अक्ष के परित: कोई बाह्य बल आघूर्ण प्रभावी नहीं रहेगा अत: $I\omega$ का मान नियत है। भुजाओं को फैलाने से घूर्णन अक्ष के परित: I बढ़ जायेगा, परिणामस्वरूप कोणीय वेग ω कम हो जायेगा। भुजाओं को शरीर के पास लाने से विपरीत परिस्थिति प्राप्त होगी।

© NCERT not to be republished



चित्र 6.32 (a) *कोणीय संवेग के संरक्षण का प्रदर्शन। घुमाऊ कुर्सी पर बैठी लड़की अपनी भुजाओं को शरीर के पास लाती है/ दूर ले जाती है।*



चित्र 6.32 (b) *कलाबाज अपने कला प्रदर्शन में कोणीय संवेग के नियम का लाभ लेते हुए।*

एक सरकस का कलाबाज और एक गोताखोर इस सिद्धांत का बखूबी लाभ उठाते हैं। इसके अलावा स्केटर्स और भारतीय या पश्चिमी शास्त्रीय नृतक जब एक पैर के पंजे पर घूर्णन करते हैं तो वे उस सिद्धांत संबंधी अपने असाधारण प्रावीण्य का प्रदर्शन करते है।

सारांश

1. एक आदर्श दृढ़ पिंड एक ऐसा पिंड है जिसके कणों पर बल लगाने पर भी उनके बीच की दूरी नहीं बदलती।
2. एक ऐसा दृढ़ पिंड जो किसी बिन्दु पर, या किसी रेखा के अनुदिश स्थिर हो केवल घूर्णी गति ही कर सकता है। जो पिंड किसी प्रकार भी स्थिर न हो वह या तो स्थानान्तरण गति करेगा या घूर्णी और स्थानान्तरण दोनों प्रकार की संयोजित गति।
3. एक नियत अक्ष के परितः घूर्णन में, दृढ़ पिण्ड का प्रत्येक कण अक्ष के लम्बवत् तल में एक वृत्ताकार पथ पर चलता है जिसका केन्द्र अक्ष पर स्थित होता है। अर्थात् घूर्णन करते दृढ़ पिंड की अक्ष के लम्बवत् प्रत्येक रेखा का कोणीय वेग किसी क्षण विशेष पर समान रहता है।
4. शुद्ध स्थानान्तरण में, पिंड का प्रत्येक कण किसी क्षण पर समान वेग से चलता है।
5. कोणीय वेग एक सदिश है। इसका परिमाण $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ है और इसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है। नियत अक्ष के परितः घूर्णन के लिए, सदिश $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा भी नियत होती है।
6. दो सदिशों $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ का सदिश (या क्रॉस) गुणन एक सदिश है जिसको हम $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ लिखते हैं। इस सदिश का परिमाण $ab \sin\theta$ है और इसकी दिशा का ज्ञान दक्षिणवर्त पेंच के नियम या दाएं हाथ के नियम द्वारा होता है।
7. नियत अक्ष के परितः घूर्णन करते दृढ़ पिंड के किसी कण का रेखीय वेग $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, जहाँ $\mathbf{r}$ अक्ष पर लिए गये किसी मूल बिन्दु से कण की स्थिति बताने वाला सदिश है। यह संबंध, दृढ़ पिंड की एक नियत बिन्दु के परितः होने वाली अधिक व्यापक गति के लिए लागू होता है। उस स्थिति में $\mathbf{r}$, स्थिर बिन्दु को मूल बिन्दु लेकर कण की स्थिति दर्शाने वाला सदिश है।
8. कणों के एक निकाय का द्रव्यमान केन्द्र एक ऐसा बिन्दु है जिसकी स्थिति सदिश हम निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

© NCERT not to be republished

9. कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के वेग को हम $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ द्वारा लिख सकते हैं। यहाँ $\mathbf{P}$ निकाय का रेखीय संवेग है। द्रव्यमान केन्द्र इस प्रकार गति करता है मानो निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान इस बिन्दु पर संकेंद्रित हो और सभी बाह्य बल भी इसी बिन्दु पर प्रभावी हों। यदि निकाय पर कुल बाह्य बल शून्य है तो इसका कुल रेखीय संवेग अचर रहता है।

10. n कणों के निकाय का मूल बिन्दु के परितः कोणीय संवेग,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

n कणों के निकाय का मूल बिन्दु के परितः ऐंठन या बल आघूर्ण,

$$\tau = \sum_{1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

i वें कण पर लगने वाले बल $\mathbf{F}_i$ में, बाह्य एवं आंतरिक सभी बल शामिल हैं। न्यूटन के तृतीय नियम को मानते हुए कि किन्ही दो कणों के बीच बल, उनकी स्थितियों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश लगते हैं, हम दर्शा सकते हैं $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = 0$ एवं,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$$

11. एक दृढ़ पिण्ड के यांत्रिक संतुलन में होने के लिए,

(i) यह स्थानान्तरीय संतुलन में हो, अर्थात, इस पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य हो, $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ एवं,

(ii) यह घूर्णी संतुलन में हो, अर्थात्, इस पर लगने वाला कुल बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो,: $\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$;

12. किसी विस्तारित आकार के पिंड का गुरुत्व केन्द्र वह बिन्दु है जिसके परितः पिंड का कुल गुरुत्वीय बल आघूर्ण शून्य होता है।

13. किसी अक्ष के परितः एक दृढ़ पिंड का जड़त्व आघूर्ण $I = \sum m_i r_i^2$ सूत्र द्वारा परिभाषित किया जाता है। जहाँ r_i पिण्ड के i-वें कण की अक्ष से लम्बवत् दूरी है। घूर्णन की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ है

राशि	संकेत	विमा	मात्रक	टिप्पणी
कोणीय वेग	$\boldsymbol{\omega}$	$[T^{-1}]$	rad s^{-1}	$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
कोणीय संवेग	$\mathbf{L}$	$[ML^2T^{-1}]$	J s	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
बल आघूर्ण	$\boldsymbol{\tau}$	$[ML^2T^{-2}]$	N m	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
जड़त्व आघूर्ण	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_{i\perp}^2$

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

1. किसी निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति ज्ञात करने के लिए निकाय के आन्तरिक बलों का ज्ञान आवश्यक नहीं है। इसके लिए हमें केवल पिण्ड पर लगने वाले बाह्य बलों का ज्ञान होना चाहिए।
2. कणों के किसी निकाय की गति को, इसके द्रव्यमान केन्द्र की स्थानान्तरीय गति और द्रव्यमान केन्द्र के परितः इसकी घूर्णी गति में अलग-अलग करके विचार करना कणों के निकाय के गति विज्ञान की एक उपयोगी तकनीक है। इस तकनीक का एक उदाहरण, कणों के निकाय की गतिज ऊर्जा K को, द्रव्यमान के परितः निकाय के घूर्णन की गतिज ऊर्जा K' एवं द्रव्यमान केन्द्र की गतिज ऊर्जा $MV^2/2$ में पृथक करना है।
$$K = K' + MV^2/2$$
3. परिमित आकार के पिंडों (अथवा कणों के निकायों) के लिए लागू होने वाला न्यूटन का द्वितीय नियम कणों के लिए लागू होने वाले न्यूटन के द्वितीय एवं तृतीय नियमों के ऊपर आधारित है।
4. यह स्थापित करने के लिए कि कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग परिवर्तन की दर, निकाय पर आरोपित कुल बल आघूर्ण है, हमें न केवल कणों के लिए लागू होने वाले न्यूटन के द्वितीय नियम की आवश्यकता होगी वरन् तृतीय नियम भी इस शर्त के साथ लागू करना होगा कि किन्ही दो कणों के बीच बल उनको मिलाने वाली रेखा के अनुदिश ही कार्य करते हैं।
5. कुल बाह्य बल का शून्य होना और कुल बाह्य बल आघूर्ण का शून्य होना दो स्वतंत्र शर्तें हैं। यह हो सकता है कि एक शर्त पूरी होती हो पर दूसरी पूरी न होती हो। बलयुग्म में कुल बाह्य बल शून्य है पर बल आघूर्ण शून्य नहीं है।
6. यदि कुल बाह्य बल शून्य हो तो निकाय पर लगने वाला कुल बल आघूर्ण मूल बिन्दु के ऊपर निर्भर नहीं करता।
7. किसी पिंड का गुरुत्व केन्द्र उसके द्रव्यमान केन्द्र से तभी संपाती होता है जब गुरुत्व क्षेत्र पिंड के विभिन्न भागों पर समान होता है।
8. यदि दृढ़ पिंड एक नियत अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा हो तब भी यह आवश्यक नहीं है कि इसका कोणीय संवेग **L**, कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ के समान्तर हो। तथापि, इस अध्याय में वर्णित स्थिति में, जहाँ पिंड एक नियत अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है और वह अक्ष पिंड की सममित अक्ष भी है, संबंध $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ लागू होता है जहाँ I घूर्णी अक्ष के परितः पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण है।

अभ्यास

6.1 एकसमान द्रव्यमान घनत्व के निम्नलिखित पिण्डों में प्रत्येक के द्रव्यमान केंद्र की अवस्थिति लिखिए:

(a) गोला, (b) सिलिंडर, (c) छल्ला तथा (d) घन ।

क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केंद्र आवश्यक रूप से उस पिण्ड के भीतर स्थित होता है ?

6.2 HCl अणु में दो परमाणुओं के नाभिकों के बीच पृथकन लगभग 1.27Å (1Å = 10^{-10}m) है । इस अणु के द्रव्यमान केंद्र की लगभग अवस्थिति ज्ञात कीजिए । यह ज्ञात है कि क्लोरीन का परमाणु हाइड्रोजन के परमाणु की तुलना में 35.5 गुना भारी होता है तथा किसी परमाणु का समस्त द्रव्यमान उसके नाभिक पर केंद्रित होता है ।

6.3 कोई बच्चा किसी चिकने क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल v से गतिमान किसी लंबी ट्राली के एक सिरे पर बैठा है । यदि बच्चा खड़ा होकर ट्राली पर किसी भी प्रकार से दौड़ने लगता है, तब निकाय (ट्राली + बच्चा) के द्रव्यमान केंद्र की चाल क्या है ?

6.4 दर्शाइये कि **a** एवं **b** के बीच बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ के परिमाण का आधा है।

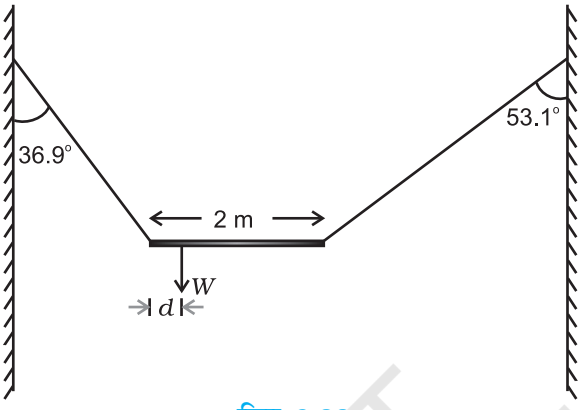
6.5 दर्शाइये कि $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ का परिमाण तीन सदिशों **a**, **b** एवं **c** से बने समान्तर षट्फलक के आयतन के बराबर है।

6.6 एक कण, जिसके स्थिति सदिश **r** के x, y, z अक्षों के अनुदिश अवयव क्रमशः x, y, z हैं, और रेखीय संवेग सदिश **P** के अवयव $p_x, p_y p_z$ हैं, के कोणीय संवेग **l** के अक्षों के अनुदिश अवयव ज्ञात कीजिए। दर्शाइये, कि यदि कण केवल x-y तल में ही गतिमान हो तो कोणीय संवेग का केवल z-अवयव ही होता है।

© NCERT not to be republished

6.7 दो कण जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान m एवं चाल v है d दूरी पर, समान्तर रेखाओं के अनुदिश, विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं। दर्शाइये कि इस द्विकण निकाय का सदिश कोणीय संवेग समान रहता है, चाहे हम जिस बिन्दु के परितः कोणीय संवेग लें।

6.8 W भार की एक असमांग छड़ को, उपेक्षणीय भार वाली दो डोरियों से चित्र 6.33 में दर्शाये अनुसार लटका कर विरामावस्था में रखा गया है। डोरियों द्वारा ऊर्ध्वाधर से बने कोण क्रमशः $36.9°$ एवं $53.1°$ हैं। छड़ 2 m लम्बाई की है। छड़ के बाएँ सिरे से इसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी d ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.33

6.9 एक कार का भार 1800 kg है। इसकी अगली और पिछली धुरियों के बीच की दूरी 1.8 m है। इसका गुरुत्व केन्द्र, अगली धुरी से 1.05 m पीछे है। समतल धरती द्वारा इसके प्रत्येक अगले और पिछले पहियों पर लगने वाले बल की गणना कीजिए।

6.10 समान द्रव्यमान और त्रिज्या के एक खोखले बेलन और एक ठोस गोले पर समान परिमाण के बल आघूर्ण लगाये गये हैं। बेलन अपनी सामान्य सममित अक्ष के परितः घूम सकता है और गोला अपने केन्द्र से गुजरने वाली किसी अक्ष के परितः। एक दिये गये समय के बाद दोनों में कौन अधिक कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा?

6.11 20 kg द्रव्यमान का कोई ठोस सिलिंडर अपने अक्ष के परितः 100 rad s^{-1} की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है । सिलिंडर की त्रिज्या 0.25 m है । सिलिंडर के घूर्णन से संबद्ध गतिज ऊर्जा क्या है ? सिलिंडर का अपने अक्ष के परितः कोणीय संवेग का परिमाण क्या है ?

6.12 (a) कोई बच्चा किसी घूर्णिका (घूर्णीमंच) पर अपनी दोनों भुजाओं को बाहर की ओर फैलाकर खड़ा है । घूर्णिका को 40 rev/min की कोणीय चाल से घूर्णन कराया जाता है । यदि बच्चा अपने हाथों को वापस सिकोड़ कर अपना जड़त्व आघूर्ण अपने आरंभिक जड़त्व आघूर्ण का 2/5 गुना कर लेता है, तो इस स्थिति में उसकी कोणीय चाल क्या होगी ? यह मानिए कि घूर्णिका की घूर्णन गति घर्षणरहित है ।

(b) यह दर्शाइए कि बच्चे की घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा उसकी आरंभिक घूर्णन की गतिज ऊर्जा से अधिक है। आप गतिज ऊर्जा में हुई इस वृद्धि की व्याख्या किस प्रकार करेंगे ?

6.13 3kg द्रव्यमान तथा 40 cm त्रिज्या के किसी खोखले सिलिंडर पर कोई नगण्य द्रव्यमान की रस्सी लपेटी गई है । यदि रस्सी को 30 N बल से खींचा जाए तो सिलिंडर का कोणीय त्वरण क्या होगा ? रस्सी का रैखिक त्वरण क्या है? यह मानिए कि इस प्रकरण में कोई फिसलन नहीं है ।

6.14 किसी घूर्णक (रोटर) की 200 rad s^{-1} की एकसमान कोणीय चाल बनाए रखने के लिए एक इंजन द्वारा 180 N m का बल आघूर्ण प्रेषित करना आवश्यक होता है । इंजन के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए । (नोट : घर्षण की अनुपस्थिति में एकसमान कोणीय वेग होने में यह समाविष्ट है कि बल आघूर्ण शून्य है । व्यवहार में लगाए गए बल आघूर्ण की आवश्यकता घर्षणी बल आघूर्ण को निरस्त करने के लिए होती है ।) यह मानिए कि इंजन की दक्षता 100% है।

© NCERT not to be republished

6.15 R त्रिज्या वाली समांग डिस्क से $R/2$ त्रिज्या का एक वृत्ताकार भाग काट कर निकाल दिया गया है। इस प्रकार बने वृत्ताकार सुराख का केन्द्र मूल डिस्क के केन्द्र से $R/2$ दूरी पर है। अवशिष्ट डिस्क के गुरुत्व केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

6.16 एक मीटर छड़ के केन्द्र के नीचे क्षुर-धार रखने पर वह इस पर संतुलित हो जाती है जब दो सिक्के, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 5 g है, 12.0 cm के चिन्ह पर एक के ऊपर एक रखे जाते हैं तो छड़ 45.0 cm चिन्ह पर संतुलित हो जाती है। मीटर छड़ का द्रव्यमान क्या है?

6.17 एक ठोस गोला, भिन्न नति के दो आनत तलों पर एक ही ऊँचाई से लुढ़कने दिया जाता है। (a) क्या वह दोनों बार समान चाल से तली में पहुँचेगा? (b) क्या उसको एक तल पर लुढ़कने में दूसरे से अधिक समय लगेगा? (c) यदि हाँ, तो किस पर और क्यों?

6.18 2 m त्रिज्या के एक वलय (छल्ले) का भार 100 kg है। यह एक क्षैतिज फर्श पर इस प्रकार लोटनिक गति करता है कि इसके द्रव्यमान केन्द्र की चाल 20 cm/s हो। इसको रोकने के लिए कितना कार्य करना होगा?

6.19 ऑक्सीजन अणु का द्रव्यमान 5.30×10^{-26} kg है तथा इसके केन्द्र से होकर गुजरने वाली और इसके दोनों परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण 1.94×10^{-46} kg m^2 है। मान लीजिए कि गैस के ऐसे अणु की औसत चाल 500 m/s है और इसके घूर्णन की गतिज ऊर्जा, स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा की दो तिहाई है। अणु का औसत कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

6.20 एक बेलन 30° कोण बनाते आनत तल पर लुढ़कता हुआ ऊपर चढ़ता है। आनत तल की तली में बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की चाल 5 m/s है।

(a) आनत तल पर बेलन कितना ऊपर जायेगा?

(b) वापस तली तक लौट आने में इसे कितना समय लगेगा?

© NCERT not to be republished

अध्याय 7

गुरुत्वाकर्षण

7.1 भूमिका
7.2 केप्लर के नियम
7.3 गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम
7.4 गुरुत्वीय नियतांक
7.5 पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण
7.6 पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे तथा ऊपर गुरुत्वीय त्वरण
7.7 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा
7.8 पलायन चाल
7.9 भू उपग्रह
7.10 कक्षा में गतिशील उपग्रह की ऊर्जा

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

7.1 भूमिका

हम अपने आरंभिक जीवन में ही, सभी पदार्थों के पृथ्वी की ओर आकर्षित होने की प्रकृति को जान लेते हैं। जो भी वस्तु ऊपर फेंकी जाती है वह पृथ्वी की ओर गिरती है, पहाड़ से नीचे उतरने की तुलना में पहाड़ पर ऊपर जाने में कहीं अधिक थकान होती है, ऊपर बादलों से वर्षा की बूँदें पृथ्वी की ओर गिरती हैं, तथा अन्य ऐसी ही बहुत सी परिघटनाएँ हैं। इतिहास के अनुसार इटली के भौतिक विज्ञानी गैलीलियो (1564–1642) ने इस तथ्य को मान्यता प्रदान की कि सभी पिण्ड, चाहे उनके द्रव्यमान कुछ भी हों, एकसमान त्वरण से पृथ्वी की ओर त्वरित होते हैं। ऐसा कहा जाता है कि उन्होंने इस तथ्य का सार्वजनिक निदर्शन किया था। यह कहना, चाहे सत्य भी न हो, परंतु यह निश्चित है कि उन्होंने आनत समतल पर लोटनी पिण्डों के साथ कुछ प्रयोग करके गुरुत्वीय त्वरण का एक मान प्राप्त किया था, जो बाद में किए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त अधिक यथार्थ मानों के काफी निकट था।

आद्य काल से ही बहुत से देशों में तारों, ग्रहों तथा उनकी गतियों के प्रेक्षण जैसी असंबद्ध प्रतीत होने वाली परिघटनाएँ ध्यानाकर्षण का विषय रही हैं। आद्य काल के प्रेक्षणों द्वारा आकाश में दिखाई देने वाले तारों की पहचान की गई, जिनकी स्थिति में सालोंसाल कोई परिवर्तन नहीं होता है। प्राचीन काल से देखे जाने वाले पिण्डों में कुछ अधिक रोचक पिण्ड भी देखे गए, जिन्हें ग्रह कहते हैं, और जो तारों की पृष्ठभूमि में नियमित गति करते प्रतीत होते हैं। ग्रहीय गतियों के सबसे प्राचीन प्रमाणित मॉडल को अब से लगभग 2000 वर्ष पूर्व टॉलमी ने प्रस्तावित किया था। यह 'भूकेन्द्री' मॉडल था, जिसके अनुसार सभी आकाशीय पिण्ड तारे, सूर्य तथा ग्रह पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। इस मॉडल की धारणा के अनुसार आकाशीय पिण्डों की संभावित गति केवल वृत्तीय गति ही हो सकती थी। ग्रहों की प्रेक्षित गतियों का वर्णन करने के लिए टॉलमी ने गतियों के जिस विन्यास को प्रतिपादित किया वह बहुत जटिल था। इसके अनुसार ग्रहों को वृत्तों में परिक्रमा करने वाला तथा इन वृत्तों के केन्द्रों को स्वयं एक बड़े वृत्त में गतिशील बताया गया था। लगभग 400 वर्ष के पश्चात भारतीय खगोलज्ञों ने भी इसी प्रकार के सिद्धांत प्रतिपादित किए। तथापि, आर्यभट्ट (5 वीं शताब्दी में) ने पहले से ही अपने शोध प्रबन्ध में एक अधिक परिष्कृत मॉडल का वर्णन किया था, जिसे **सूर्य केन्द्री मॉडल** कहते हैं जिसके अनुसार सूर्य को सभी

© NCERT not to be republished

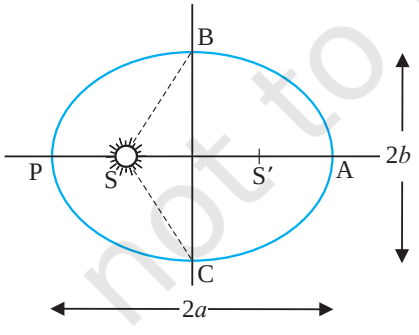
ग्रहों की गतियों का केन्द्र माना गया है। एक हजार वर्ष के पश्चात पोलैण्ड के एक ईसाई भिक्षु, जिनका नाम निकोलस कोपरनिकस (1473–1543) था, ने एक पूर्ण विकसित मॉडल प्रस्तावित किया जिसके अनुसार सभी ग्रह, केन्द्रीय स्थान पर स्थित स्थिर सूर्य, के परितः वृत्तों में परिक्रमा करते हैं। गिरजाघर ने इस सिद्धांत पर संदेह प्रकट किया। परन्तु इस सिद्धांत के लब्ध प्रतिष्ठित समर्थकों में एक गैलीलियो थे, जिनपर शासन के द्वारा, आस्था के विरुद्ध होने के कारण, मुकदमा चलाया गया।

लगभग गैलीलियो के ही काल में डेनमार्क के एक कुलीन पुरुष टायको ब्रेह (1546–1601) ने अपना समस्त जीवन काल अपनी नंगी आंखों से सीधे ही ग्रहों के प्रेक्षणों का अभिलेखन करने में लगा दिया। उनके द्वारा संकलित आँकड़ों का बाद में उसके सहायक जोहान्नेस केप्लर (1571–1640) द्वारा विश्लेषण किया गया। उन्होंने इन आँकड़ों को सार के रूप में तीन परिष्कृत नियमों द्वारा प्रतिपादित किया, जिन्हें अब **केप्लर के नियमों** के नाम से जाना जाता है। ये नियम न्यूटन को ज्ञात थे। इन उत्कृष्ट नियमों ने न्यूटन को अपना गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम प्रस्तावित करके असाधारण वैज्ञानिकों की पंक्ति में शामिल होने योग्य बनाया।

7.2 केप्लर के नियम

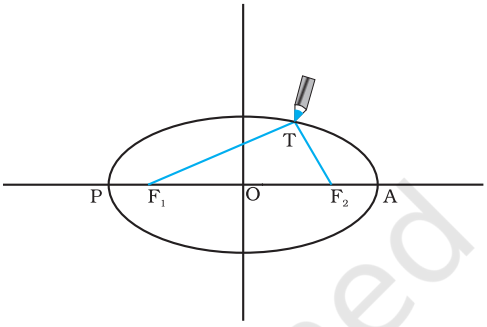
केप्लर के तीन नियमों का उल्लेख इस प्रकार किया जा सकता है:

1. कक्षाओं का नियम : *सभी ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गति करते हैं तथा सूर्य इसकी, एक नाभि पर स्थित होता है* (चित्र 7.1a)।



चित्र 7.1(a) सूर्य के परितः किसी ग्रह द्वारा अनुरेखित दीर्घवृत्त। सूर्य का निकटतम बिन्दु P तथा दूरस्थ बिन्दु A है। P को उपसौर तथा A को अपसौर कहते हैं। अर्ध दीर्घ अक्ष दूरी AP का आधा है।

यह नियम कोपरनिकस के मॉडल से हटकर था जिसके अनुसार ग्रह केवल वृत्तीय कक्षाओं में ही गति कर सकते हैं। दीर्घवृत्त, जिसका वृत्त एक विशिष्ट प्रकरण होता है, एक बन्द वक्र होता है, जिसे बहुत सरलता से इस प्रकार खींचा जा सकता है :

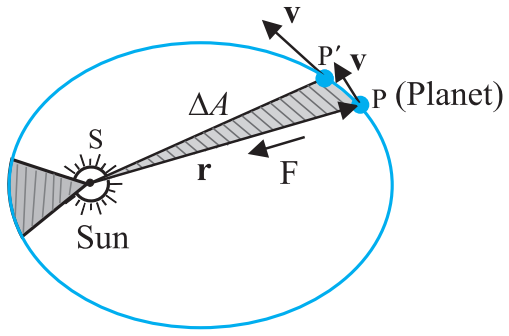


चित्र 7.1(b) एक दीर्घवृत खींचना। एक डोरी के दो सिरे F_1 तथा F_2 स्थिर हैं। पेंसिल की नोंक डोरी को तनी रखते हुए इन सिरों के परितः चलायी जाती है।

दो बिन्दुओं F_1 तथा F_2 का चयन कीजिए। एक डोरी लेकर इसके सिरों को F_1 तथा F_2 पर पिनों द्वारा जड़िए। पेंसिल की नोंक से डोरी को तानिए और फिर डोरी को तनी हुई रखते हुए पेंसिल को चलाते हुए बन्द वक्र खींचिए (चित्र 7.1 (b)) इस प्रकार प्राप्त बन्द वक्र को दीर्घवृत्त कहते हैं। स्पष्ट है कि दीर्घवृत्त के किसी भी बिन्दु T पर F_1 तथा F_2 से दूरियों का योग अपरिवर्तित (नियत) है। बिन्दु F_1 तथा F_2 दीर्घवृत्त की नाभि कहलाती है। बिन्दु F_1 तथा F_2 को मिलाइए और इस रेखा को आगे बढ़ाइए जिससे यह दीर्घवृत्त को चित्र 7.1 (b) में दर्शाए अनुसार बिन्दुओं P तथा A पर प्रतिच्छेद करती है। रेखा PA का मध्यबिन्दु दीर्घवृत्त का केन्द्र है तथा लम्बाई PO = AO दीर्घवृत्त का अर्ध दीर्घ अक्ष कहलाती है। किसी वृत्त के लिए दोनों नाभियाँ एक दूसरे में विलीन होकर एक हो जाती हैं तथा अर्ध दीर्घ अक्ष वृत्त की त्रिज्या बन जाती है।

2. क्षेत्रफलों का नियम : *सूर्य से किसी ग्रह को मिलाने वाली रेखा समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प करती है* (चित्र 7.2)। यह नियम इस प्रेक्षण से प्रकट होता है कि ग्रह उस समय धीमी गति करते प्रतीत होते हैं जब वे सूर्य से अधिक दूरी पर होते हैं। सूर्य के निकट होने पर ग्रहों की गति अपेक्षाकृत तीव्र होती है।

© NCERT not to be republished



चित्र 7.2 ग्रह P सूर्य के परित: दीर्घवृत्तीय कक्षा में गति करता है। किसी छोटे समय अंतराल Δt में ग्रह द्वारा प्रसर्पित क्षेत्रफल ΔA को छायांकित क्षेत्र द्वारा दर्शाया गया है।

3. आवर्त कालों का नियम

किसी ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग उस ग्रह द्वारा अनुरेखित दीर्घवृत्त के अर्ध-दीर्घ अक्ष के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।

नीचे दी गयी सारणी (7.1) में सूर्य के परित: आठ ग्रहों के सन्निकट परिक्रमण-काल उनके अर्ध-दीर्घ अक्षों के मानों सहित दर्शाए गए हैं

सारणी 7.1

नीचे दिए गए ग्रहीय गतियों की माप के आँकड़े केप्लर के आवर्तकालों के नियम की पुष्टि करते हैं।

a ≡ अर्ध-दीर्घ अक्ष 10^{10} m के मात्रकों में
T ≡ ग्रह का परिक्रमण-काल वर्षों (y) में
Q ≡ भागफल (T^2 / a^3) 10^{-34} y^2 m^{-3} मात्रकों में

ग्रह	a	T	Q
बुध	5.79	0.24	2.95
शुक्र	10.8	0.615	3.00
पृथ्वी	15.0	1	2.96
मंगल	22.8	1.88	2.98
बृहस्पति	77.8	11.9	3.01
शनि	143	29.5	2.98
यूरेनस	287	84	2.98
नेप्ट्यून	450	165	2.99
प्लूटो*	590	248	2.99

क्षेत्रफलों के नियम को कोणीय संवेग संरक्षण का निष्कर्ष माना जा सकता है जो सभी केन्द्रीय बलों के लिए मान्य है। किसी ग्रह पर लगने वाला केन्द्रीय बल, केन्द्रीय सूर्य तथा ग्रह को मिलाने वाले सदिश के अनुदिश कार्य करता है। मान लीजिए सूर्य मूल बिन्दु पर है और यह भी मानिए कि ग्रह की स्थिति तथा संवेग को क्रमश: **r** तथा **p** से दर्शाया जाता है, तब m द्रव्यमान के ग्रह द्वारा Δt समय में प्रसर्पित क्षेत्रफल $\Delta \mathbf{A}$ (चित्र 7.2) इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\Delta \mathbf{A} = \tfrac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v} \Delta t) \qquad (7.1)$$

अत:

$$\Delta \mathbf{A} / \Delta t = \tfrac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m, \text{ (चूँकि } \mathbf{v} = \mathbf{p}/m)$$
$$= \mathbf{L} / (2m) \qquad (7.2)$$

यहाँ **v** वेग है तथा **L** कोणीय संवेग है जो (**r** × **p**) के तुल्य है। किसी केन्द्रीय बल के लिए, जो **r** के अनुदिश निर्देशित है, **L** एक नियतांक होता है, जबकि ग्रह परिक्रमा कर रहा होता है। अत: अंतिम समीकरण के अनुसार $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$ एक नियतांक है। यही क्षेत्रफलों का नियम है। गुरुत्वाकर्षण का बल भी केन्द्रीय बल ही है और इसलिए क्षेत्रफलों का नियम न्यूटन के नियमों के इसी लक्षण का पालन/अनुगमन करता है।

उदाहरण 7.1 मान लीजिए किसी ग्रह की उपसौर P पर (चित्र 7.1a) चाल v_P है, तथा सूर्य व ग्रह की दूरी $SP = r_P$ है। $\{r_P, v_P\}$ तथा अपसौर पर इन राशियों के तदनुरूपी मान $\{r_A, v_A\}$ में संबंध स्थापित कीजिए। क्या ग्रह BAC तथा CPB पथ तय करने में समान समय लेगा?

हल कोणीय संवेग का परिमाण P पर है $L_p = m_p r_p v_p$, क्योंकि निरीक्षण द्वारा यह ज्ञात होता है कि $\mathbf{r}_p$ तथा $\mathbf{v}_p$ परस्पर लम्बवत हैं। इसी प्रकार, $L_A = m_p r_A v_A$. तब कोणीय संवेग संरक्षण से

$$m_p r_p v_p = m_p r_A v_A$$

अथवा $$\frac{v_p}{v_A} = \frac{r_A}{r_p}$$

चूँकि $r_A > r_p$, $v_p > v_A$.

दीर्घवृत्त तथा त्रिज्या सदिशों SB एवं SC द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल $SBPC$ की तुलना में अधिक है (चित्र 7.1a)। केप्लर के दूसरे नियम के अनुसार, समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प होते हैं। अत: ग्रह पथ CPB को तय करने की अपेक्षा पथ BAC को तय करने में अधिक समय लेगा। ◀

© NCERT not to be republished

7.3 गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम

एक दंत कथा में लिखा है पेड़ से गिरते हुए सेब का प्रेक्षण करते हुए न्यूटन को गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम तक पहुँचने की प्रेरणा मिली जिससे केप्लर के नियमों तथा पार्थिव गुरुत्वाकर्षण के स्पष्टीकरण का मार्ग प्रशस्त हुआ। न्यूटन ने अपने विवेक के आधार पर यह स्पष्ट अनुभव किया कि R_m त्रिज्या की कक्षा में परिक्रमा करने वाले चन्द्रमा पर पृथ्वी के गुरुत्व के कारण एक अभिकेन्द्र त्वरण आरोपित होता है जिसका परिमाण

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \qquad (7.3)$$

यहाँ V चन्द्रमा की चाल है जो आवर्तकाल T से इस प्रकार संबंधित है, $V = 2\pi R_m / T$। आवर्त काल T का मान लगभग 27.3 दिन है तथा उस समय तक R_m का मान लगभग $3.84\ 10^8$m ज्ञात हो चुका था। यदि हम इन संख्याओं को समीकरण (7.3) में प्रतिस्थापित करें, तो हमें a_m का जो मान प्राप्त होता है, वह पृथ्वी के गुरुत्व बल के कारण उत्पन्न पृथ्वी के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण g के मान से काफी कम होता है। यह स्पष्ट रूप से इस तथ्य को दर्शाता है कि पृथ्वी के गुरुत्व बल का मान दूरी के साथ घट जाता है। यदि हम यह मान लें कि पृथ्वी के कारण गुरुत्वाकर्षण का मान पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है, तो हमें $a_m \propto R_m^{-2}$ और $g \propto R_E^{-2}$ प्राप्त होगा (यहाँ R_E पृथ्वी की त्रिज्या है), जिससे हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} \simeq 3600 \qquad (7.4)$$

जो $g \simeq 9.8\ \text{m s}^{-2}$ तथा समीकरण (7.3) से a_m के मान के साथ मेल खाता है। इस प्रेक्षण ने न्यूटन को नीचे दिए गए गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम को प्रतिपादित करने में मार्गदर्शन दिया :

"इस विश्व में प्रत्येक पिण्ड हर दूसरे पिण्ड को एक बल द्वारा आकर्षित करता है जिसका परिमाण दोनों पिण्डों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।"

यह उद्धरण तत्वत: न्यूटन के प्रसिद्ध शोध प्रबन्ध "प्राकृतिक दर्शन के गणितीय सिद्धांत" (Mathematical Principles of Natural Philosophy) जिसे संक्षेप में प्रिंसिपिया (Principia) कहते हैं, से प्राप्त होता है।

गणितीय रूप में न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम को इस प्रकार कहा जा सकता है : किसी बिंदु द्रव्यमान m_2 पर किसी अन्य बिंदु द्रव्यमान m_1 के कारण बल $\mathbf{F}$ का परिमाण

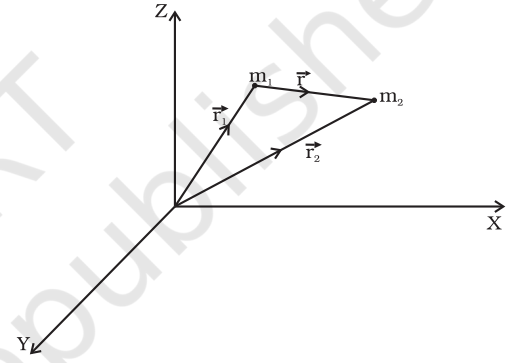
$$|\mathbf{F}| = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \qquad (7.5)$$

सदिश रूप में समीकरण (7.5) को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\mathbf{F} = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \left(-\hat{\mathbf{r}}\right) = -G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$= -G \times \frac{m_1 \times m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}$$

यहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक, $\hat{\mathbf{r}}$ m_1 से m_2 तक एकांक सदिश तथा $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ है जैसा कि चित्र 7.3 में दर्शाया गया है।



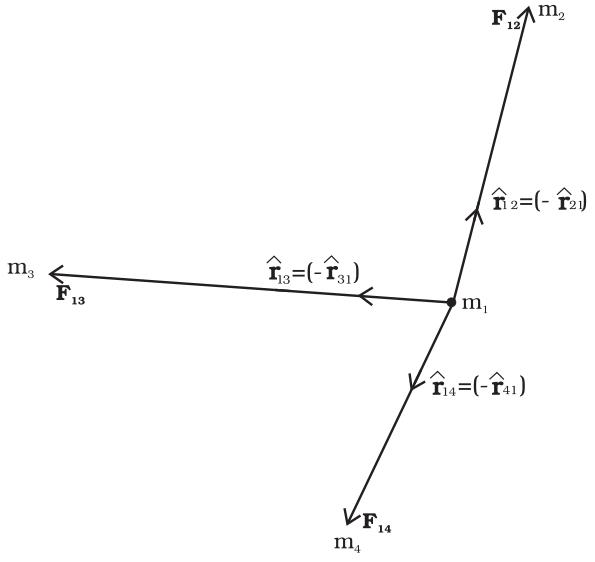
चित्र 7.3 m_2 के कारण m_1 पर गुरुत्वीय बल $\mathbf{r}$ के अनुदिश है, यहाँ $\mathbf{r}$, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ है।

गुरुत्वीय बल आकर्षी बल है, अर्थात् m_2 पर m_1 के कारण लगने वाला बल $\mathbf{F}$, $-\mathbf{r}$ के अनुदिश है। न्यूटन के गति के तीसरे नियम के अनुसार, वास्तव में बिन्दु द्रव्यमान m_1 पर m_2 के कारण बल $-\mathbf{F}$ है। इस प्रकार m_1 पर m_2 के कारण लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल $\mathbf{F}_{12}$ एवं m_2 पर m_1 के कारण लगने वाले बल $\mathbf{F}_{21}$ का परस्पर संबंध है,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

समीकरण (7.5) का अनुप्रयोग, अपने पास उपलब्ध पिण्डों पर कर सकने से पूर्व हमें सावधान रहना होगा, क्योंकि यह नियम बिन्दु द्रव्यमानों से संबंधित है, जबकि हमें विस्तारित पिण्डों, जिनका परिमित आमाप होता है, पर विचार करना है। यदि हमारे पास बिन्दु द्रव्यमानों का कोई संचयन है, तो उनमें से किसी एक पर बल अन्य बिन्दु द्रव्यमानों के कारण गुरुत्वाकर्षण बलों के सदिश योग के बराबर होता है जैसा कि चित्र 7.4 में दर्शाया गया है।

© NCERT not to be republished



चित्र 7.4 *बिन्दु द्रव्यमान m_1 पर बिन्दु द्रव्यमानों m_2, m_3 और m_4 के द्वारा आरोपित कुल गुरुत्वाकर्षण बल इन द्रव्यमानों द्वारा m_1 पर लगाए गए व्यष्टिगत बलों के सदिश योग के बराबर है।*

m_1 पर कुल बल है

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3 m_1}{r_{31}^2}\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4 m_1}{r_{41}^2}\hat{\mathbf{r}}_{41}$$

उदाहरण 7.2 किसी समबाहु त्रिभुज ABC के प्रत्येक शीर्ष पर m kg के तीन समान द्रव्यमान रखे हैं।
(a) इस त्रिभुज के केन्द्रक G पर रखे $2m$ kg के द्रव्यमान पर कितना बल आरोपित हो रहा है?
(b) यदि शीर्ष A पर रखे द्रव्यमान को दो गुना कर दिया जाए, तो कितना बल आरोपित होगा?
AG = BG = CG = 1m लीजिए (देखिए चित्र 7.5)

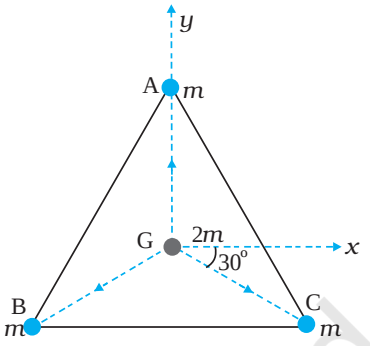
हल (a) धनात्मक x-अक्ष तथा GC के बीच का कोण 30° है और इतना ही कोण ऋणात्मक x-अक्ष तथा GB के बीच बनता है। सदिश संकेत पद्धति में व्यष्टिगत बल इस प्रकार हैं

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm(2m)}{1}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm(2m)}{1}\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm(2m)}{1}\left(+\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right).$$

अध्यारोपण सिद्धांत तथा सदिश योग नियम के अनुसार (2m) पर परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल



चित्र 7.5 *तीन समान द्रव्यमान त्रिभुज ABC के तीन शीर्षों पर स्थित हैं। इसके केंद्रक G पर कोई द्रव्यमान $2m$ रखा गया है।*

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$$

$$\mathbf{F}_R = 2Gm^2\,\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

$$+ 2Gm^2\left(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right) = 0$$

विकल्प के रूप में, सममिति के आधार पर यह अपेक्षा की जा सकती है कि परिणामी बल शून्य होना चाहिए।

(b) यदि शीर्ष A पर द्रव्यमान 2m हो तो,

$$\mathbf{F}^1_{GA} = G.2m.2m\hat{\mathbf{j}} = 4Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}^1_{GB} = \mathbf{F}_{GB} \text{ and } \mathbf{F}^1_{GC} = \mathrm{F}_{GC}$$

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}^1_{-GA} + \mathbf{F}^1_{GB} + \mathbf{F}^1_{GC} = 2.Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$

किसी विस्तारित पिण्ड (जैसे पृथ्वी) तथा बिन्दु द्रव्यमान के बीच गुरुत्वाकर्षण बल के लिए समीकरण (7.5) का सीधे ही अनुप्रयोग नहीं किया जा सकता। विस्तारित पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु द्रव्यमान दिए गए बिन्दु द्रव्यमान पर बल आरोपित करता है तथा इन सभी बलों की दिशा समान नहीं होती। हमें इन बलों का सदिश रीति द्वारा योग करना होता है ताकि विस्तारित पिण्ड के प्रत्येक बिन्दु द्रव्यमान के कारण आरोपित कुल बल प्राप्त हो जाए। ऐसा हम आसानी से कलन (कैलकुलस) के उपयोग द्वारा कर सकते हैं। जब हम ऐसा करते हैं तो हमे दो विशिष्ट प्रकरणों में सरल परिणाम प्राप्त होते हैं

(1) **किसी एकसमान घनत्व के खोखले गोलीय खोल तथा खोल के बाहर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान के बीच आकर्षण बल ठीक-ठाक उतना ही होता है जैसा कि खोल के समस्त द्रव्यमान को उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित मान कर ज्ञात किया जाता है।**

© NCERT not to be republished

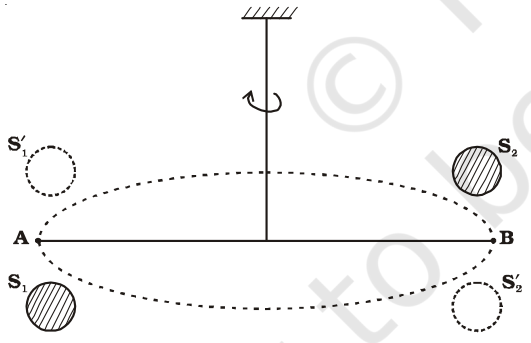
गुणात्मक रूप से इसे इस प्रकार समझा जा सकता है। खोल के विभिन्न क्षेत्रों के कारण गुरुत्वीय बलों के, खोल के केन्द्र को बिन्दु द्रव्यमान से मिलाने वाली रेखा के अनुदिश तथा इसके लंबवत्, दोनों दिशाओं में घटक होते हैं। खोल के सभी क्षेत्रों के बलों के घटकों का योग करते समय इस रेखा के लंबवत् दिशा के घटक निरस्त हो जाते हैं तथा केवल खोल के केन्द्र से बिन्दु द्रव्यमान को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश परिणामी बल बचा रहता है। इस परिणामी बल का परिमाण भी ऊपर वर्णन की गई विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

(2) **एकसमान घनत्व के किसी खोखले गोले के कारण उसके भीतर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान पर आकर्षण बल शून्य होता है।**

गुणात्मक रूप में, हम फिर से इस परिणाम को समझ सकते हैं। गोलीय खोल के विभिन्न क्षेत्र खोल के भीतर स्थित बिन्दु द्रव्यमान को विभिन्न दिशाओं में आकर्षित करते हैं। ये बल परस्पर एक दूसरे को पूर्णतः निरस्त कर देते हैं।

7.4 गुरुत्वीय नियतांक

गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम में प्रयुक्त गुरुत्वीय स्थिरांक G के मान को प्रायोगिक आधार पर ज्ञात किया जा सकता है तथा इस प्रकार के प्रयोग को सर्वप्रथम अंग्रेज वैज्ञानिक हेनरी कैवेन्डिश ने 1797 में किया था। उनके द्वारा उपयोग किए गए उपकरण को व्यवस्था चित्र 7.6 में दर्शाया गया है।



चित्र 7.6 कैवेन्डिश प्रयोग का योजनावत आरेखन। S_1 तथा S_2 दो विशाल गोले हैं (छायांकित दर्शाए गए हैं) जिन्हें A और B पर स्थिति द्रव्यमानों के दोनों ओर रखा जाता है। जब विशाल द्रव्यमानों (बिन्दुकित वृत्तों द्वारा दर्शाए) को दूसरी ओर ले जाते हैं, तो छड़ AB थोड़ा घूर्णन करती है, क्योंकि अब बल आघूर्ण की दिशा व्युत्क्रमित हो जाती है। घूर्णन कोण को प्रयोगों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

छड़ AB के दोनों सिरों पर दो छोटे सीसे के गोले जुड़े होते हैं। इस छड़ को एक पतले तार द्वारा किसी दृढ़ टेक से निलंबित किया जाता है। सीसे के दो विशाल गोलों को चित्र में दर्शाए अनुसार छोटे गोलों के निकट परन्तु विपरीत दिशाओं में लाया जाता है। बड़े गोले चित्र में दर्शाए अनुसार अपने निकट के छोटे गोलों को समान तथा विपरीत बलों से आकर्षित करते हैं। छड़ पर कोई नेट बल नहीं लगता, परन्तु केवल एक बल आघूर्ण कार्य करता है जो स्पष्ट रूप से छड़ की लम्बाई का F-गुना होता है, जबकि यहाँ F विशाल गोले तथा उसके निकट वाले छोटे गोले के बीच परस्पर आकर्षण बल है। इस बल आघूर्ण के कारण, निलंबन तार में तब तक ऐंठन आती है जब तक प्रत्यानयन बल आघूर्ण गुरुत्वीय बल आघूर्ण के बराबर नहीं होता। यदि निलंबन तार का व्यावर्तन कोण θ है, तो प्रत्यानयन बल आघूर्ण θ के अनुक्रमानुपाती तथा $\tau\theta$ के बराबर हुआ, यहाँ τ प्रत्यानयन बल युग्म प्रति एकांक व्यावर्तन कोण है। τ की माप अलग प्रयोग द्वारा की जा सकती है, जैसे कि ज्ञात बल आघूर्ण का अनुप्रयोग करके तथा व्यावर्तन कोण मापकर। गोल गेदों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल उतना ही होता है जितना कि गेदों के द्रव्यमानों को उनके केन्द्रों पर संकेन्द्रित मान कर ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार यदि विशाल गोले तथा उसके निकट के छोटे गोले के केन्द्रों के बीच की दूरी d है, M तथा m इन गोलों के द्रव्यमान हैं, तो बड़े गोले तथा उसके निकट के छोटे गोले के बीच गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \qquad (7.6)$$

यदि छड़ AB की लम्बाई L है, तो F के कारण उत्पन्न बल आघूर्ण F तथा L का गुणनफल होगा। संतुलन के समय यह बल आघूर्ण प्रत्यानयन बल आघूर्ण के बराबर होता है। अतः

$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\,\theta \qquad (7.7)$$

इस प्रकार θ का प्रेक्षण करके इस समीकरण की सहायता से G का मान परिकलित किया जा सकता है।

कैवेन्डिश प्रयोग के बाद G के मापन में परिष्करण हुए तथा अब G का प्रचलित मान इस प्रकार है

$$G = 6.67\text{x}10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \qquad (7.8)$$

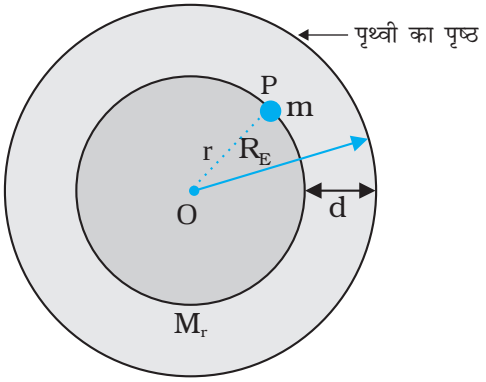
7.5 पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण

पृथ्वी को गोल होने के कारण बहुत से संकेन्द्री गोलीय खोलों का मिलकर बना माना जा सकता है जिनमें सबसे छोटा खोल केन्द्र पर तथा सबसे बड़ा खोल इसके पृष्ठ पर है। पृथ्वी के बाहर का कोई भी बिन्दु स्पष्ट रूप से इन सभी खोलों के बाहर हुआ। इस प्रकार सभी खोल पृथ्वी के बाहर किसी बिन्दु पर इस

© NCERT not to be republished

प्रकार गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करेंगे जैसे कि इन सभी खोलों के द्रव्यमान पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के अनुसार उनके उभयनिष्ठ केन्द्र पर संकेन्द्रित हैं। सभी खोलों के संयोजन का कुल द्रव्यमान पृथ्वी का ही द्रव्यमान हुआ। अतः, पृथ्वी के बाहर किसी बिन्दु पर, गुरुत्वाकर्षण बल को यही मानकर ज्ञात किया जाता है कि पृथ्वी का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है।

पृथ्वी के भीतर स्थित बिन्दुओं के लिए स्थिति भिन्न होती है। इसे चित्र 7.7 में स्पष्ट किया गया है।



चित्र 7.7 M_E पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R_E पृथ्वी की त्रिज्या है, पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे d गहराई पर स्थित किसी खान में कोई द्रव्यमान m रखा है। हम पृथ्वी को गोलतः सममित मानते हैं।

पहले की ही भांति अब फिर पृथ्वी को संकेन्द्री खोलों से मिलकर बनी मानिए और यह विचार कीजिए कि पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर कोई द्रव्यमान m रखा गया है। बिन्दु P, r त्रिज्या के गोले के बाहर है। उन सभी खोलों के लिए जिनकी त्रिज्या r से अधिक है, बिन्दु P उनके भीतर है। अतः पिछले भाग में वर्णित परिणाम के अनुसार ये सभी खोल P पर रखे द्रव्यमानों पर कोई गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित नहीं करते। त्रिज्या $\leq r$ के खोल मिलकर r त्रिज्या का गोला निर्मित करते हैं तथा बिन्दु P इस गोले के पृष्ठ पर स्थित है। अतः r त्रिज्या का यह छोटा गोला P पर स्थित द्रव्यमान m पर इस प्रकार गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करता है जैसे इसका समस्त द्रव्यमान M_r इसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है। इस प्रकार P पर स्थित द्रव्यमान m पर आरोपित बल का परिमाण

$$F = \frac{Gm\,(M_r)}{r^2} \qquad (7.9)$$

हम यह मानते हैं कि समस्त पृथ्वी का घनत्व एकसमान है अतः इसका द्रव्यमान $M_E = \frac{4\pi}{3} R^3_E \rho$ है। यहाँ R_E पृथ्वी की त्रिज्या तथा ρ इसका घनत्व है। इसके विपरीत r त्रिज्या के गोले का द्रव्यमान $\frac{4\pi}{3}\rho r^3$ होता है। इसलिए

$$F = G\,m\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = G\,m\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{G\,m\,M_E}{R_E^{\,3}}\,r \qquad (7.10)$$

यदि द्रव्यमान m पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित है, तो $r = R_E$ तथा समीकरण (7.10) से इस पर गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\,\frac{M_E m}{R_E^2} \qquad (7.11)$$

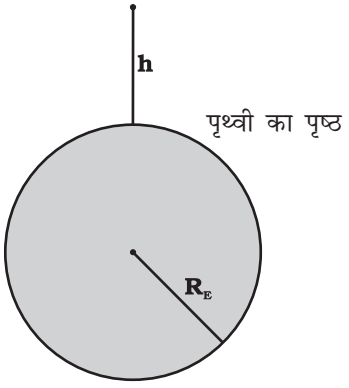
यहाँ M_E तथा R_E क्रमशः पृथ्वी का द्रव्यमान तथा त्रिज्या है। द्रव्यमान m द्वारा अनुभव किया जाने वाला त्वरण जिसे प्रायः प्रतीक g द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा बल F से संबंध $F = mg$ द्वारा संबंधित होता है। इस प्रकार

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \qquad (7.12)$$

g सहज ही मापन योग्य है। R_E एक ज्ञात राशि है। कैवेन्डिश-प्रयोग द्वारा अथवा दूसरी विधि से प्राप्त G की माप g तथा R_E के ज्ञान को सम्मिलित करने पर M_E का आकलन समीकरण (7.12) की सहायता से किया जा सकता है। यही कारण है कि कैवेन्डिश के बारे में एक प्रचलित कथन यह है कि "कैवेन्डिश ने पृथ्वी को तोला"।

7.6 पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे तथा ऊपर गुरुत्वीय त्वरण

चित्र में दर्शाए अनुसार पृथ्वी के पृष्ठ से ऊँचाई h पर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान m पर विचार कीजिए (चित्र 7.8(a))।



(a)

चित्र 7.8(a) पृथ्वी के पृष्ठ से किसी ऊँचाई h पर g

© NCERT not to be republished

पृथ्वी की त्रिज्या को R_E द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। चूंकि यह बिन्दु पृथ्वी से बाहर है, इसकी पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $(R_E + h)$ है। यदि बिन्दु द्रव्यमान m पर बल के परिमाण को $F(h)$ द्वारा निर्दिष्ट किया गया है, तो समीकरण (7.5) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \qquad (7.13)$$

बिन्दु द्रव्यमान द्वारा अनुभव किया जाने वाला त्वरण $F(h)/m \equiv g(h)$ तथा इस प्रकार हमें प्राप्त होता है

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \qquad (7.14)$$

स्पष्ट रूप से यह मान पृथ्वी के पृष्ठ पर g के मान से कम है : $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ जबकि $h << R_E$, हम समीकरण (7.14) के दक्षिण पक्ष को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$g(h) = \frac{GM}{R_E^2(1 + h/R_E)^2} = g(1 + h/R_E)^{-2}$$

$\frac{h}{R_E} << 1$ के लिए द्विपद व्यंजक का उपयोग करने पर

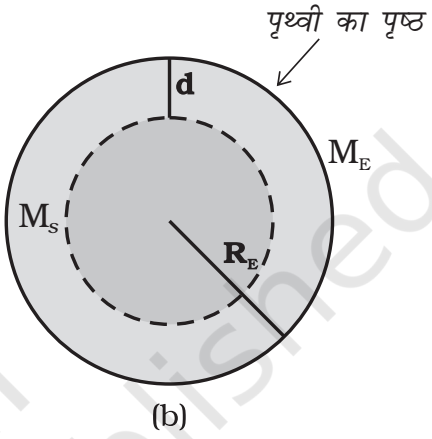
$$g(h) \cong g\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \qquad (7.15)$$

इस प्रकार समीकरण (7.15) से हमें प्राप्त होता है कि कम ऊँचाई h के लिए g का मान गुणक $(1 - 2h/R_E)$ द्वारा घटता है।

अब हम पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे गहराई d पर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान m के विषय में विचार करते हैं। ऐसा होने पर चित्र 7.8(b) में दर्शाए अनुसार इस द्रव्यमान की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $(R_E - d)$ त्रिज्या के छोटे गोले तथा d मोटाई के एक गोलीय खोल से मिलकर बनी मान सकते हैं। तब द्रव्यमान m पर d मोटाई की बाह्य खोल के कारण आरोपित बल पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के कारण शून्य होगा। जहाँ तक $(R_E - d)$ त्रिज्या के छोटे गोले के कारण आरोपित बल का संबंध है तो पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के अनुसार, इस छोटे गोले के कारण बल इस प्रकार लगेगा जैसे कि छोटे गोले का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है। यदि छोटे गोले का द्रव्यमान M_s है, तो

$$M_s / M_E = (R_E - d)^3 / R_E^3 \qquad (7.16)$$

क्योंकि, किसी गोले का द्रव्यमान उसकी त्रिज्या के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।



(b)

चित्र 7.8 (b) किसी गहराई d पर g इस प्रकरण में केवल $(R_E - d)$ त्रिज्या का छोटा गोला ही g के लिए योगदान देता है।

अतः बिन्दु द्रव्यमान पर आरोपित बल

$$F(d) = G M_s m / (R_E - d)^2 \qquad (7.17)$$

ऊपर से M_s का मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$F(d) = G M_E m (R_E - d) / R_E^3 \qquad (7.18)$$

और इस प्रकार गहराई d पर गुरुत्वीय त्वरण,

$$g(d) = \frac{F(d)}{m}$$

अर्थात् $g(d) = \frac{F(d)}{m} = \frac{GM_E}{R_E^3}(R_E - d)$

$$= g\frac{R_E - d}{R_E} = g(1 - d/R_E) \qquad (7.19)$$

इस प्रकार जैसे-जैसे हम पृथ्वी से नीचे अधिक गहराई तक जाते हैं, गुरुत्वीय त्वरण का मान गुणक $(1 - d/R_E)$ द्वारा घटता जाता है। पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण से संबंधित यह एक आश्चर्यजनक तथ्य है कि पृष्ठ पर इसका मान अधिकतम है तथा चाहे हम पृष्ठ से ऊपर जाएँ अथवा नीचे यह मान सदैव घटता है।

© NCERT not to be republished

7.7 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

पहले हमने स्थितिज ऊर्जा की धारणा की चर्चा किसी वस्तु की दी हुई स्थिति पर उसमें संचित ऊर्जा के रूप में दी थी। यदि किसी कण की स्थिति उस पर कार्यरत बल के कारण परिवर्तित हो जाती है तो उस कण की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन आरोपित बल द्वारा उस कण पर किए गए कार्य के परिमाण के ठीक-ठीक बराबर होगा। जैसा कि हम पहले चर्चा कर चुके हैं जिन बलों द्वारा किया गया कार्य चले गए पथों पर निर्भर नहीं करता, वे बल **संरक्षी बल** होते हैं तथा केवल ऐसे बलों के लिए ही किसी पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा की कोई सार्थकता होती है।

गुरुत्व बल एक संरक्षी बल है तथा हम किसी पिण्ड में इस बल के कारण उत्पन्न स्थितिज ऊर्जा, जिसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं, का परिकलन कर सकते हैं। पहले पृथ्वी के पृष्ठ के निकट के उन बिन्दुओं पर विचार कीजिए जिनकी पृष्ठ से दूरियाँ पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में बहुत कम हैं। जैसा कि हम देख चुके हैं ऐसे प्रकरणों में गुरुत्वीय बल व्यावहारिक दृष्टि से नियत रहता है तथा यह mg होता है तथा इसकी दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है। यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से h_1 ऊँचाई पर स्थित किसी बिन्दु तथा इसी बिन्दु के ठीक ऊर्ध्वाधर ऊपर h_2 ऊँचाई पर स्थित किसी अन्य बिन्दु पर विचार करें तो m द्रव्यमान के किसी कण को पहली स्थिति से दूसरी स्थिति तक ऊपर उठाने में किया गया कार्य, जिसे W_{12} द्वारा निर्दिष्ट करते हैं,

$$W_{12} = \text{बल} \quad \text{विस्थापन} = mg\,(h_2 - h_1)\,. \tag{7.20}$$

यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से h ऊँचाई के बिन्दु से कोई स्थितिज ऊर्जा $W(h)$ संबद्ध करें जो इस प्रकार है कि

$$W(h) = mg\,h + W_o \tag{7.21}$$

(यहाँ W_o = नियतांक) ;

तब यह स्पष्ट है कि

$$W_{12} = W(h_2) - W(h_1) \tag{7.22}$$

कण को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य ठीक इस कण की अंतिम तथा आरंभिक स्थितियों की स्थितिज ऊर्जाओं के अंतर के बराबर है। ध्यान दीजिए कि समीकरण (7.22) में W_o निरस्त हो जाता है। समीकरण (7.21) में $h = 0$ रखने पर हमें $W(h = 0) = W_o$ प्राप्त होता है। $h = 0$ का अर्थ यह है कि दोनों बिन्दु पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित हैं। इस प्रकार W_o कण की पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थितिज ऊर्जा हुई।

यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से यादृच्छिक दूरियों के बिन्दुओं पर विचार करें तो उपरोक्त परिणाम प्रामाणिक नहीं होते क्योंकि तब यह मान्यता कि गुरुत्वाकर्षण बल mg अपरिवर्तित रहता है वैध नहीं है। तथापि, अपनी अब तक की चर्चा के आधार पर हम जानते हैं कि पृथ्वी के बाहर के किसी बिन्दु पर स्थित किसी कण पर लगे गुरुत्वीय बल की दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर निदेशित होती है तथा इस बल का परिमाण है,

$$F = \frac{G M_E m}{r^2} \tag{7.23}$$

यहाँ M_E = पृथ्वी का द्रव्यमान, m = कण का द्रव्यमान तथा r इस कण की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी है। यदि हम किसी कण को $r = r_1$ से $r = r_2$ तक (जबकि $r_2 > r_1$) ऊर्ध्वाधर पथ के अनुदिश ऊपर उठाने में किए गए कार्य का परिकलन करें तो हमें समीकरण (7.20) के स्थान पर यह संबंध प्राप्त होता है

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G M_E m}{r^2}\,dr$$

$$= -G M_E m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{7.24}$$

इस प्रकार समीकरण (7.21) के बजाय, हम किसी दूरी r पर स्थितिज ऊर्जा $W(r)$ को इस प्रकार संबद्ध कर सकते हैं :

$$W(r) = -\frac{G M_E m}{r} + W_1\,, \tag{7.25}$$

जो कि $r > R$ के लिए वैध है।

अत: एक बार फिर $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ । अंतिम समीकरण में $r = \infty$ रखने पर हमें $W(r = \infty) = W_1$ प्राप्त होता है। इस प्रकार W_1 अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा हुई। हमें यह ध्यान देना चाहिए कि समीकरणों (7.22) तथा (7.24) के अनुसार केवल दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जाओं में अंतर की ही कोई निश्चित सार्थकता है। हम प्रचलित मान्य परिपाटी के अनुसार W_1 को शून्य मान लेते हैं जिसके कारण *किसी बिन्दु पर किसी कण को स्थितिज ऊर्जा उस कण को अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में किए जाने वाले कार्य के ठीक बराबर होती है।*

हमने, किसी बिन्दु पर किसी कण की स्थितिज ऊर्जा का परिकलन उस कण पर लगे पृथ्वी के गुरुत्वीय बलों के कारण, जो कि कण के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है, किया है। पृथ्वी के गुरुत्वीय बल के कारण किसी *बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव* की परिभाषा *"उस बिन्दु पर किसी कण के एकांक द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा"* के रूप में की जाती है।

© NCERT not to be republished

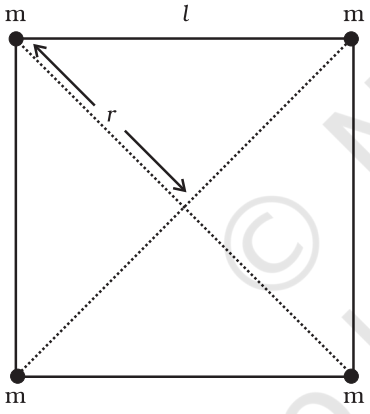
पूर्व विवेचन के आधार पर, हम जानते हैं कि m_1 एवं m_2 द्रव्यमान के एक दूसरे से r दूरी पर रखे दो कणों की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है,

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r} \quad \text{(यदि हम } r = \infty \text{ पर } V = 0 \text{ लें)}$$

यह भी ध्यान दिया जाना चाहिए कि कणों के किसी सभी वियुक्त निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा, अवयवों/कणों के सभी संभावित युग्मों की ऊर्जाओं (उपरोक्त समीकरण द्वारा परिकलित) के योग के बराबर होती है। यह अध्यारोपण सिद्धांत के एक अनुप्रयोग का उदाहरण है।

उदाहरण 7.3 l भुजा के किसी वर्ग के शीर्षों पर स्थित चार कणों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। वर्ग के केन्द्र पर विभव भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर मान लीजिए प्रत्येक कण का द्रव्यमान m है, तथा वर्ग की भुजा l है। हमारे पास l दूरी वाले 4 द्रव्यमान युगल तथा $\sqrt{2}\,l$ दूरी वाले 2 द्रव्यमान युगल हैं। अतः निकाय की स्थितिज ऊर्जा



चित्र 7.9

$$W(r) = -4\frac{G m^2}{l} - 2\frac{G m^2}{\sqrt{2}\,l}$$

$$= -\frac{2 G m^2}{l}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{G m^2}{l}$$

वर्ग के केन्द्र $\left(r = \sqrt{2}\,l/2\right)$ पर गुरुत्वीय विभव,

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{G m}{l}$$

7.8 पलायन चाल

यदि हम अपने हाथों से किसी पत्थर को फेंकते हैं, तो हम यह पाते हैं कि वह फिर वापस पृथ्वी पर गिर जाता है। निस्संदेह मशीनों का उपयोग करके हम किसी पिण्ड को अधिकाधिक तीव्रता तथा प्रारंभिक वेगों से शूट कर सकते हैं जिसके कारण पिण्ड अधिकाधिक ऊँचाइयों तक पहुँच जाते हैं। तब स्वाभाविक रूप से हमारे मस्तिष्क में यह विचार उत्पन्न होता है "क्या हम किसी पिण्ड को इतने अधिक आरंभिक चाल से ऊपर फेंक सकते हैं कि वह फिर पृथ्वी पर वापस न गिरे?"

इस प्रश्न का उत्तर देने में ऊर्जा संरक्षण नियम हमारी सहायता करता है। मान लीजिए फेंका गया पिण्ड अनन्त तक पहुंचता है और वहाँ उसकी चाल V_f है। किसी पिण्ड की ऊर्जा स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाओं का योग होती है। पहले की ही भांति W_1 पिण्ड की अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को निर्दिष्ट करता है। तब प्रक्षेप्य की अनन्त पर कुल ऊर्जा

$$E(\text{अनन्त}) = W_1 + \frac{m V_f^2}{2} \qquad (7.26)$$

यदि पिण्ड को पृथ्वी (R_E = पृथ्वी की त्रिज्या) के केन्द्र से $(h + R_E)$ ऊँचाई पर स्थित किसी बिन्दु से आरंभ में चाल V_i से फेंका गया था, तो इस पिण्ड की आरंभिक ऊर्जा थी

$$E(h + R_E) = \frac{1}{2} m V_i^2 - \frac{G m M_E}{(h + R_E)} + W_1 \qquad (7.27)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार समीकरण (7.26) तथा (7.27) बराबर होने चाहिए। अतः

$$\frac{m V_i^2}{2} - \frac{G m M_E}{(h + R_E)} = \frac{m V_f^2}{2} \qquad (7.28)$$

समीकरण (7.28) का दक्षिण पक्ष एक धनात्मक राशि है जिसका न्यूनतम मान शून्य है, अतः वाम पक्ष भी ऐसा ही होना चाहिए। अतः कोई पिण्ड अनन्त तक पहुंच सकता है जब V_i इतना हो कि

$$\frac{m V_i^2}{2} - \frac{G m M_E}{(h + R_E)} \geq 0 \qquad (7.29)$$

V_i का न्यूनतम मान उस प्रकरण के तदनुरूपी है जिसमें समीकरण (7.29) का वाम पक्ष शून्य के बराबर है। इस प्रकार, किसी पिण्ड को अनन्त तक पहुंचने के लिए (अर्थात् पृथ्वी से पलायन के लिए) आवश्यक न्यूनतम चाल इस संबंध के तदनुरूपी होती है

© NCERT not to be republished

$$\frac{1}{2}m\left(V_i^2\right)_{\text{न्यून}} = \frac{GmM_E}{h+R_E} \qquad (7.30)$$

यदि पिण्ड को पृथ्वी के पृष्ठ से छोड़ा जाता है, तो $h = 0$ और हमें प्राप्त होता है

$$(V_i)_{\text{न्यून}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \qquad (7.31)$$

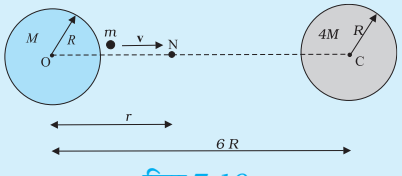
संबंध $g = GM_E / R_E^2$ का उपयोग करने पर हमें निम्न मान प्राप्त होता है

$$(V_i)_{\text{न्यून}} = \sqrt{2gR_E} \qquad (7.32)$$

समीकरण (7.32) में g और R_E के आंकिक मान रखने पर हमें $(V_i)_{\text{न्यून}} \approx 11.2\ \text{km/s}$ प्राप्त होता है। उसे **पलायन चाल** कहते हैं। कभी-कभी लापरवाही में इसे हम पलायन वेग भी कह देते हैं।

समीकरण (7.32) का उपयोग भली भांति समान रूप से चन्द्रमा से फेंके जाने वाले पिण्डों के लिए भी किया जा सकता है, ऐसा करते समय हम g के स्थान पर चन्द्रमा के पृष्ठ पर चन्द्रमा के गुरुत्वीय त्वरण तथा R_E के स्थान पर चन्द्रमा की त्रिज्या का मान रखते हैं। इन दोनों ही राशियों के चन्द्रमा के लिए मान पृथ्वी पर इनके मानों से कम हैं तथा चन्द्रमा के लिए पलायन चाल का मान $2.3\ \text{km/s}$ प्राप्त होता है। यह मान पृथ्वी की तुलना में लगभग $1/5$ गुना है। यही कारण है कि चन्द्रमा पर कोई वातावरण नहीं है। यदि चन्द्रमा के पृष्ठ पर गैसीय अणु बनें, तो उनकी चाल इस पलायन चाल से अधिक होगी तथा वे चन्द्रमा के गुरुत्वीय खिंचाव के बाहर पलायन कर जाएंगे।

उदाहरण 7.4 समान त्रिज्या R परन्तु M तथा $4M$ द्रव्यमान के दो एकसमान ठोस गोले इस प्रकार रखे हैं कि इनके केन्द्रों के बीच पृथकन (चित्र 7.10 में दर्शाए अनुसार) $6R$ है। दोनों गोले स्थिर रखे गए हैं। m द्रव्यमान के किसी प्रक्षेप्य को M द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ से $4M$ द्रव्यमान के गोले के केन्द्र की ओर सीधे प्रक्षेपित किया जाता है। प्रक्षेप्य की उस न्यूनतम चाल के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए जिससे फेंके जाने पर वह दूसरे गोले के पृष्ठ पर पहुंच जाए।



चित्र 7.10

हल प्रक्षेप्य पर दो गोलों के परस्पर विरोधी गुरुत्वीय बल कार्य करते हैं। उदासीन बिन्दु N (चित्र 7.10 देखिए) की परिभाषा एक ऐसे बिन्दु (स्थिति) के रूप में की जाती है जहाँ दो बल यथार्थतः एक दूसरे को निरस्त करते हैं। यदि ON = r है, तो

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{4GMm}{(6R-r)^2}$$
$$(6R - r)^2 = 4r^2$$
$$6R - r = \pm 2r$$
$$r = 2R \quad \text{या} \quad -6R$$

इस उदाहरण में उदासीन बिन्दु $r = -6R$ हमसे संबंधित नहीं है। इस प्रकार, ON = $r = 2R$। कण को उस चाल से प्रक्षेपित करना पर्याप्त है जो उसे N तक पहुंचने योग्य बना दे। इसके पश्चात् वहाँ पहुंचने पर $4M$ द्रव्यमान के गोले का गुरुत्वीय बल कण को अपनी ओर खींचने के लिए पर्याप्त होगा। M द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ पर यांत्रिक ऊर्जा

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{4GMm}{5R}$$

उदासीन बिन्दु N पर कण की चाल शून्य मान की ओर प्रवृत्त होती है। अतः N पर यांत्रिक ऊर्जा शुद्ध रूप से स्थितिज ऊर्जा होती है। अतः

$$E_N = -\frac{GMm}{2R} - \frac{4GMm}{4R}$$

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

अथवा

$$v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}$$

यहाँ यह ध्यान देने का विषय है कि N पर प्रक्षेप्य की चाल शून्य है, परन्तु जब यह $4M$ द्रव्यमान के गोले से टकराता तब इसकी चाल शून्येत्तर होती है। जिस चाल से प्रक्षेप्य $4M$ द्रव्यमान के गोले से टकराता है, उसे ज्ञात करना छात्रों के अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है।

7.9 भू उपग्रह

भू उपग्रह वह पिण्ड है जो पृथ्वी के परितः परिक्रमण करते हैं। इनकी गतियां, ग्रहों की सूर्य के परितः गतियों के बहुत समान

© NCERT not to be republished

होती हैं, अत: केप्लर के ग्रहीय गति नियम इन पर भी समान रूप से लागू होते हैं। विशेष बात यह है कि इन उपग्रहों की पृथ्वी के परित: कक्षाएं वृत्ताकार अथवा दीर्घवृत्ताकार है। पृथ्वी का एकमात्र प्राकृतिक उपग्रह चन्द्रमा है जिसकी लगभग वृत्ताकार कक्षा है और लगभग 27.3 दिन का परिक्रमण काल है जो चन्द्रमा के अपनी अक्ष के परित: घूर्णन काल के लगभग समान है। वर्ष 1957 के पश्चात् विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी में उन्नति के फलस्वरूप भारत सहित कई देश दूर संचार, भू भौतिकी, मौसम विज्ञान के क्षेत्र में व्यावहारिक उपयोगों के लिए मानव-निर्मित भू उपग्रहों को कक्षाओं में प्रमोचित करने योग्य बन गए हैं।

अब हम पृथ्वी के केन्द्र से $(R_E + h)$ दूरी पर स्थित वृत्तीय कक्षा में गतिमान उपग्रह पर विचार करेंगे, यहाँ R_E = पृथ्वी की त्रिज्या है। यदि उपग्रह का द्रव्यमान m तथा V इसकी चाल है, तो इस कक्षा के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल

$$F(\text{अभिकेन्द्र}) = \frac{mV^2}{(R_E + h)} \qquad (7.33)$$

तथा यह बल कक्षा के केन्द्र की ओर निदेशित है। अभिकेन्द्र बल गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है, जिसका मान

$$F(\text{गुरुत्वाकर्षण}) = \frac{G m M_E}{(R_E + h)^2} \qquad (7.34)$$

यहाँ M_E पृथ्वी का द्रव्यमान है।

समीकरणों (7.33) तथा (7.34) के दक्षिण पक्षों को समीकृत तथा m का निरसन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$V^2 = \frac{G M_E}{(R_E + h)} \qquad (7.35)$$

इस प्रकार h के बढ़ने पर V घटता है। समीकरण (7.35) के अनुसार जब $h = 0$ है, तो उपग्रह की चाल V है

$$V^2 \quad (h = 0) = GM_E / R_E = gR_E \qquad (7.36)$$

यहाँ हमने संबंध $g = G M_E / R_E^2$ का उपयोग किया है। प्रत्येक कक्षा में उपग्रह $2\pi(R_E + h)$ दूरी चाल V से तय करता है। अत: इसका आवर्तकाल T है

$$T = \frac{2\pi(R_E + h)}{V} = \frac{2\pi(R_E + h)^{3/2}}{\sqrt{G M_E}} \qquad (7.37)$$

यहाँ हमने समीकरण (7.35) से V का मान प्रतिस्थापित किया है। समीकरण (7.37) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$T^2 = k\ (R_E + h)^3 \ (\text{जहाँ } k = 4\pi^2 / G M_E), \qquad (7.38)$$

और यही केप्लर का आवर्तकालों का नियम है जिसका अनुप्रयोग पृथ्वी के परित: उपग्रहों की गतियों के लिए किया जाता है।

उन भू उपग्रहों के लिए, जो पृथ्वी के पृष्ठ के अति निकट होते हैं, h के मान को पृथ्वी की त्रिज्या R_E की तुलना में समीकरण (7.38) में नगण्य मान लेते हैं। अत: इस प्रकार के भू उपग्रहों के लिए T ही T_o होता है, यहाँ

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \qquad (7.39)$$

यदि हम समीकरण (7.39) में g तथा R_E के आंकिक मानों ($g \simeq 9.8\ \text{ms}^{-2}$ तथा $R_E = 6400\ \text{km.}$) को प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{6.4 \times 10^6}{9.8}}\ \text{s}$$

जो लगभग 85 मिनट के बराबर हैं।

उत्तर 7.5 मंगल ग्रह के फोबोस तथा डेल्मोस नामक दो चन्द्रमा हैं। (i) यदि फोबोस का आवर्तकाल 7 घंटे 39 मिनट तथा कक्षीय त्रिज्या 9.4×10^3 km है तो मंगल का द्रव्यमान परिकलित कीजिए। (ii) यह मानते हुए कि पृथ्वी तथा मंगल सूर्य के परित: वृत्तीय कक्षाओं में परिक्रमण कर रहे हैं तथा मंगल की कक्षा की त्रिज्या पृथ्वी की कक्षा की त्रिज्या की 1.52 गुनी है तो मंगल-वर्ष की अवधि दिनों में क्या है?

हल (i) यहाँ पर समीकरण (7.38) का उपयोग पृथ्वी के द्रव्यमान M_E को मंगल के द्रव्यमान M_m से प्रतिस्थापित करके करते हैं

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m} R^3$$

$$\text{M}_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times 10^{-11} \times (459 \times 60)^2}$$

$$\text{M}_m = \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times (4.59 \times 6)^2 \times 10^{-5}}$$

$$= 6.48 \times 10^{23}\ \text{kg}$$

(ii) केप्लर के आवर्तकालों के नियम का उपयोग करने पर

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

© NCERT not to be republished

यहाँ R_{MS} एवं R_{ES} क्रमशः मंगल-सूर्य तथा पृथ्वी-सूर्य के बीच की दूरियां हैं।

$$\therefore \quad T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$$
$$= 684 \text{ दिन}$$

ध्यान देने योग्य तथ्य यह है कि बुध, मंगल तथा प्लूटो के अतिरिक्त सभी ग्रहों की कक्षाएं लगभग वृत्ताकार हैं। उदाहरण के लिए, हमारी पृथ्वी के अर्ध लघु अक्ष तथा अर्ध दीर्घ अक्ष का अनुपात $b/a = 0.99986$ है।

उत्तर 7.6 पृथ्वी को तोलना : आपको निम्नलिखित आंकड़े दिए गए हैं: $g = 9.81\ \text{m s}^{-2}$, $R_E = 6.37 \times 10^6$m, पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी $R = 3.84 \times 10^8$ m पृथ्वी के परितः चन्द्रमा के परिक्रमण का आवर्त काल = 27.3 दिन। दो भिन्न विधियों द्वारा पृथ्वी का द्रव्यमान प्राप्त कीजिए।

हल ***(i)* पहली विधि :** समीकरण (7.12) से

$$M_E = \frac{g R_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81 \times \left(6.37 \times 10^6\right)^2}{6.67 \times 10^{-11}}$$
$$= 5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

***(ii)* दूसरी विधि :** चन्द्रमा पृथ्वी का उपग्रह है। केप्लर के आवर्तकालों के नियम की व्युत्पत्ति में (समीकरण (7.38) देखिए)]

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G M_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 3.14 \times (3.84)^3 \times 10^{24}}{6.67 \times 10^{-11} \times (27.3 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$
$$= 6.02 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

दोनों विधियों द्वारा लगभग समान उत्तर प्राप्त होते हैं, जिनमें 1% से भी कम का अंतर है। ◀

उदाहरण 7.7 समीकरण (7.38) में स्थिरांक k को दिनों तथा किलोमीटरों में व्यक्त कीजिए। $k = 10^{-13}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$ है। चन्द्रमा पृथ्वी से 3.84×10^5km दूर है। चन्द्रमा के परिक्रमण के आवर्तकाल को दिनों में प्राप्त कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$$k = 10^{-13}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

$$= 10^{-13}\left[\frac{1}{(24 \times 60 \times 60)^2}\text{d}^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\ \text{km}^3}\right]$$

$$= 1.33 \times 10^{-14}\ \text{d}^2\ \text{km}^{-3}$$

समीकरणों (7.38) तथा k के दिए गए मान का उपयोग करने पर चन्द्रमा के परिक्रमण का आवर्तकाल

$$T^2 = (1.33 \times 10^{-14})(3.84 \times 10^5)^3$$
$$T = 27.3\ \text{d}$$ ◀

ध्यान दीजिए, यदि हम (R_E+h) को दीर्घवृत्त के अर्ध दीर्घ अक्ष (a) द्वारा प्रतिस्थापित करें तो समीकरण (7.38) को दीर्घवृत्तीय कक्षाओं पर भी लागू किया जा सकता है, तब पृथ्वी इस दीर्घवृत्त की एक नाभि पर होगी।

7.10 कक्षा में गतिशील उपग्रह की ऊर्जा

समीकरण (7.35) का उपयोग करने पर वृत्ताकार कक्षा में चाल v से गतिशील उपग्रह की गतिज ऊर्जा

$$K.E = \frac{1}{2} m v^2 ;$$

v^2 का मान समीकरण (7.35) से रखने पर

$$= \frac{G m M_E}{2(R_E + h)}, \qquad (7.40)$$

ऐसा मानें कि अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य है तब पृथ्वी के केन्द्र से (R_e+h) दूरी पर उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा

$$P.E = -\frac{G m M_E}{(R_E + h)} \qquad (7.41)$$

K.E धनात्मक है जबकि P.E ऋणात्मक होती है। तथापि परिमाण में $\text{K.E} = \frac{1}{2}$ P.E, अतः उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E = K.E + P.E = -\frac{G m M_E}{2(R_E + h)} \qquad (7.42)$$

इस प्रकार वृत्ताकार कक्षा में गतिशील किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है, स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक तथा परिमाण में धनात्मक गतिज ऊर्जा का दो गुना होता है।

जब किसी उपग्रह की कक्षा दीर्घवृत्तीय होती है तो उसकी K.E तथा P.E दोनों ही पथ के हर बिन्दु पर भिन्न होती हैं। वृत्तीय कक्षा के प्रकरण की भांति ही उपग्रह की कुल ऊर्जा नियत रहती है तथा यह ऋणात्मक होती है और यही हम अपेक्षा

© NCERT not to be republished

भी करते हैं क्योंकि जैसा हम पहले चर्चा कर चुके हैं कि यदि कुल ऊर्जा धनात्मक अथवा शून्य हो तो पिण्ड अनन्त की ओर पलायन कर जाता है। उपग्रह सदैव पृथ्वी से परिमित दूरियों पर परिक्रमण करते हैं, अतः उनकी ऊर्जाएँ धनात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकतीं।

उदाहरण 7.8 400 kg द्रव्यमान का कोई उपग्रह पृथ्वी के परित $2R_E$ त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। इसे $4R_E$ की वृत्तीय कक्षा में स्थानांतरित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा परिकलित कीजिए। इसकी गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा में कितने परिवर्तन होंगे?

हल आरंभ में

$$E_i = -\frac{G M_E m}{4 R_E}$$

जबकि, अंत में

$$E_f = -\frac{G M_E m}{8 R_E}$$

कुल ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$= \frac{G M_E m}{8 R_E} = \left(\frac{G M_E}{R_E^2}\right)\frac{m R_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g m R_E}{8} = \frac{9.81 \times 400 \times 6.37 \times 10^6}{8} = 3.13 \times 10^9 \text{ J}$$

गतिज ऊर्जा घट जाती है और यह ΔE की अनुहारक है, अर्थात् $\Delta K = K_f - K_i = -3.13 \times 10^9$ J ।

स्थितिज ऊर्जा में होने वाला परिवर्तन कुल ऊर्जा का दो गुना है, अर्थात्

$$\Delta V = V_f - V_i = -6.25 \times 10^9 \text{ J}$$

सारांश

1. न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम यह उल्लेख करता है कि दूरी r से पृथकन वाले m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के किन्ही दो कणों के बीच लगे गुरुत्वीय आकर्षण बल का परिमाण

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

यहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक है जिसका मान 6.672×10^{-11} N m^2 kg^{-2} है।

2. यदि हमें M_1, M_2, $M_3 \ldots M_n$ आदि बहुत से कणों के कारण m द्रव्यमान के किसी कण पर लगे परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल को ज्ञात करना है, तो इसके लिए हम अध्यारोपण सिद्धान्त का उपयोग करते हैं। मान लीजिए गुरुत्वाकर्षण नियम द्वारा M_1, M_2,....M_n में प्रत्येक द्वारा m पर आरोपित व्यष्टिगत बल $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,....$\mathbf{F}_n$ हैं। तब बलों के अध्यारोपण सिद्धान्त के अनुसार प्रत्येक बल अन्य पिण्डों द्वारा प्रभावित हुए बिना स्वतंत्रतापूर्वक कार्य करता है। तब इनका परिणामी बल $\mathbf{F}_R$ सदिशों के योग द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\mathbf{F_R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \ldots + \mathbf{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i}$$

यहाँ प्रतीक 'Σ' संकलन को दर्शाता है।

3. केप्लर के ग्रहगति नियम यह स्पष्ट करते हैं कि
   (a) सभी ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गति करते हैं तथा सूर्य इस कक्षा की किसी एक नाभि पर स्थित होता है।
   (b) सूर्य से किसी ग्रह तक खींचा गया त्रिज्य सदिश समान समय अन्तरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प करता है। यह इस तथ्य का पालन करता है कि ग्रहों पर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल केन्द्रीय हैं। अतः कोणीय संवेग अपरिवर्तित रहता है।
   (c) किसी ग्रह के कक्षीय आवर्तकाल का वर्ग उसकी दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्ध दीर्घ अक्ष के घन के अनुक्रमानुपाती होता है। सूर्य के परितः R की वृत्ताकार कक्षा में परिक्रमण कर रहे ग्रह के आवर्तकाल T तथा त्रिज्या R में यह संबंध होता है

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M_s}\right) R^3$$

© NCERT not to be republished

यहाँ M_s सूर्य का द्रव्यमान है। अधिकांश ग्रहों की सूर्य के परितः लगभग वृत्तीय कक्षाएँ हैं। यदि R का प्रतिस्थापन ग्रह की दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्ध दीर्घ अक्ष a से कर दें तो उपरोक्त नियम दीर्घवृत्तीय कक्षाओं पर समान रूप से लागू होता है।

4. गुरुत्वीय त्वरण

(a) पृथ्वी के पृष्ठ से h ऊँचाई पर

$$g(h) = \frac{G M_E}{(R_E + h)^2}$$

$$\approx \frac{G M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad h << R_E$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad \text{यहाँ} \quad g(0) = \frac{G M_E}{R_E^2}$$

(b) पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे d गहराई पर

$$g(d) = \frac{G M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{d}{R_E}\right) = g(0)\left(1 - \frac{d}{R_E}\right)$$

5. गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी बल है। इसलिए किसी स्थितिज ऊर्जा फलन को परिभाषित किया जा सकता है। r पृथकन के किन्ही दो कणों से संबद्ध गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

यहाँ $r \to \infty$ पर V को शून्य माना। कणों के किसी निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा उन कणों के सभी युगलों की ऊर्जाओं का योग होता है जिसमें प्रत्येक युगल का निरूपण ऊपर व्यक्त सूत्र के पदों में किया जाता है। इसका निर्धारण अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुगमन द्वारा किया गया है।

6. यदि किसी वियुक्त निकाय में m द्रव्यमान का कोई कण किसी भारी पिण्ड, जिसका द्रव्यमान M है, के निकट v चाल से गतिमान है, तो उस कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

अर्थात् कुल यांत्रिक ऊर्जा गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं का योग है। कुल ऊर्जा गति का स्थिरांक होती है।

7. यदि M के परितः a त्रिज्या की कक्षा में m गतिशील है, जबकि $M >> m$, तो निकाय की कुल ऊर्जा

$$E = -\frac{G M m}{2a}$$

यह उपरोक्त बिन्दु 5 में दी गयी स्थितिज ऊर्जा में यादृच्छिक स्थिरांक के चयन के अनुसार है। किसी भी परिबद्ध निकाय, अर्थात्, ऐसा निकाय जिसमें कक्षा बन्द हो जैसे दीर्घवृत्तीय कक्षा, की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है। गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाएँ हैं

$$K = \frac{G M m}{2a}$$

$$V = -\frac{G M m}{a}$$

8. पृथ्वी के पृष्ठ से पलायन चाल

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_E}{R_E}} = \sqrt{2 g R_E}$$

इसका मान 11.2 km s^{-1} है।

9. यदि कोई कण किसी एकसमान गोलीय खोल अथवा गोलीय सममित भीतरी द्रव्यमान वितरण के ठोस गोले के बाहर है, तो गोला कण को इस प्रकार आकर्षित करता है जैसे कि उस गोले अथवा खोल का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित हो।

© NCERT not to be republished

10. यदि कोई कण किसी एकसमान गोलीय खोल के भीतर है, तो उस कण पर लगा गुरुत्वीय बल शून्य है। यदि कोई कण किसी संभागी ठोस गोले के भीतर है, तो कण पर लगा बल गोले के केन्द्र की ओर होता है। यह बल कण के अंतस्थ गोलीय द्रव्यमान द्वारा आरोपित किया जाता है।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
गुरुत्वीय स्थिरांक	G	$[M^{-1} L^{3} T^{-2}]$	$N\ m^2\ kg^{-2}$	6.67×10^{-11}
गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा	$V(r)$	$[M\ L^{-2}T^{-2}]$	J	$-\frac{GMm}{r}$ (अदिश)
गुरुत्वीय विभव	$U(r)$	$[L^{-2}T^{-2}]$	$J\ kg^{-1}$	$-\frac{GM}{r}$ (अदिश)
गुरुत्वीय तीव्रता	**E** अथवा **g**	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ (सदिश)

विचारणीय विषय

1. किसी पिण्ड की किसी अन्य पिण्ड के गुरुत्वीय प्रभाव के अन्तर्गत गति का अध्ययन करते समय निम्नलिखित राशियाँ संरक्षित रहती हैं :
   (a) कोणीय संवेग,
   (b) कुल यांत्रिक ऊर्जा
   रैखिक संवेग का संरक्षण **नहीं** होता।
2. कोणीय संवेग संरक्षण केप्लर के द्वितीय नियम की ओर उन्मुख कराता है। तथापि यह गुरुत्वाकर्षण के व्युत्क्रम वर्ग नियम के लिए विशिष्ट नहीं है। यह किसी भी केन्द्रीय बल पर लागू होता है।
3. केप्लर के तीसरे नियम, $T^2 = K_S R^3$ में स्थिरांक K_S वृत्तीय कक्षाओं में गति करने वाले प्रत्येक ग्रह के लिए समान होता है। यह ग्रहों के अनुसार परिवर्तित नहीं होता। पृथ्वी की परिक्रमा करने वाले उपग्रहों पर भी यही टिप्पणी लागू होती है। [(समीकरण (7.38)]
4. अन्तरिक्ष उपग्रहों में अन्तरिक्ष यात्री भारहीनता अनुभव करते हैं। इसका कारण यह नहीं है कि अंतरिक्ष की उस अवस्थिति में गुरुत्वाकर्षण बल कम है। वरन इसका कारण यह है कि अन्तरिक्ष यात्री तथा उपग्रह दोनों ही पृथ्वी की ओर स्वंतत्रतापूर्वक गिरते हैं।
5. दूरी R के पृथकन वाले दो बिन्दुओं से संबद्ध गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा
   $$V = -\frac{G\,m_1\,m_2}{r} + \text{स्थिरांक}$$
   यहाँ स्थिरांक को कुछ भी मान दिया जा सकता है। इसे शून्य मानना सरलतम चयन है। इस चयन के अनुसार
   $$V = -\frac{G\,m_1\,m_2}{r}$$
   इस चयन से यह अंतर्निहित है कि जब $r \to \infty$ है तो $V \to 0$ होता है। गुरुत्वीय ऊर्जा के शून्य होने की अवस्थिति का चयन स्थितिज ऊर्जा में यादृच्छिक स्थिरांक के चयन के समान ही है। ध्यान दीजिए, इस स्थिरांक के चयन से गुरुत्वीय बल परिवर्तित नहीं होता।
6. किसी पिण्ड की कुल यांत्रिक ऊर्जा इसकी गतिज ऊर्जा (जो सदैव धनात्मक होती है) तथा स्थितिज ऊर्जा का योग होती है। अनन्त के सापेक्ष (अर्थात्, यदि हम मान लें कि पिण्ड की अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा शून्य है), किसी पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होती है। किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है।

© NCERT not to be republished

7. स्थितिज ऊर्जा के लिए सामान्यत: दिखाई देने वाला व्यंजक mgh, वास्तव में, ऊपर बिन्दु 6 के अन्तर्गत स्पष्ट किए अनुसार गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जाओं के अन्तर का सन्निकट मान होता है।
8. यद्यपि दो बिन्दुओं के बीच गुरुत्वाकर्षण बल केन्द्रीय है, तथापि दो परिमित दृढ़ पिण्डों के बीच लगने वाले बल का इन दोनों द्रव्यमानों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होना आवश्यक नहीं है। किसी गोलीय सममित पिण्ड के लिए उस पिण्ड से बाहर स्थित किसी कण पर लगा बल इस प्रकार लगता है जैसे कि पिण्ड का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित हो और इसीलिए यह बल केन्द्रीय होता है।
9. गोलीय खोल के भीतर किसी कण बिन्दु पर गुरुत्वीय बल शून्य होता है। तथापि (किसी धात्विक खोल के विपरीत, जो वैद्युत बलों से परिरक्षण करता है) यह खोल अपने से बाहर स्थित दूसरे पिण्डों को गुरुत्वीय बलों के आरोपित होने से अपने भीतर स्थित कणों का परिरक्षण नहीं करता। *गुरुत्वीय परिरक्षण संभव नहीं* है।

अभ्यास

7.1 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए:

(a) आप किसी आवेश का वैद्युत बलों से परिरक्षण उस आवेश को किसी खोखले चालक के भीतर रखकर कर सकते हैं। क्या आप किसी पिण्ड का परिरक्षण, निकट में रखे पदार्थ के गुरुत्वीय प्रभाव से, उसे खोखले गोले में रखकर अथवा किसी अन्य साधनों द्वारा कर सकते हैं?

(b) पृथ्वी के परित: परिक्रमण करने वाले छोटे अन्तरिक्षयान में बैठा कोई अन्तरिक्ष यात्री गुरुत्व बल का संसूचन नहीं कर सकता। यदि पृथ्वी के परित: परिक्रमण करने वाला अन्तरिक्ष स्टेशन आकार में बड़ा है, तब क्या वह गुरुत्व बल के संसूचन की आशा कर सकता है?

(c) यदि आप पृथ्वी पर सूर्य के कारण गुरुत्वीय बल की तुलना पृथ्वी पर चन्द्रमा के कारण गुरुत्व बल से करें, तो आप यह पाएंगे कि सूर्य का खिंचाव चन्द्रमा के खिचाव की तुलना में अधिक है (इसकी जाँच आप स्वयं आगामी अभ्यासों में दिए गए आंकड़ों की सहायता से कर सकते हैं।) तथापि चन्द्रमा के खिंचाव का ज्वारीय प्रभाव सूर्य के ज्वारीय प्रभाव से अधिक है। क्यों?

7.2 सही विकल्प का चयन कीजिए :

(a) बढ़ती तुंगता के साथ गुरुत्वीय त्वरण बढ़ता/घटता है।

(b) बढ़ती गहराई के साथ (पृथ्वी को एकसमान घनत्व को गोला मानकर) गुरुत्वीय त्वरण बढ़ता/घटता है।

(c) गुरुत्चीय त्वरण पृथ्वी के द्रव्यमान/पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

(d) पृथ्वी के केन्द्र से r_2 तथा r_1 दूरियों के दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जा-अन्तर के लिए सूत्र $-GMm(1/r_2 - 1/r_1)$ सूत्र $mg(r_2 - r_1)$ से अधिक/कम यथार्थ है।

7.3 मान लीजिए एक ऐसा ग्रह है जो सूर्य के परित: पृथ्वी की तुलना में दो गुनी चाल से गति करता है, तब पृथ्वी की कक्षा की तुलना में इसका कक्षीय आमाप क्या है?

7.4 बृहस्पति के एक उपग्रह, आयो (Io), की कक्षीय अवधि 1.769 दिन तथा कक्षा की त्रिज्या 4.22×10^8 m है। यह दर्शाइए कि बृहस्पति का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान का लगभग 1/1000 गुना है।

7.5 मान लीजिए कि हमारी आकाशगंगा में एक सौर द्रव्यमान के 2.5×10^{11} तारे हैं। मंदाकिनीय केन्द्र से 50,000 ly दूरी पर स्थित कोई तारा अपनी एक परिक्रमा पूरी करने में कितना समय लेगा? आकाशगंगा का व्यास 10^5 ly लीजिए।

7.6 सही विकल्प का चयन कीजिए :

(a) यदि स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनन्त पर है, तो कक्षा में परिक्रमा करते किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक है।

(b) कक्षा में परिक्रमा करने वाले किसी उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने के लिए आवश्यक ऊर्जा समान ऊंचाई (जितनी उपग्रह की है) के किसी स्थिर पिण्ड को पृथ्वी के प्रभाव से बाहर प्रक्षेपित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा से अधिक/कम होती है।

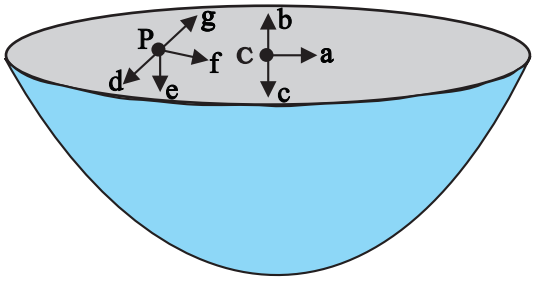
7.7 क्या किसी पिण्ड की पृथ्वी से पलायन चाल (a) पिण्ड के द्रव्यमान, (b) प्रक्षेपण बिन्दु की अवस्थिति, (c) प्रक्षेपण की दिशा, (d) पिण्ड के प्रमोचन की अवस्थिति की ऊंचाई पर निर्भर करती है?

7.8 कोई धूमकेतु सूर्य की परिक्रमा अत्यधिक दीर्घवृत्तीय कक्षा में कर रहा है। क्या अपनी कक्षा में धूमकेतु की शुरू से अन्त तक (a) रैखिक चाल, (b) कोणीय चाल, (c) कोणीय संवेग, (d) गतिज ऊर्जा, (e) स्थितिज ऊर्जा (f) कुल ऊर्जा नियत रहती है। सूर्य के अति निकट आने पर धूमकेतु के द्रव्यमान में ह्रास को नगण्य मानिये।

© NCERT not to be republished

7.9 निम्नलिखित में से कौन से लक्षण अन्तरिक्ष में अन्तरिक्ष यात्री के लिए दुख:दायी हो सकते हैं? (a) पैरों में सूजन, (b) चेहरे पर सूजन, (c) सिरदर्द, (d) दिक्‌विन्यास समस्या।

7.10 एकसमान द्रव्यमान घनत्व की अर्धगोलीय खोलों द्वारा परिभाषित ढोल के पृष्ठ के केन्द्र पर गुरुत्वीय तीव्रता की दिशा [देखिए चित्र 7.11] (i) a, (ii) b, (iii) c, (iv) 0 में किस तीर द्वारा दर्शायी जाएगी?



चित्र. 7.11

7.11 उपरोक्त समस्या में किसी यादृच्छिक बिन्दु P पर गुरुत्वीय तीव्रता किस तीर (i) d, (ii) e, (iii) f, (iv) g द्वारा व्यक्त की जाएगी?

7.12 पृथ्वी से किसी रॉकेट को सूर्य की ओर दागा गया है। पृथ्वी के केन्द्र से किस दूरी पर रॉकेट पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है? सूर्य का द्रव्यमान = 2×10^{30} kg, पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24} kg। अन्य ग्रहों आदि के प्रभावों की उपेक्षा कीजिए (कक्षीय त्रिज्या = 1.5×10^{11} m)।

7.13 आप सूर्य को कैसे तोलेंगे, अर्थात् उसके द्रव्यमान का आकलन कैसे करेंगे? सूर्य के परित: पृथ्वी की कक्षा की औसत त्रिज्या 1.5×10^8 km है।

7.14 एक शनि वर्ष एक पृथ्वी-वर्ष का 29.5 गुना है। यदि पृथ्वी सूर्य से 1.5×10^8 km दूरी पर है, तो शनि सूर्य से कितनी दूरी पर है?

7.15 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 63 N है। पृथ्वी की त्रिज्या की आधी ऊंचाई पर पृथ्वी के कारण इस वस्तु पर गुरुत्वीय बल कितना है?

7.16 यह मानते हुए कि पृथ्वी एकसमान घनत्व का एक गोला है तथा इसके पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 250 N है, यह ज्ञात कीजिए कि पृथ्वी के केन्द्र की ओर आधी दूरी पर इस वस्तु का भार क्या होगा?

7.17 पृथ्वी के पृष्ठ से उर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर कोई रॉकेट 5 km s^{-1} की चाल से दागा जाता है। पृथ्वी पर वापस लौटने से पूर्व यह रॉकेट पृथ्वी से कितनी दूरी तक जाएगा? पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24} kg; पृथ्वी की माध्य त्रिज्या = 6.4×10^6 m तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}।

7.18 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी प्रक्षेप्य की पलायन चाल 11.2 km s^{-1} है। किसी वस्तु को इस चाल की तीन गुनी चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। पृथ्वी से अत्यधिक दूर जाने पर इस वस्तु की चाल क्या होगी? सूर्य तथा अन्य ग्रहों की उपस्थिति की उपेक्षा कीजिए।

7.19 कोई उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से 400 km ऊंचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा है। इस उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने में कितनी ऊर्जा खर्च होगी? उपग्रह का द्रव्यमान = 200 kg; पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24} kg; पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 m तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}।

7.20 दो तारे, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान (2×10^{30} kg) के बराबर है, एक दूसरे की ओर सम्मुख टक्कर के लिए आ रहे हैं। जब वे 10^9 km दूरी पर हैं तब इनकी चाल उपेक्षणीय हैं। ये तारे किस चाल से टकराएंगे? प्रत्येक तारे की त्रिज्या 10^4 km है। यह मानिए कि टकराने के पूर्व तक तारों में कोई विरूपण नहीं होता (G के ज्ञात मान का उपयोग कीजिए)।

7.21 दो भारी गोले जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 100 kg त्रिज्या 0.10 m है किसी क्षैतिज मेज पर एक दूसरे से 1.0 m दूरी पर स्थित हैं। दोनों गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर गुरुत्वीय बल तथा विभव क्या है? क्या इस बिन्दु पर रखा कोई पिण्ड संतुलन में होगा? यदि हां, तो यह संतुलन स्थायी होगा अथवा अस्थायी?

© NCERT not to be republished

परिशिष्ट

परिशिष्ट A 1
ग्रीक वर्णमाला

एल्फा	A	α	न्यू	N	ν
बीटा	B	β	ज़ाई	Ξ	ξ
गामा	Γ	γ	ओमीक्रॉन	O	o
डेल्टा	Δ	δ	पाई	Π	π
एप्सिलॉन	E	ε	ऱ्हो	P	ρ
जीटा	Z	ζ	सिग्मा	Σ	σ
ईटा	H	η	टॉअ	T	τ
थीटा	Θ	θ	अपसिलॉन	Y	υ
आयोटा	I	ι	फाइ	Φ	ϕ, φ
कप्पा	K	κ	काइ	X	χ
लैम्डा	Λ	λ	साइ	Ψ	ψ
म्यू	M	μ	ओमेगा	Ω	ω

परिशिष्ट A 2
सामान्य SI पूर्वलग्न तथा अपवर्त्यों और अपवर्तकों के प्रतीक

अपवर्त्य			अपवर्तक		
गुणक	**पूर्वलग्न**	**प्रतीक**	**गुणक**	**पूर्वलग्न**	**प्रतीक**
10^{18}	एक्जा	E	10^{-18}	एटो	a
10^{15}	पेटा	P	10^{-15}	फैम्टो	f
10^{12}	टेरा	T	10^{-12}	पीको	p
10^{9}	गीगा	G	10^{-9}	नैनो	n
10^{6}	मेगा	M	10^{-6}	माइक्रो	μ
10^{3}	किलो	k	10^{-3}	मिली	m
10^{2}	हेक्टो	h	10^{-2}	सेंटी	c
10^{1}	डेका	da	10^{-1}	डेसि	d

© NCERT not to be republished

परिशिष्ट A 3

कुछ महत्त्वपूर्ण नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
निर्वात में प्रकाश की चाल	c	$2.9979 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
इलेक्ट्रॉन का आवेश	e	$1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
गुरुत्वीय नियतांक	G	$6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
प्लांक नियतांक	h	$6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
बोल्ट्ज़मान नियतांक	k	$1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
आवोगाद्रो संख्या	N_A	$6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
सार्वत्रिक गैस नियतांक	R	$8.314\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान	m_e	$9.110 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
न्यूट्रॉन का द्रव्यमान	m_n	$1.675 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
प्रोटॉन का द्रव्यमान	m_p	$1.673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
इलेक्ट्रॉन-आवेश व द्रव्यमान अनुपात	e/m_e	$1.759 \times 10^{11}\ \mathrm{C/kg}$
फैराडे नियतांक	F	$9.648 \times 10^{4}\ \mathrm{C/mol}$
रिडबर्ग नियतांक	R	$1.097 \times 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$
बोहर त्रिज्या	a_0	$5.292 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}$
स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियतांक	σ	$5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
वीन नियतांक	b	$2.898 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$
मुक्त आकाश का परावैद्युतांक	ε_0 $1/4\pi\,\varepsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$ $8.987 \times 10^{9}\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$
मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\,m\,A^{-1}}$ $\cong 1.257 \times 10^{-6}\ \mathrm{Wb\,A^{-1}m^{-1}}$

अन्य उपयोगी नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक	J	$4.186\ \mathrm{J\ cal^{-1}}$
मानक वायुमंडलीय दाब	1 atm	$1.013 \times 10^{5}\ \mathrm{Pa}$
परम शून्य	0 K	–273.15 °C
इलेक्ट्रॉन वोल्ट	1 eV	$1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$
परमाण्वीय द्रव्यमान मात्रक	1 u	$1.661 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
इलेक्ट्रॉन विराम ऊर्जा	mc^2	0.511 MeV
1u का ऊर्जा तुल्यांक	$u\,c^2$	931.5 MeV
आदर्श गैस का आयतन (0°C तथा 1 atm)	V	$22.4\ \mathrm{L\ mol^{-1}}$
गुरुत्वीय त्वरण (समुद्र तल, विषुवत वृत्त पर)	g	$9.78049\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

© NCERT not to be republished

परिशिष्ट A4

रूपांतरण गुणक

सरलता के लिए रूपांतरण गुणकों को समीकरण के रूप में लिखा गया है ।

लंबाई

1 km = 0.6215 mi

1mi = 1.609 km

1m = 1.0936 yd = 3.281 ft = 39.37 in

1 in = 2.54 cm

1 ft = 12 in = 30.48 cm

1 yd = 3ft = 91.44 cm

1 (light year) प्रकाश वर्ष = 1 ly = 9.461×10^{15}m

1 Å = 0.1nm

क्षेत्रफल

1 $m^2 = 10^4$ cm^2

1km^2 = 0.3861 mi^2 = 247.1 एकड़ (acres)

1 in^2 = 6.4516 cm^2

1ft^2 = $9.29 \times 10^{-2}$$m^2$

1 m^2 = 10.76 ft^2

1 एकड़ (acre) = 43,560 ft^2

1 mi^2 = 460 (acres) एकड़ = 2.590 km^2

आयतन

1m^3 = $10^6$$cm^3$

1 L = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3

1 gal = 3.786 L

1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3

1 in^3 = 16.39 cm^3

1ft^3 = 1728 in^3 = 28.32 L = 2.832×10^4 cm^3

चाल

1 km h^{-1} = 0.2778 m s^{-1} = 0.6215 mi h^{-1}

1mi h^{-1} = 0.4470 m s^{-1} = 1.609 km h^{-1}

1mi h^{-1} = 1.467 ft s^{-1}

चुंबकीय क्षेत्र

1 G = 10^{-4} T

1 T = 1 Wb m^{-2} = 10^4 G

कोण तथा कोणीय चाल

π rad = 180°

1 rad = 57.30°

1° = 1.745×10^{-2} rad

1 rev min^{-1} = 0.1047 rad s^{-1}

1 rad s^{-1} = 9.549 rev min^{-1}

द्रव्यमान

1 kg = 1000 g

1 टन (tonne) = 1000 kg = 1 Mg

1 u = 1.6606×10^{-27} kg

1 kg = 6.022×10^{26} u

1 स्लग (slug) = 14.59 kg

1 kg = 6.852×10^{-2} स्लग (slug)

1 u = 931.50 MeV/c^2

घनत्व

1 g cm^{-3} = 1000 kg m^{-3} = 1 kg L^{-1}

बल

1 N = 0.2248 lbf = 10^5 dyn

1 lbf = 4.4482 N

1 kgf = 2.2046 lbf

समय

1 h = 60 min = 3.6 ks

1 d = 24 h = 1440 min = 86.4 ks

1y = 365.24 d = 31.56 Ms

दाब

1 Pa = 1 N m^{-2}

1 bar = 100 kPa

1 atm = 101.325 kPa = 1.01325 bar

1atm = 14.7 lbf/in^2 = 760 mm Hg

= 29.9 in Hg = 33.8 ft H_2O

1 lbf in^{-2} = 6.895 kPa

© NCERT not to be republished

1 torr = 1mm Hg = 133.32 Pa

ऊर्जा

1 kW h = 3.6 MJ

1 cal = 4.186 J

1ft lbf = 1.356 J = 1.286×10^{-3} Btu

1 L atm = 101.325 J

1 L atm = 24.217 cal

1 Btu = 778 ft lb = 252 cal = 1054.35 J

1 eV = 1.602×10^{-19}J

1 u c^2 = 931.50 MeV

1 erg = 10^{-7}J

शक्ति

1 अश्वशक्ति (horse power, hp) = 550 ft lbf/s

= 745.7 W

1 Btu min^{-1} = 17.58 W

1 W = 1.341×10^{-3} hp

= 0.7376 ft lbf/s

ऊष्मा चालकता

1 W m^{-1} K^{-1} = 6.938 Btu in/hft^2 ^oF

1 Btu in/hft^2 ^oF = 0.1441 W/m K

परिशिष्ट A 5

गणितीय सूत्र

ज्यामिति

r त्रिज्या का वृत्त : परिधि $= 2\pi r$; क्षेत्रफल $= \pi r^2$

r त्रिज्या का गोला : क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$; आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

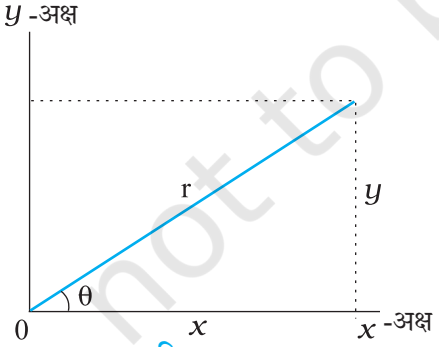
r त्रिज्या तथा h ऊँचाई का लंब वृत्तीय शंकु :
क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; आयतन $= \pi r^2 h$

a आधार तथा h शीर्षलंब का त्रिभुज : क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} a h$

द्विघाती सूत्र

यदि $ax^2 + bx + c = 0$ है, तब $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

कोण θ के त्रिकोणमितीय फलन



चित्र A 5.1

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \frac{x}{r}$

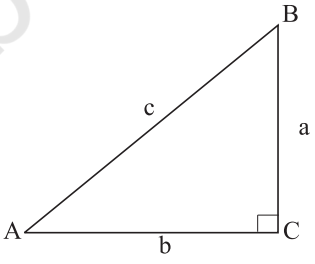
$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \frac{x}{y}$

$\sec\theta = \frac{r}{x}$ $\quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$

पाइथागोरीय प्रमेय

इस समकोण त्रिभुज में,

$a^2 + b^2 = c^2$



चित्र A 5.2

त्रिभुज

A, B, C कोण हैं,

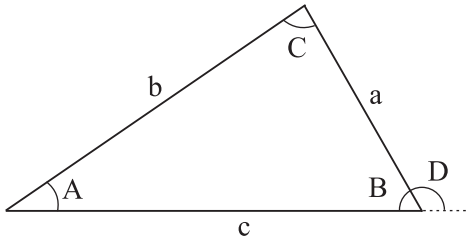
a, b, c सम्मुख भुजाएँ हैं,

कोण A + B + C = 180°

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

बहिष्कोण $D = A + C$



चित्र A 5.3

© NCERT not to be republished

गणितीय चिह्न एवं प्रतीक

$=$ बराबर

$\cong$ सन्निकटतः बराबर

$\sim$ परिमाण की कोटि है

$\neq$ बराबर नहीं है

$\equiv$ के सर्वसम है, इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

$>$ अधिक है ($>>$ बहुत अधिक है)

$<$ कम है ($<<$ बहुत कम है)

$\geq$ अधिक है अथवा बराबर है (अथवा, कम नहीं है)

$\leq$ कम है अथवा बराबर है (अथवा, अधिक नहीं है)

$\pm$ धन अथवा ऋण

$\propto$ समानुपाती है

$\sum$ का योग

$\bar{x}$ अथवा $\langle x \rangle$ अथवा x_{av}, x का औसत मान

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$= 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\ \tan\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

द्विपद प्रमेय

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

चरघातांकी प्रसरण

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

लघुगणकीय प्रसरण

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots \quad (|x| < 1)$$

त्रिकोणमितीय प्रसरण
(θ रेडियनों में)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\ldots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} - \ldots\ldots$$

सदिशों का गुणनफल

मान लीजिए $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ x-, y- तथा z- दिशाओं में एकांक सदिश हैं, तो

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1,\ \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0,\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

कोई सदिश $\mathbf{a}$ जिसके x-, y- तथा z-अक्ष के अनुदिश घटक a_x, a_y तथा a_z हैं, उन्हें इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

मान लीजिए $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ स्वेच्छ सदिश हैं, जिनके परिमाण a, b तथा c हैं, तब

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$

$(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (s कोई अदिश है)

मान लीजिए $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ के बीच के दो कोणों में θ लघुतर कोण है, तब

© NCERT not to be republished

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$

परिशिष्ट A 6

A 6.1 SI मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त कुछ SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक	
	नाम	प्रतीक
क्षेत्रफल	वर्गमीटर	m^2
आयतन	घनमीटर	m^3
चाल, वेग	मीटर प्रति सेकंड	m/s या $m\ s^{-1}$
कोणीय वेग	रेडियन प्रति सेकंड	rad/s या $rad\ s^{-1}$
त्वरण	मीटर प्रतिवर्ग सेकंड	m/s^2 या $m\ s^{-2}$
कोणीय त्वरण	रेडियन प्रतिवर्ग सेकंड	rad/s^2 या $rad\ s^{-2}$
तरंग संख्या	प्रति मीटर	m^{-1}
घनत्व, द्रव्यमान घनत्व	किलोग्राम प्रति घनमीटर	kg/m^3 या $kg\ m^{-3}$
विद्युत् धारा घनत्व	ऐम्पियर प्रति वर्गमीटर	A/m^2 या $A\ m^{-2}$
चुंबकीय क्षेत्र की तीव्रता, चुंबकीय तीव्रता, चुंबकीय आघूर्ण घनत्व	ऐम्पियर प्रति मीटर	A/m या $A\ m^{-1}$
सांद्रता (पदार्थ की मात्रा की)	मोल प्रति घनमीटर	mol/m^3 या $mol\ m^{-3}$
विशिष्ट आयतन	घन मीटर प्रति किलोग्राम	m^3/kg या $m^3\ kg^{-1}$
ज्योति-तीव्रता	कैंडेला प्रति वर्गमीटर	cd/m^2 या $cd\ m^{-2}$
शुद्धगतिक श्यानता	वर्गमीटर प्रति सेकंड	m^2/s या $m^2\ s^{-1}$
संवेग	किलोग्राम मीटर प्रति सेकंड	kg m/s या $kg\ m\ s^{-1}$
जड़त्व आघूर्ण	किलोग्राम वर्गमीटर	$kg\ m^2$
परिभ्रमण त्रिज्या	मीटर	m
रेखीय/क्षेत्रीय (पृष्ठीय)/आयतन प्रसरणीयता	प्रति केल्विन	K^{-1}
प्रवाह दर	घनमीटर प्रति सेकंड	m^3/s या $m^3\ s^{-1}$

© NCERT not to be republished

A 6.2 विशेष नाम वाले SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक			
	नाम	प्रतीक	अन्य मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
आवृत्ति	हर्ट्ज	Hz	—	s^{-1}
बल	न्यूटन	N	—	kg m/s^2 या kg m s^{-2}
दाब, प्रतिबल	पास्कल	Pa	N/m^2 या N m^{-2}	kg $m^{-1}s^{-2}$ या kg/s^2m
कार्य, ऊर्जा, ऊष्मा की मात्रा	जूल	J	N m	kg m^2/s^2 या kg m^2 s^{-2}
शक्ति, विकिरण फलक्स	वाट	W	J/s या J s^{-1}	kg m^2/s^3 या kg m^2s^{-3}
विद्युत आवेश	कूलॉम	C	—	A s
विद्युत विभव, विभवान्तर, विद्युतवाहक बल	वोल्ट	V	W/A या W A^{-1}	kg m^2/s^3A या kg $m^2s^{-3}A^{-1}$
धारिता	फैरड	F	C/V या C V^{-1}	A^2s^4/kg m^2 या kg^{-1} $m^{-2}s^4A^2$
विद्युत प्रतिरोध	ओम	Ω	V/A या VA^{-1}	kg m^2/s^3A^2 या kg m^2 $s^{-3}A^{-2}$
विद्युत चालकता	सीमेन्स	S	A/V या VA^{-1}	s^3A^2/kg m^2 या $kg^{-1}m^{-2}$ s^3 A^2
चुंबकीय अभिवाह	वेबर	Wb	V s या (J/A या JA^{-1})	kg m^2/s^2A या kg m^2 $s^{-2}A^{-1}$
चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय अभिवाह घनत्व, चुंबकीय प्रेरण	टेस्ला	T	Wb/m^2 या Wb m^{-2}	kg/s^2A या kg $s^{-2}A^{-1}$
प्रेरकत्व	हेनरी	H	Wb /A या Wb A^{-1}	kg m^2/s^2A^2 या kg m^2 s^{-2} A^{-2}
ज्योति फलक्स, दीप्त शक्ति	ल्यूमेन	lm	—	cd/sr या cd sr^{-1}
प्रदीप्त घनत्व	लक्स	lx	lm/m^2 या lm m^{-2}	cd/sr m^2 या m^{-2} cd sr^{-1}
सक्रियता (रेडियो न्यूक्लाइड/रेडियोएक्टिव स्रोत की)	बेकेरल	Bq	—	s^{-1}
अवशोषित मात्रा, अवशोषित मात्रा सूचकांक	ग्रे	Gy	J/kg या J kg^{-1}	m^2/s^2 या m^2 s^{-2}

© NCERT not to be republished

A 6.3 विशेष नाम वाले SI मात्रकों के पदों में व्यक्त SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक		
	नाम	प्रतीक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
चुंबकीय आघूर्ण	जूल प्रति टेस्ला	J T^{-1}	m^2 A
द्विध्रुव आघूर्ण	कूलॉम मीटर	C m	m A s
गतिक श्यानता	पायसल अथवा पास्कल सेकंड अथवा न्यूटन सेकंड प्रति वर्ग मीटर	Pl या Pa s या N s m^{-2}	kg m^{-1} s^{-1}
युग्म, बल आघूर्ण	न्यूटन मीटर	Nm	kg m^2 s^{-1}
पृष्ठ तनाव	न्यूटन प्रति मीटर	N/m या N m^{-1}	kg s^{-2}
शक्ति घनत्व, किरणीत मान, ऊष्मीय फ्लक्स घनत्व	वाट प्रति वर्ग मीटर	W/m^2	kg s^{-3}
ऊष्मा धारिता, एन्ट्रॉपी	जूल प्रति केल्विन	J/K	kg m^2 s^{-2} K^{-1}
विशिष्ट ऊष्मा, विशिष्ट एन्ट्रॉपी	जूल प्रति किलोग्राम केल्विन	J/kg K	m^2 s^{-2} K^{-1}
विशिष्ट ऊर्जा, गुप्त ऊष्मा	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या J kg^{-1}	m^2 s^{-2}
विकिरण तीव्रता	वाट प्रति स्टिरेडियन	W/sr या W sr^{-1}	kg m^2 s^{-3} sr^{-1}
ऊष्मीय चालकता	वाट प्रति मीटर केल्विन	W/m K या W $m^{-1}K^{-1}$	kg m s^{-3} K^{-1}
ऊर्जा घनत्व	जूल प्रति घन मीटर	J/m^3 या J m^{-3}	kg m^{-1} s^{-2}
विद्युत क्षेत्र तीव्रता	वोल्ट प्रति मीटर	V/m या V m^{-1}	kg m s^3A^{-1}
विद्युत आवेश घनत्व	कूलॉम प्रति घन मीटर	C/m^3 या C m^{-3}	m^{-3} s A
विद्युत फ्लक्स घनत्व	कूलॉम प्रति वर्ग मीटर	C/m^2 या C m^{-2}	m^{-2} s A
परावैद्युतांक	फैरड प्रति मीटर	F/m या F m^{-1}	$kg^{-1}m^{-3}$ s^4A^2
चुंबकशीलता	हेनरी प्रति मीटर	H/m या H m^{-1}	kg m s^{-2} A^{-2}
मोलर ऊर्जा	जूल प्रति मोल	J/mol या J mol^{-1}	kg m^2 s^{-2} mol^{-1}
कोणीय संवेग, प्लांक नियतांक	जूल सेकंड	J s	kg m^2 s^{-1}
मोलर एन्ट्रॉपी, मोलर ऊष्मा धारिता	जूल प्रति मोल केल्विन	J/mol K या J $mol^{-1}K^{-1}$	kg m^2 s^{-2} K^{-1} mol^{-1}
उद्‌भासन (exposure) (X-तथा γ-किरणें)	कूलॉम प्रति किलोग्राम ग्रे प्रति सेकंड	C/kg या C kg^{-1} Gy/s या Gy s^{-1}	kg^{-1} s A m^2 s^{-3}
संपीड्यता	प्रति पास्कल	Pa^{-1}	kg^{-1} m s^2
प्रत्यास्थता गुणांक	न्यूटन प्रति वर्गमीटर	N/m^2 या N m^{-2}	kg m^{-1} s^{-2}
दाब प्रवणता	पास्कल प्रति मीटर	Pa/m या N m^{-3}	kg m^{-2} s^{-2}
पृष्ठ विभव	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या J kg^{-1} ; N m/kg या N m kg^{-1}	m^2 s^{-2}
दाब ऊर्जा	पास्कल घन मीटर	Pa m^3 या N m	kg m^2 s^{-2}
आवेग	न्यूटन सेकंड	N s	kg m s^{-1}
कोणीय आवेग	न्यूटन मीटर सेकंड	Nm s	kg m^2 s^{-1}
विशिष्ट प्रतिरोध	ओम मीटर	Ω m	kg m^3 s^{-3} A^{-2}
पृष्ठ ऊर्जा	जूल प्रति वर्गमीटर	J/m^2 या J m^{-2} ; N/m या N m^{-1}	kg s^{-2}

© NCERT not to be republished

परिशिष्ट A 7

भौतिक राशियों, रासायनिक तत्वों तथा न्यूक्लाइडों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों को प्रतीक रूप में सामान्यत: अंग्रेजी वर्णमाला के किसी अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इन्हें तिरछे (अथवा ढालू) टाइप में छपवाया जाता है। तथापि जिस राशि के लिए दो अक्षरीय प्रतीक आवश्यक हों तो उन्हें दो प्रतीकों के गुणनफल के रूप में दर्शाना होता है, पर इन प्रतीकों को पृथक् दर्शाने के लिए कुछ स्थान छोड़ना आवश्यक होता है।
- नामों अथवा व्यंजकों के संक्षिप्त रूपों, जैसे–potential energy के लिए p.e. का उपयोग भौतिक समीकरणों में नहीं किया जाता। पाठ्य सामग्री में इन संक्षिप्त रूपों को साधारण रोमन (सीधे) टाइप में छपवाया जाता है।
- सदिश राशियों को मोटे टाइप में तथा सीधे छपवाया जाता है। तथापि कक्षा में सदिश राशियों को प्रतीक के शीर्ष पर तीर द्वारा निर्दिष्ट किया जा सकता है।
- दो भौतिक राशियों के गुणनफल को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है। एक भौतिक राशि को दूसरी भौतिक राशि से विभाजित करना एक क्षैतिज दंड खींचकर अथवा सॉलिडस (अथवा तिरछी रेखा /) के साथ निर्दिष्ट किया जा सकता है; अथवा अंश तथा हर के प्रथम घात के व्युत्क्रम के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है (इस गुणनफल में अंश तथा हर में स्पष्ट पहचान के लिए उचित स्थानों पर कोष्ठकों का उपयोग किया जाता है)।
- रासायनिक तत्वों के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में लिखा जाता है। प्रतीक के अंत में विराम चिह्न अथवा बिंदु (.) नहीं लगाया जाता।
  उदाहरण के लिए, Ca, C, H, He, U, आदि।
- किसी न्यूक्लाइड से जुड़े अंकों का उल्लेख उन्हें बाएं अधोलिखित (परमाणु क्रमांक) तथा बाएं उपरिलिखित (द्रव्यमान संख्या) के रूप में लिखकर किया जाता है।
  उदाहरण के लिए, U-235 न्यूक्लाइड को ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ लिखकर व्यक्त किया जाता है (यहां 235 द्रव्यमान संख्या तथा 92 परमाणु क्रमांक को व्यक्त करता है तथा U यूरेनियम का रासायनिक प्रतीक है)।
- यदि आवश्यक हो, तो दाईं उपरिलिखित स्थिति का उपयोग आयनीकरण की अवस्था (आयनों के प्रकरण में) निर्दिष्ट करने के लिए किया जाता है।
  उदाहरण के लिए, Ca^{2+}, PO_4^{3-}

परिशिष्ट A 8

SI मात्रकों, कुछ अन्य मात्रकों तथा SI पूर्वलग्नों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीकों को रोमन (सीधे टाइप) में छापा/लिखा जाता है।
- मात्रकों के मानक तथा अनुमोदित प्रतीकों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से आरंभ करके रोमन (सीधे टाइप) में लिखा जाता है। मात्रकों के लघु उल्लेखों, जैसे kg, m, s, cd आदि को प्रतीकों के रूप में लिखा जाता है, संक्षिप्त रूप में नहीं। मात्रकों के नाम को कभी भी बड़े अक्षरों में नहीं लिखते। तथापि, मात्रक के प्रतीक को केवल तभी बड़े अक्षर में लिखा जाता है, जब मात्रक के प्रतीक को किसी वैज्ञानिक के नाम से व्युत्पन्न किया गया हो, ऐसी स्थिति में मात्रक का आरंभ बड़े रोमन अक्षर से किया जाता है।
  उदाहरण के लिए : मात्रक मीटर ('metre') के लिए 'm', "दिन" ("day") के लिए d, मात्रक वायुमंडलीय दाब ('atmospheric pressure') के लिए atm, मात्रक हर्ट्ज़ ('hertz') के लिए Hz, मात्रक वेबर ('weber') के लिए Wb, मात्रक जूल ('joule') के लिए J, मात्रक ऐम्पियर ('ampere') के लिए A, मात्रक वोल्ट ('volt') के लिए V, आदि का प्रयोग प्रतीकों के रूप में किया जाता है। इसका केवल एक ही अपवाद है L, जो कि मात्रक लीटर (litre) का प्रतीक है। ऐसा अरबी संख्यांक 1 तथा लोअर केस रोमन के अक्षर l को छापने अथवा लिखने में होने वाली भ्रांति से बचने के लिए किया गया है।

© NCERT not to be republished

- मात्रकों के प्रतीकों को उनके लिए अनुमोदित अक्षरों में लिखने के पश्चात् उनके अंत में पूर्ण विराम नहीं लगाया जाता तथा मात्रकों के प्रतीकों को केवल एकवचन में ही लिखा जाता है बहुवचन में नहीं, अर्थात् किसी मात्रक का प्रतीक बहुवचन में अपरिवर्तित रहता है ।
  उदाहरण के लिए : लंबाई 25 सेंटीमीटर (centimetres) के लिए मात्रक का प्रतीक 25 cm के रूप में लिखा जाता है, 25 cms अथवा 25 cm. अथवा 25 cms., आदि नहीं लिखा जाता ।
- सॉलिडस (solidus) अर्थात् (/) के उपयोग का अनुमोदन केवल एक अक्षर के मात्रक प्रतीक के अन्य मात्रक प्रतीक द्वारा विभाजन का संकेतन करने के लिए किया गया है । एक से अधिक सॉलिडस का उपयोग नहीं किया जाता ।
  उदाहरण के लिए, m/s^2 अथवा $m\,s^{-2}$ (m तथा s^{-2} के बीच कुछ स्थान छोड़ते हुए) लिख सकते हैं परंतु m/s/s नहीं;
  $1\ Pl = 1\ N\ s\ m^{-2} = 1\ N\ s/m^2 = 1\ kg/s\ m = 1\ kg\ m^{-1}s^{-1}$ परंतु 1 kg/m/s नहीं;
  J/K mol अथवा $J\ K^{-1}\ mol^{-1}$, परंतु J/K/mol नहीं; आदि ।
- पूर्वलग्न के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में छापा जाता है तथा पूर्वलग्न के प्रतीक तथा मात्रक के प्रतीक के बीच कोई स्थान नहीं छोड़ा जाता । इस प्रकार मात्रक प्रतीकों के बहुत निकट लिखी कुछ दशमलव भिन्न या गुणज, जब वे इतने छोटे हों या बड़े हों, कि उनका लिखना असुविधाजनक हो तो उनको लिखने के लिए कुछ मान्य पूर्वलग्नों का उपयोग किया जाता है ।
  उदाहरण के लिए :
  मेगावाट ($1\ MW = 10^6 W$); नेनो सेकंड ($1\ ns = 10^{-9} s$);
  सेंटीमीटर ($1\ cm = 10^{-2} m$); पीकोफैरड ($1\ pF = 10^{-12} F$);
  किलोमीटर ($1\ km = 10^3 m$); माइक्रोसेकंड ($1\ \mu s = 10^{-6} s$);
  मिलीवोल्ट ($1\ mV = 10^{-3} V$); गीगा हर्ट्ज़ ($1\ GHz = 10^9\ Hz$);
  किलोवाट-घंटा ($1\ kWh) = 10^3\ Wh = 3.6\ MJ = 3.6 \times 10^6\ J$);
  माइक्रो ऐम्पियर ($1\ \mu A = 10^{-6} A$); माइक्रॉन ($1\ \mu m = 10^{-6} m$)
  एंगस्ट्रॉम ($1 Å = 0.1\ nm = 10^{-10} m$); आदि ।
  मात्रक 'माइक्रॉन' जो कि 10^{-6} m अर्थात् 1 माइक्रो मीटर के बराबर है, मात्र एक नाम है जो मीटर के अपवर्तक को सुविधाजनक बनाने के लिए है । इसी प्रकार मात्रक फर्मी ('fermi') जो फेम्टोमीटर अथवा 10^{-15} m के बराबर है, का उपयोग नाभिकीय अध्ययनों में लंबाई के सुविधाजनक मात्रक की भांति किया जाता है । इसी प्रकार, एक अन्य मात्रक "बार्न" (barn) जो $10^{-28} m^2$ के बराबर है, का उपयोग अवपरामाण्विक कण संघट्टों में अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफलों की मापों के सुविधाजनक मात्रक के रूप में किया जाता है । तथापि 'माइक्रॉन' मात्रक को "micrometre" की तुलना में प्राथमिकता दी जाती है । इसका कारण 'micrometre' मात्रक तथा "micrometer" जो कि लंबाई मापने का यंत्र है, के बीच भ्रांति से बचना है । SI मात्रकों मीटर तथा सेकंड के ये नए बने अपवर्त्य तथा अपवर्तक (cm, km, µm, µs, ns) इन मात्रकों के नए संयुक्त, अपृथक्करणीय प्रतीकों का निर्माण करते हैं ।
- जब कोई पूर्वलग्न किसी मात्रक के प्रतीक से पहले लगाया जाता है, तो पूर्वलग्न तथा प्रतीक का संयोजन उस मात्रक का एक नया प्रतीक माना जाता है, जिस पर कोष्ठक का उपयोग किए बिना ही कोई धनात्मक अथवा ऋणात्मक घात लगाई जा सकती है । इन्हें अन्य मात्रकों के प्रतीकों के साथ संयोजित करके संयुक्त मात्रक बनाए जा सकते हैं । घातांकों के बंधन के नियम साधारण बीजगणित की भांति नहीं होते ।
  उदाहरण के लिए:
  cm^3 का सदैव अर्थ $(cm)^3 = (0.01\ m)^3 = (10^{-2} m)^3 = 10^{-6} m^3$, परंतु $0.01\ m^3$ अथवा $10^{-2} m^3$ अथवा $1\ c\,m^3$ (यहां पूर्वलग्न c तथा m^3 के बीच स्थान अर्थहीन है, क्योंकि पूर्वलग्न को मात्रक के प्रतीक के साथ जोड़ा जाना है । किसी पूर्वलग्न का कोई भौतिक महत्त्व अथवा अपना स्वतंत्र अस्तित्व नहीं होता जब तक कि उसे किसी मात्रक के प्रतीक से जोड़ा न जाए) । इसी प्रकार, mA^2 का सदैव ही अर्थ है $(mA)^2 = (0.001\ A)^2 = (10^{-3} A)^2 = 10^{-6} A^2$, परंतु $0.001\ A^2$ अथवा mA^2 कभी नहीं ।
  $1\ cm^{-1} = (10^{-2} m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$ परंतु $1\ cm^{-1}$ अथवा $10^{-2}\ m^{-1}$ कभी नहीं;
  $1\ \mu s^{-1}$ का सदैव अर्थ है $(10^{-6}\ s)^{-1} = 10^6\ s^{-1}$, परंतु $1 \times 10^{-6}\ s^{-1}$ नहीं;

© NCERT not to be republished

$1\ km^3$ का सदैव अर्थ है $(km)^2 = (10^3\ m)^2 = 10^6\ m^2$, परंतु $10^3\ m^2$ कभी नहीं;

$1\ mm^2$ का सदैव अर्थ है $(mm)^2 = (10^{-3}\ m)^2 = 10^{-6}\ m^2$ परंतु $10^{-3}\ m^2$ कभी नहीं, आदि ।

- किसी पूर्वलग्न का अकेले उपयोग नहीं होता । इसे सदैव ही किसी मात्रक के प्रतीक के साथ संलग्न किया जाता है तथा इसे मात्रक के प्रतीक से पहले (पूर्व-लग्न) लिखा अथवा लगाया जाता है ।

  उदाहरण के लिए :

  $10^3/m^3$ का अर्थ $1000/m^3$ अथवा $1000\ m^{-3}$ परंतु k/m^3 अथवा $k\ m^{-3}$ नहीं;

  $10^6/m^3$ का अर्थ है $10,00,000/m^3$ अथवा $10,00,000\ m^{-3}$ परंतु M/m^3 अथवा $M\ m^{-3}$ नहीं।

- पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ बीच में बिना कोई स्थान छोड़े लिखा जाता है, जबकि मात्रकों को आपस में गुणा करते समय मात्रकों के प्रतीकों को पृथक्-पृथक् उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है ।

  उदाहरण के लिए :

  $m\ s^{-1}$ (प्रतीक m तथा s^{-1} लोअर केस में, छोटे अक्षर m तथा s पृथक् तथा स्वतंत्र मात्रक-प्रतीक हैं जिनमें m मीटर के लिए तथा s सेकंड के लिए है तथा उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा गया है) का अर्थ है मीटर प्रति सेकंड परंतु "मिली प्रति सेकंड" नहीं ।

  इसी प्रकार, ms^{-1} [प्रतीक m तथा s एक-दूसरे के बहुत पास-पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा लोअर केस में छोटे अक्षर के साथ मात्रक प्रतीक s (मात्रक 'सेकंड' के लिए) बीच में बिना कोई स्थान छोड़े ms को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ है "प्रति मिली सेकंड" परंतु "मीटर प्रति सेकंड" कभी नहीं ।

  mS^{-1} [प्रतीक m तथा S एक-दूसरे के बहुत पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा मात्रक-प्रतीक S बड़े रोमन अक्षर S मात्रक साइमेंस (siemens) के लिए बीच में बिना कोई स्थान छोड़े mS को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ 'प्रति मिली-साइमेंस' है, परंतु 'प्रति मिली सेकंड' कदापि नहीं है ।

  C m [प्रतीक C तथा m पृथक्-पृथक् लिखे गए हैं, जो मात्रक प्रतीकों C (मात्रक कूलॉम के लिए) तथा m (मात्रक मीटर के लिए) को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर निरूपित करते हैं ।] का अर्थ "कूलॉम मीटर" है, परंतु सेंटीमीटर कदापि नहीं, आदि ।

- जब तक एक पूर्वलग्न उपलब्ध है, दुहरे पूर्वलग्नों का उपयोग वर्जित है ।

  उदाहरण के लिए :

  $10^{-9}\ m = 1\ nm$ (नैनोमीटर) है, परंतु 1 mμm (मिलीमाइक्रोमीटर) नहीं है ।

  $10^{-6}\ m = 1\ \mu m$ (माइक्रॉन) है, परंतु 1 mmm (मिलीमिलीमीटर) नहीं है ।

  $10^{-12}\ F = 1\ pF$ (पीको फैरड) है, परंतु 1 μμF (माइक्रोमाइक्रो फैरड) नहीं है ।

  $10^9\ W = 1\ GW$ (गीगावाट) है, परंतु 1 kMW (किलोमेगावाट) नहीं है, आदि ।

- जब कोई भौतिक राशि दो या अधिक मात्रकों के संयोजन द्वारा व्यक्त की जाती है, तब मात्रक तथा मात्रकों के प्रतीकों के किसी संयोजन के उपयोग को वर्जित माना जाता है ।

  उदाहरण के लिए :

  जूल प्रति मोल केल्विन को J/mol K अथवा $J\ mol^{-1}\ K^{-1}$ के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/mole K अथवा J/mol kelvin अथवा J/mole K, आदि नहीं लिखते ।

  जूल प्रति टेसला को J/T अथवा JT^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/T अथवा J per tesla अथवा J/tesla, आदि नहीं लिखते ।

  न्यूटन मीटर सेकंड को N m s के रूप में लिखा जाता है, परंतु newton m second अथवा N m second अथवा N metre s अथवा newton metre s नहीं लिखते ।

  जूल प्रति किलोग्राम केल्विन को J/kg K अथवा $J\ kg^{-1}\ K^{-1}$ के रूप में लिखा जाता है, परंतु J/kilog K अथवा joule/kg K अथवा J/kg kelvin अथवा J/kilogram K आदि नहीं लिखते ।

© NCERT not to be republished

- परिकलन की सुविधा के लिए, पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ अंश में लगाया जाता है हर में नहीं। उदाहरण के लिए :

  10^6 N/m^2 को 1 N/mm^2 लिखने की अपेक्षा MN/m^2 के रूप में लिखा जाना अधिक सुविधाजनक है।

  उन संख्याओं जिनमें अपवर्त्यों अथवा अपवर्तकों जिनमें 1000 के गुणक सम्मिलित हों, वहाँ इन संख्याओं को $10^{\pm 3n}$ (जहाँ n पूर्णांक है) के रूप में लिखने को प्राथमिकता दी जाती है।
- उन प्रकरणों में अत्यंत सावधानी की आवश्यकता होती है जिनमें भौतिक राशियों तथा भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीक समान होते हैं।

  उदाहरण के लिए :

  भौतिक राशि भार (W) को द्रव्यमान (m) तथा गुरुत्वीय त्वरण (g) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है। इसे प्रतीकों के पदों में तिरछे टाइप में $W = m\,g$ के रूप में छापा जाता है तथा लिखते समय m तथा g के बीच कुछ स्थान छोड़ देते हैं। इसे मात्रकों watt (W), metre (m), तथा gram (g) के मात्रक प्रतीकों के साथ भ्रम में नहीं पड़ना चाहिए। तथापि, समीकरण $W = mg$ में, प्रतीक W भार को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक J है; m द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक kg है तथा g गुरुत्वीय त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक m s^{-2} है।

  इसी प्रकार, समीकरण $F = m\,a$ में प्रतीक F बल को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक N है, m द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक kg है तथा a त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक m s^{-2} है। भौतिक राशियों के इन प्रतीकों को मात्रकों "farad" (F), metre (m) तथा "are" (a) के साथ भ्रमित नहीं होना चाहिए।

  प्रतीकों h [पूर्वलग्न हेक्टो (hecto) तथा मात्रक घंटा (hour)], c [पूर्वलग्न सेंटी (centi) तथा मात्रक कैरट ("carat")], d [पूर्वलग्न डेसी (deci) तथा मात्रक दिन (day)], T (पूर्वलग्न टेरा (tera) तथा मात्रक टेसला (tesla), a [पूर्वलग्न एट्टो (atto) तथा मात्रक ऑर (are)], da [पूर्वलग्न डेका (deca) तथा मात्रक डेसिऑर (deciare)] आदि का उपयोग करते समय यथोचित भिन्नता दर्शानी चाहिए।
- मात्रकों की S I प्रणाली का द्रव्यमान का मूल मात्रक "किलोग्राम" मात्रकों की CGS प्रणाली के द्रव्यमान के मूल मात्रक 'ग्राम' के साथ S I पूर्वलग्न 'किलो' (एक गुणज जो 10^3 के बराबर है) को जोड़कर बनता है, जो देखने में असामान्य-सा प्रतीत होता है। इस प्रकार, जबकि हम लंबाई के मात्रक (मीटर अथवा metre) के एक हज़ारवें भाग को मिलीमीटर (mm) लिखते हैं, द्रव्यमान के मात्रक (किलोग्राम अथवा kilogram अथवा kg) के एक हज़ारवें भाग को मिलीकिलोग्राम नहीं लिखते, वरन् केवल ग्राम लिखते हैं। ऐसी विषम परिस्थिति उत्पन्न होने का कारण यह है कि हम द्रव्यमान के मात्रक 'किलोग्राम' के स्थान पर अन्य कोई उपयुक्त मात्रक प्रतिस्थापित नहीं कर सके। अतः एक अपवाद के रूप में द्रव्यमान के मात्रक के साथ अपवर्त्य तथा अपवर्तकों के नाम 'ग्राम' के साथ पूर्वलग्न लगाकर बनाए जाते हैं 'किलोग्राम' के साथ नहीं।

  उदाहरण के लिए :

  10^3 kg = 1 मेगाग्राम (1 Mg), परंतु 1 किलो किलोग्राम (1 kkg) नहीं;

  10^{-6} kg = 1 मिलीग्राम (1 mg), परंतु 1 माइक्रोकिलोग्राम (1 μkg) नहीं;

  10^{-3} kg = 1 ग्राम (1 g), परंतु 1 मिलीकिलोग्राम (1 mkg) नहीं; आदि।

  यह पुनः ध्यान देने की बात है कि आपको केवल अंतर्राष्ट्रीय मान्यता प्राप्त एवं अनुमोदित प्रतीकों का ही उपयोग करना चाहिए। यदि आप अपने सामान्य व्यवहार में मात्रकों के प्रतीकों का सामान्य नियमों एवं मार्गदर्शनों के अनुसार निरंतर उपयोग करेंगे, तो आप S I मात्रकों, पूर्वलग्नों तथा भौतिक राशियों और उनसे संबद्ध प्रतीकों के उचित परिप्रेक्ष्य में उपयोग करने में प्रवीण हो जाएंगे।

© NCERT not to be republished

परिशिष्ट A9

भौतिक राशियों के विमीय सूत्र

क्रम संख्या	भौतिक राशि	अन्य भौतिक राशियों से संबंध	विमाएँ	विमीय सूत्र
1.	क्षेत्रफल	लंबाई × चौड़ाई	$[L^2]$	$[M^0 L^2 T^0]$
2.	आयतन	लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई	$[L^3]$	$[M^0 L^3 T^0]$
3.	द्रव्यमान घनत्व	द्रव्यमान/आयतन	$[M]/[L^3]$ या $[M L^{-3}]$	$[M L^{-3} T^0]$
4.	आवृत्ति	1/आवर्तकाल	$1/[T]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
5.	वेग, चाल	विस्थापन/समय	$[L]/[T]$	$[M^0 L T^{-1}]$
6.	त्वरण	वेग/समय	$[LT^{-1}]/[T]$	$[M^0 LT^{-2}]$
7.	बल	द्रव्यमान × त्वरण	$[M][L T^{-2}]$	$[M L T^{-2}]$
8.	आवेग	बल × समय	$[M LT^{-2}] [T]$	$[M L T^{-1}]$
9.	कार्य, ऊर्जा	बल × दूरी	$[MLT^{-2}][L]$	$[M L^2T^{-2}]$
10.	शक्ति	कार्य/समय	$[ML^2 T^{-2}]/[T]$	$[M L^2 T^{-3}]$
11.	संवेग	द्रव्यमान × वेग	$[M][LT^{-1}]$	$[M L T^{-1}]$
12.	दाब, प्रतिबल	बल/क्षेत्रफल	$[MLT^{-2}]/[L^2]$	$[M L^{-1}T^{-2}]$
13.	विकृति	विमा में परिवर्तन/मूल विमा	$[L]/[L]$ या $[L^3]/[L^3]$	$[M^0 L^0 T^0]$
14.	प्रत्यास्थता गुणांक	प्रतिबल/विकृति	$\frac{[M L^{-1} T^{-2}]}{[M^0 L^0 T^0]}$	$[M L^{-1} T^{-2}]$
15.	पृष्ठ तनाव	बल/लंबाई	$[M L T^{-2}]/[L]$	$[M L^0T^{-2}]$
16.	पृष्ठ ऊर्जा	ऊर्जा/क्षेत्रफल	$[M L^2 T^{-2}]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-2}]$
17.	वेग प्रवणता	वेग/दूरी	$[L T^{-1}]/[L]$	$[M^0 L^0T^{-1}]$
18.	दाब प्रवणता	दाब/दूरी	$[ML^{-1} T^{-2}]/[L]$	$[M L^{-2} T^{-2}]$
19.	दाब ऊर्जा	दाब × आयतन	$[ML^{-1} T^{-2}][L^3]$	$[M L^2T^{-2}]$
20.	श्यानता गुणांक	बल/(क्षेत्रफल × वेग प्रवणता)	$\frac{[M L T^{-2}]}{[L^2] [LT^{-1}/L]}$	$[M L^{-1}T^{-1}]$
21.	कोण, कोणीय विस्थापन	चाप/त्रिज्या	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0T^0]$
22.	त्रिकोणमितीय अनुपात ($\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ आदि)	लंबाई/लंबाई	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0T^0]$
23.	कोणीय वेग	कोण/समय	$[L^0]/[T]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
24.	कोणीय त्वरण	कोणीय वेग/समय	$[L^0]/[T^2]$	$[M^0 L^0 T^{-2}]$
25.	परिभ्रमण त्रिज्या	दूरी	$[L]$	$[M^0 L T^0]$
26.	जड़त्व आघूर्ण	द्रव्यमान × (परिभ्रमण त्रिज्या)^2	$[M][L^2]$	$[M L^2 T^0]$
27.	कोणीय संवेग	जड़त्व आघूर्ण × कोणीय वेग	$[ML^2][T^{-1}]$	$[M L^2 T^{-1}]$
28.	बल-आघूर्ण, बलयुग्म का आघूर्ण	बल × दूरी	$[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$

© NCERT not to be republished

29.	बल-आघूर्ण (ऐंठन)	कोणीय संवेग/समय अथवा बल × दूरी	$[ML^2 T^{-1}]/[T]$ अथवा $[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
30.	कोणीय आवृत्ति	$2\pi \times$ आवृत्ति	$[T^{-1}]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
31.	तरंगदैर्घ्य	दूरी	$[L]$	$[M^0 L T^0]$
32.	हबल नियतांक	पश्च सरण चाल/दूरी	$[L T^{-1}]/[L]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
33.	तरंग की तीव्रता	(ऊर्जा/समय)/क्षेत्रफल	$[ML^2 T^{-2}/T]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-3}]$
34.	विकिरण दाब	तरंग की तीव्रता/प्रकाश की चाल	$[MT^{-3}]/[LT^{-1}]$	$[M L^{-1}T^{-2}]$
35.	ऊर्जा घनत्व	ऊर्जा/आयतन	$[M L^2 T^{-2}]/[L^3]$	$[M L^{-1}T^{-2}]$
36.	क्रांतिक वेग	$\frac{\text{रेनॉल्ड संख्या} \times \text{श्यानता गुणांक}}{\text{द्रव्यमान घनत्व} \times \text{त्रिज्या}}$	$\frac{[M^0 L^0 T^0][ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}][L]}$	$[M^0 LT^{-1}]$
37.	पलायन वेग	$(2 \times$ गुरुत्वीय त्वरण $\times$ पृथ्वी की त्रिज्या$)^{1/2}$	$[LT^{-2}]^{1/2} \times [L]^{1/2}$	$[M^0 LT^{-1}]$
38.	ऊष्मीय ऊर्जा, आंतरिक ऊर्जा	कार्य (= बल × दूरी)	$[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
39.	गतिज ऊर्जा	$\frac{1}{2} \times$ द्रव्यमान $\times$ (वेग)^2	$[M][LT^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
40.	स्थितिज ऊर्जा	द्रव्यमान × गुरुत्वीय त्वरण × ऊँचाई	$[M][LT^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
41.	घूर्णी गतिज ऊर्जा	$\frac{1}{2} \times$ जड़त्व आघूर्ण $\times$ (कोणीय वेग)^2	$[M^0L^0T^0][ML^2] \times [T^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
42.	दक्षता	$\frac{\textit{निर्गत कार्य अथवा ऊर्जा}}{\textit{निवेश कार्य अथवा ऊर्जा}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[ML^2T^{-2}]}$	$[M^0 L^0 T^0]$
43.	कोणीय आवेग	बल आघूर्ण $\times$ समय	$[ML^2T^{-2}][T]$	$[M L^2T^{-1}]$
44.	गुरुत्वीय नियतांक	$\frac{\text{बल} \times (\text{दूरी})^2}{\text{द्रव्यमान} \times \text{द्रव्यमान}}$	$\frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]}$	$[M^{-1} L^3T^{-2}]$
45.	प्लांक नियतांक	ऊर्जा/आवृत्ति	$[ML^2T^{-2}]/[T^{-1}]$	$[M L^2T^{-1}]$
46.	ऊष्मा धारिता, एंट्रॉपी	ऊष्मीय ऊर्जा/ताप	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[M L^2T^{-2}K^{-1}]$
47.	विशिष्ट ऊष्मा धारिता	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान} \times \text{ताप}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M][K]$	$[M^0L^2T^{-2}K^{-1}]$
48.	गुप्त ऊष्मा	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M]$	$[M^0L^2 T^{-2}]$
49.	तापीय प्रसार गुणांक अथवा ऊष्मा प्रसरणीयता	$\frac{\text{विमा में परिवर्तन}}{\text{मूल विमा} \times \text{ताप}}$	$[L]/[L][K]$	$[M^0 L^0 K^{-1}]$
50.	ऊष्मा चालकता	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा} \times \text{मोटाई}}{\text{क्षेत्रफल} \times \text{ताप} \times \text{समय}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}][L]}{[L^2][K][T]}$	$[M LT^{-3}K^{-1}]$
51.	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक अथवा (संपीड्यता)$^{-1}$	$\frac{\text{आयतन} \times \text{दाब में परिवर्तन}}{\text{आयतन में परिवर्तन}}$	$\frac{[L^3][ML^{-1}T^{-2}]}{[L^3]}$	$[M^{-1} T^{-2}]$
52.	अभिकेंद्री त्वरण	(वेग)^2/त्रिज्या	$[LT^{-1}]^2/[L]$	$[M^0 LT^{-2}]$
53.	स्टेफॉन नियतांक	$\frac{(\text{ऊर्जा/क्षेत्रफल} \times \text{समय})}{(\text{ताप})^4}$	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[L^2][T][K]^4}$	$[M L^0T^{-3}K^{-4}]$
54.	वीन नियतांक	तरंगदैर्घ्य $\times$ ताप	$[L][K]$	$[M^0 LT^0 K]$

© NCERT not to be republished

55.	बोल्ट्ज़मान नियतांक	ऊर्जा/ताप	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[M\,L^2T^{-2}K^{-1}]$
56.	सार्वत्रिक गैस नियतांक	$\frac{\text{दाब} \times \text{आयतन}}{\text{मोल} \times \text{ताप}}$	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^3]}{[mol][K]}$	$[M\,L^2T^{-2}\,K^{-1}\,mol^{-1}]$
57.	आवेश	विद्युत् धारा × समय	$[A][T]$	$[M^0\,L^0\,TA]$
58.	धारा घनत्व	विद्युत् धारा/क्षेत्रफल	$[A]/[L^2]$	$[M^0\,L^{-2}\,T^0A]$
59.	वोल्टता, विद्युत विभव, विद्युत् वाहक बल	कार्य/आवेश	$[ML^2T^{-2}]/[AT]$	$[M\,L^{-2}\,T^{-3}\,A^{-1}]$
60.	प्रतिरोध	$\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{विद्युत् धारा}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[A]}$	$[M\,L^2T^{-3}\,A^{-2}]$
61.	धारिता	$\frac{\text{आवेश}}{\text{विभवांतर}}$	$\frac{[AT]}{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}$	$[M^{-1}\,L^{-2}T^4A^2]$
62.	वैद्युत प्रतिरोधकता अथवा (वैद्युत चालकता)$^{-1}$	$\frac{\text{प्रतिरोध} \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}}$	$[ML^2T^{-3}A^{-2}][L^2]/[L]$	$[ML^3\,T^{-3}\,A^{-2}]$
63.	विद्युत क्षेत्र	वैद्युत बल/आवेश	$[MLT^{-2}]/[AT]$	$[M\,LT^{-3}\,A^{-1}]$
64.	वैद्युत अभिवाह	विद्युत् क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[MLT^{-3}A^{-1}][L^2]$	$[M\,L^3\,T^{-3}\,A^{-1}]$
65.	वैद्युत द्विध्रुव-आघूर्ण	बल आघूर्ण/विद्युत् क्षेत्र	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[MLT^{-3}A^{-1}]}$	$[M^0\,LT\,A]$
66.	विद्युत क्षेत्र तीव्रता अथवा वैद्युत तीव्रता	$\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{दूरी}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[L]}$	$[M\,LT^{-3}\,A^{-1}]$
67.	चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय अभिवाह घनत्व, चुंबकीय प्रेरण	$\frac{\text{बल}}{\text{विद्युत् धारा} \times \text{लंबाई}}$	$[MLT^{-2}]/[A][L]$	$[M\,L^0\,T^{-2}A^{-1}]$
68.	चुंबकीय अभिवाह	चुंबकीय क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[MT^{-2}A^{-1}][L^2]$	$[M\,L^2\,T^{-2}A^{-1}]$
69.	प्रेरकत्व	$\frac{\text{चुंबकीय अभिवाह}}{\text{विद्युत् धारा}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}A^{-1}]}{[A]}$	$[M\,L^2\,T^{-2}A^{-2}]$
70.	चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण	बल आघूर्ण/चुंबकीय क्षेत्र अथवा विद्युत धारा × क्षेत्रफल	$[ML^2T^{-2}]/[MT^{-2}A^{-1}]$ अथवा $[A][L^2]$	$[M^0\,L^2\,T^0A]$
71.	चुंबकीय क्षेत्र प्रबलता, चुंबकीय तीव्रता अथवा चुंबकीय आघूर्ण घनत्व	$\frac{\text{चुंबकीय आघूर्ण}}{\text{आयतन}}$	$\frac{[L^2A]}{[L^3]}$	$[M^0\,L^{-1}T^0A]$
72.	विद्युतशीलता (परावैद्युतांक) नियतांक (मुक्त आकाश का)	$\frac{\text{आवेश} \times \text{आवेश}}{4\pi \times \text{वैद्युत बल} \times (\text{दूरी})^2}$	$\frac{[AT][AT]}{[MLT^{-2}][L]^2}$	$[M^{-1}\,L^{-3}\,T^4A^2]$
73.	पारगम्यता नियतांक (मुक्त आकाश का)	$\frac{2\pi \times \text{बल} \times \text{दूरी}}{(\text{विद्युत् धारा}) \times (\text{विद्युत् धारा}) \times \text{लंबाई}}$	$\frac{[M^0\,L^0\,T^0][MLT^{-2}][L]}{[A][A][L]}$	$[M\,L\,T^{-2}\,A^{-2}]$
74.	अपवर्तनांक	$\frac{\text{निर्वात में प्रकाश की चाल}}{\text{माध्यम में प्रकाश की चाल}}$	$[LT^{-1}]/[LT^1]$	$[M^0\,L^0\,T^0]$
75.	फैराडे नियतांक	आवोगाद्रो नियतांक × मूल आवेश	$[AT]/[mol]$	$[M^0\,L^0\,TA\,mol^{-1}]$
76.	तरंग संख्या	2π/तरंगदैर्घ्य	$[M^0L^0T^0]/[L]$	$[M^0\,L^{-1}\,T^0]$

© NCERT not to be republished

77.	विकिरण अभिवाह, विकिरण शक्ति	उत्सर्जित ऊर्जा/समय	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[M\,L^2\,T^{-3}]$
78.	विकिरण अभिवाह की ज्योति अथवा विकिरण तीव्रता	$\frac{\text{स्रोत का विकिरण अभिवाह अथवा विकिरण शक्ति}}{\text{घन कोण}}$	$[ML^2T^{-3}]/[M^0\,L^0\,T^0]$	$[ML^2\,T^{-3}]$
79.	दीप्त शक्ति अथवा स्रोत का ज्योति फ्लक्स	$\frac{\text{उत्सर्जित ज्योति ऊर्जा}}{\text{समय}}$	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[M\,L^2\,T^{-3}]$
80.	ज्योति तीव्रता अथवा स्रोत की प्रदीपन क्षमता	$\frac{\text{ज्योति फ्लक्स}}{\text{घन कोण}}$	$\frac{[M\,L^2\,T^{-3}]}{[M^0\,L^0\,T^0]}$	$[M\,L^2\,T^{-3}]$
81.	प्रदीपन की तीव्रता अथवा ज्योतिर्मयता	$\frac{\text{ज्योति तीव्रता}}{(\text{दूरी})^2}$	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[ML^0\,T^{-3}]$
82.	आपेक्षिक ज्योति	$\frac{\text{दी गई तरंगदैर्घ्य के किसी स्रोत का ज्योति फ्लक्स}}{\text{उसी क्षमता के स्रोत का चरम सुग्राहिता तरंगदैर्घ्य (555 n m) का ज्योति फ्लक्स}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}]}{[M\,L^2\,T^{-3}]}$	$[M^0\,L^0\,T^0]$
83.	ज्योति दक्षता	$\frac{\text{कुल ज्योति फ्लक्स}}{\text{कुल विकिरण फ्लक्स}}$	$[ML^2T^{-3}]/[ML^2T^{-3}]$	$[M^0\,L^0\,T^0]$
84.	प्रदीप्ति घनत्व अथवा प्रदीप्ति	$\frac{\text{आपतित ज्योति फ्लक्स}}{\text{क्षेत्रफल}}$	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[M\,L^0\,T^{-3}]$
85.	द्रव्यमान क्षति	[न्यूक्लियॉनों (नाभिक कणों) के द्रव्यमानों का योग] (नाभिक का द्रव्यमान)	$[M]$	$[M\,L^0\,T^0]$
86.	नाभिक की बंधन ऊर्जा	द्रव्यमान क्षति $\times$ (निर्वात में प्रकाश की चाल)^2	$[M][LT^{-1}]^2$	$[M\,L^2\,T^{-2}]$
87.	क्षय-नियतांक	$0.693/$अर्ध आयु	$[T^{-1}]$	$[M^0\,L^0\,T^{-1}]$
88.	अनुनाद आवृत्ति	(प्रेरकत्व $\times$ धारिता)$^{-½}$	$[ML^2T^{-2}A^{-2}]^{-½} \times [M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-½}$	$[M^0\,L^0\,A^0T^{-1}]$
89.	गुणता कारक अथवा कुंडली का Q - कारक	$\frac{\text{अनुनाद आवृत्ति} \times \text{प्रेरकत्व}}{\text{प्रतिरोध}}$	$\frac{[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]}{[M\,L^2\,T^{-3}A^{-2}]}$	$[M^0\,L^0\,T^0]$
90.	लेंस की क्षमता	(फोकस दूरी)$^{-1}$	$[L^{-1}]$	$[M^0\,L^{-1}\,T^0]$
91.	आवर्धन	$\frac{\text{प्रतिबिंब-दूरी}}{\text{वस्तु-दूरी}}$	$[L]/[L]$	$[M^0\,L^0\,T^0]$
92.	तरल प्रवाह दर	$\frac{\pi/8 \times (\text{दाब}) \times (\text{त्रिज्या})^4}{(\text{श्यानता गुणांक}) \times (\text{लंबाई})}$	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[ML^{-1}T^{-1}][L]}$	$[M^0\,L^3\,T^{-1}]$
93.	धारिता-प्रतिघात	(कोणीय आवृत्ति $\times$ धारिता)$^{-1}$	$[T^{-1}]^{-1}[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-1}$	$[M\,L^2\,T^{-3}A^{-2}]$
94.	प्रेरणिक प्रतिघात	(कोणीय आवृत्ति $\times$ प्रेरकत्व)	$[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]$	$[M\,L^2\,T^{-3}A^{-2}]$

© NCERT not to be republished

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर

अध्याय 1

1.1 (a) 10^{-6}; (b) 1.5×10^{4}; (c) 5; (d) 11.3, 1.13×10^{4}

1.2 (a) 10^{7}; (b) 10^{-16}; (c) 3.9×10^{4}; (d) 6.67×10^{-8}

1.5 500

1.6 (c)

1.7 0.035 mm

1.9 94.1

1.10 (a) 1; (b) 3; (c) 4; (d) 4, (e) 4; (f) 4

1.11 8.72 m^2 ; 0.0855 m^3

1.12 (a) 2.3 kg ; (b) 0.02 g

1.13 सही सूत्र $m = m_0 \left(1 - v^2/c^2\right)^{-½}$ है ।

1.14 $\cong 3 \times 10^{-7}\ m^3$

1.15 $\cong 10^{4}$; किसी गैस में अंतराअणुक पृथकन अणु के आकार से बहुत अधिक होता है ।

1.16 प्रेक्षक के आँखों पर समीपस्थ वस्तुएँ दूरस्थ वस्तुओं की अपेक्षा अधिक कोण बनाती हैं। जब आप गतिमान होते हैं तो समीपस्थ वस्तुओं की अपेक्षा दूरस्थ वस्तुओं द्वारा बने कोण में परिवर्तन कम होता है। अत: दूरस्थ वस्तुएँ आपके साथ गतिमय प्रतीत होती हैं जबकि समीपस्थ वस्तुएँ विपरीत दिशा में।

1.17 1.4 10^{3} kgm^{-3}, सूर्य का द्रव्यमान-घनत्व द्रवों/ठोसों के घनत्वों के परिसर में होता है, गैसों के घनत्वों के परिसर में नहीं । सूर्य की भीतरी परतों के कारण बाहरी परतों पर अंतर्मुखी गुरुत्वाकर्षण बल के कारण ही गर्म प्लैज़्मा का इतना उच्च घनत्व हो जाता है ।

अध्याय 2

2.1 (a), (b)

2.2 (a) A ..... B, (b) A ..... B, (c) B ..... A, (d) वही (e) B ..... A.....एक बार ।

2.4 37 s

2.5 3.06 m s^{-2}, 11.4 s

2.6 (a) ऊर्ध्वाधर अधोमुखी; (b) शून्य वेग, 9.8 m s^{-2} का अधोमुखी त्वरण; (c) $x>0$ (उपरिमुखी तथा अधोमुखी गति); $v<0$ (उपरिमुखी); $v>0$ (अधोमुखी), $a>0$ हर समय; (d) 44.1 m, 6s

2.7 (a) सही; (b) गलत ; (c) सही (यदि कण संघट्ट के उसी क्षण उसी चाल से प्रतिक्षेपित होता है, तो इससे यह अर्थ निकलता है कि त्वरण अनंत है, जो कि भौतिक रूप से संभव नहीं है) ; (d) गलत (तभी सही है जबकि चुनी हुई धनात्मक दिशा गति की दिशा के अनुदिश है)।

© NCERT not to be republished

2.10 (i) 5 km h^{-1}, 5 km h^{-1}; (ii) 0; 6 km/h; (iii) $\frac{15}{8}$ km h^{-1}, $\frac{45}{8}$ km h^{-1}

2.11 क्योंकि किसी यादृच्छिक लघु समय अंतराल के लिए, विस्थापन का परिमाण पथ-लंबाई के बराबर होता है ।

2.12 चारों ग्राफ असंभव हैं । (a) एक ही समय किसी कण की दो विभिन्न स्थितियाँ नहीं हो सकतीं; (b) एक ही समय किसी कण के विपरीत दिशाओं में वेग नहीं हो सकते ; (c) चाल कभी भी ऋणात्मक नहीं होती ; (d) किसी कण की कुल पथ-लंबाई समय के साथ कभी भी नहीं घट सकती (ध्यान दीजिए, ग्राफ पर बने तीर के चिह्न अर्थहीन हैं) ।

2.13 नहीं, गलत है । x-t आलेख किसी कण के प्रक्षेपण को प्रदर्शित नहीं करता । संदर्भ : कोई पिंड किसी मीनार से गिराया जाता है ($x = 0$), $t = 0$ पर ।

2.14 105 m s^{-1}

2.15 (a) चिकने फर्श पर विराम में रखी किसी गेंद पर किक लगाई जाती है जिससे वह गेंद किसी दीवार से टकराकर समानीत (reduced) चाल से वापस लौटती है तथा विपरीत दीवार की ओर जाती है जो उसे रोक देती है ।

(b) किसी आरंभिक वेग से ऊर्ध्वाधरत: ऊपर फेंकी गई कोई गेंद फर्श से हर टक्कर के पश्चात् घटी चाल से वापस लौटती है ।

(c) एकसमान वेग से गतिशील कोई क्रिकेट गेंद अत्यंत लघु समय अंतराल के लिए बल्ले से हिट होकर वापस लौटती है ।

2.16 $x < 0$, $v < 0$, $a > 0$; $x > 0$, $v > 0$, $a < 0$; $x < 0$, $v > 0$, $a > 0$ ।

2.17 3 में सबसे अधिक, 2 में सबसे कम; 1 तथा 2 में $v > 0$; 3 में $v < 0$

2.18 2 में त्वरण का परिमाण अधिकतम; 3 में चाल अधिकतम; 1, 2 तथा 3 में $v>0$, 1 तथा 3 में $a>0$, 2 में $a<0$; A, B, C तथा D पर $a = 0$

अध्याय 3

3.1 आयतन, द्रव्यमान, चाल, घनत्व, मोलों की संख्या, कोणीय आवृत्ति अदिश है, शेष सभी सदिश हैं ।

3.2 कार्य, विद्युत धारा

3.3 आवेग

3.4 केवल (c) तथा (d) स्वीकार्य हैं ।

3.5 (a) T, (b) F, (c) F, (d) T, (e) T

3.6 **संकेत :** किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग (अंतर) कभी भी तीसरी भुजा से कम (अधिक) नहीं हो सकता । सरेखी सदिशों के लिए यह योग (अंतर) तीसरी भुजा के समान होता है ।

3.7 (a) के अतिरिक्त सभी प्रकथन सही हैं ।

3.8 प्रत्येक के लिए 400 m ; B

3.9 (a) 0; (b) 0; (c) 21.4 km h^{-1}

3.10 1 km परिमाण का विस्थापन आरंभिक दिशा से 60 का कोण बनाते हुए; कुल पथ-लंबाई = 1.5 km (तीसरा मोड़); शून्य विस्थापन सदिश; पथ-लंबाई = 3 km (छठा मोड़); 866 m, 30 , 4 km (आठवाँ मोड़) ।

3.11 (a) 49.3 km h^{-1}; (b) 21.4 km h^{-1}, नहीं, केवल सीधे पथों के लिए ही परिमाण में माध्य चाल, माध्य वेग के बराबर होती है ।

3.12 150.5 m

© NCERT not to be republished

3.13 50 m

3.14 9.9 m s^{-2}, हर बिंदु पर त्रिज्या के अनुदिश केंद्र की ओर ।

3.15 6.4 g

3.16 (a) गलत (केवल एकसमान वृत्तीय गति के लिए ही सही) ।

(b) सही, (c) सही

3.17 (a) $\mathbf{v}(t) = (3.0\,\hat{\mathbf{i}} - 4.0\,t\,\hat{\mathbf{j}})$

$\mathbf{a}(t) = -4.0\,\hat{\mathbf{j}}$

(b) 8.54 m s^{-1}, x-अक्ष से 70°

3.18 (a) 2 s, 24 m, 21.26 m s^{-1}

3.19 $\sqrt{2}$, x-अक्ष से 45° पर ; $\sqrt{2}$, x-अक्ष से – 45° पर, $\left(5/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\right)$

3.20 (b) तथा (e)

3.21 केवल (e) सही है ।

3.22 182.2 m s^{-1}

अध्याय 4

4.1 (a) से (d) में न्यूटन के प्रथम नियम के अनुसार कोई नेट बल नहीं लगता (e) क्योंकि यह वैद्युत चुंबकीय तथा गुरुत्वीय बल उत्पन्न करने वाली भौतिक एजेंसियों से बहुत दूर है, अतः कोई बल नहीं लगता ।

4.2 प्रत्येक स्थिति में (वायु के प्रभाव को नगण्य मानते हुए) कंकड़ पर केवल एक ही बल–गुरुत्व बल = 0.5 N ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी लगता है । यदि कंकड़ की गति ऊर्ध्वाधर के अनुदिश नहीं है तब भी उत्तर में कोई परिवर्तन नहीं होता । कंकड़ उच्चतम बिंदु पर विराम में नहीं है । इसकी समस्त गति की अवधि में इस पर वेग का एकसमान क्षैतिज घटक कार्यरत रहता है ।

4.3 (a) 1 N ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी (b) वही जो (a) में है, (c) वही जो (a) में है । किसी भी क्षण बल उस क्षण की स्थिति पर निर्भर करता है, इतिहास पर नहीं । (d) 0.1 N रेलगाड़ी की गति की दिशा में ।

4.4 (i) T

4.5 $a = -2.5$ m s^{-2}, $v = u + at$ का प्रयोग करने पर, $0 = 15 - 2.5\,t$ अर्थात् $t = 6.0$ s

4.6 $a = 1.5/25 = 0.06$ m s^{-2}, $F = 3 \times 0.06 = 0.18$ N गति की दिशा में ।

4.7 परिणामी बल = 10 N, 8 N बल की दिशा से $\tan^{-1}(3/4) = 37°$ का कोण बनाते हुए ।

त्वरण = 2 m s^{-2} परिणामी बल की ही दिशा में ।

4.8 $a = -2.5$ m s^{-2}; मंदक बल $= 465 \times 2.5 = 1.2 \times 10^3$ N

4.9 $F - 20{,}000 \times 10 = 20{,}000 \times 5.0$ अर्थात् $F = 3.0 \times 10^5$ N

4.10 $a = -20$ m s^{-2} $\quad 0 \le t \le 30$ s

$t = -5$ s $\quad x = ut = -10 \times 5 = -50$ m

$t = 25$ s $\quad x = ut + \frac{1}{2}\,at^2 = (10 \times 25 - 10 \times 62.5)\text{m} = -6.0$ km

$t = 100$ s $\quad$ पहले 30 s तक की गति पर विचार कीजिए

$x_1 = 10 \times 30 - 10 \times 900 = -8700$ m

$t = 30$ s पर $v = 10 - 20 \times 30 = -590$ m s^{-1}

© NCERT not to be republished

30 s से 100 s की गति के लिए

$$x_2 = -590 \times 70 = -41300 \text{ m}$$

$x = x_1 + x_2 = -50$ km

4.11 (a) $t = 10$ s पर कार का वेग $= 0 + 2 \times 10 = 20$ m s^{-1}

न्यूटन के गति के प्रथम नियम के अनुसार समस्त गति की अवधि में वेग का क्षैतिज घटक 20 m s^{-1} है,

$t = 11$s पर वेग का ऊर्ध्वाधर घटक $= 0 + 10 \times 1 = 10$ m s^{-1}

$t = 11$s पर पत्थर का वेग $= \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22.4$ m s^{-1} क्षैतिज दिशा से $\tan^{-1}(½)$ का कोण बनाते हुए।

(b) 10 m s^{-2} ऊर्ध्वाधरत: अधोमुखी।

4.12 (a) चरम स्थिति पर गोलक की चाल शून्य है। यदि डोरी काट दी जाए तो वह ऊर्ध्वाधर अधोमुखी गिरेगा।

(b) माध्य स्थिति पर गोलक में क्षैतिज वेग होता है। यदि डोरी काट दी जाए तो वह किसी परवलयिक पथ के अनुदिश गिरेगा।

4.13 तुला का पाठ्यांक व्यक्ति द्वारा फर्श पर आरोपित बल की माप होता है। न्यूटन के गति के तृतीय नियम के अनुसार यह फर्श द्वारा व्यक्ति पर आरोपित अभिलंब बल N के समान एवं विपरीत होता है।

(a) $N = 70 \times 10 = 700$ N; पाठ्यांक 70 kg है।

(b) $70 \times 10 - N = 70 \times 5$; पाठ्यांक 35 kg है।

(c) $N - 70 \times 10 = 70 \times 5$; पाठ्यांक 105 kg है।

(d) $70 \times 10 - N = 70 \times 10$; $N = 0$; पैमाने का पाठ्यांक शून्य होगा।

4.14 (a) तीनों समय अंतरालों में त्वरण और इसलिए बल भी, दोनों शून्य हैं।

(b) $t = 0$ पर 3 kg m s^{-1} (c) $t = 4$ s पर -3 kg m s^{-1}

4.15 यदि 20 kg द्रव्यमान के पिंड को खीचते हैं, तो

$600 - T = 20\,a$, $a = 20$ m s^{-2}, $T = 10\,a$ अर्थात् $T = 200$ N।

यदि 10 kg द्रव्यमान के पिंड को खींचते हैं, तो $a = 20$ m s^{-2}; $T = 400$ N

4.16 $T - 8 \times 10 = 8\,a$; $12 \times 10 - T = 12\,a$

अर्थात् $a = 2$ m s^{-2}; $T = 96$ N

4.17 संवेग संरक्षण नियम द्वारा कुल अंतिम संवेग शून्य है। दो संवेग सदिशों का योग तब तक शून्य नहीं हो सकता जब तक कि वे दोनों समान एवं विपरीत न हों।

4.18 प्रत्येक गेंद पर आवेग का परिमाप $= 0.05 \times 12 = 0.6$ kg m s^{-1}। दोनों आवेग विपरीत दिशाओं में हैं।

4.19 संवेग संरक्षण नियम के अनुसार : $100\,v = 0.02 \times 80$

$v = 0.016$ m s^{-1} $= 1.6$ cm s^{-1}

4.20 आवेग, आरंभिक तथा अंतिम दिशाओं के समद्विभाजक रेखा के अनुदिश निर्दिष्ट है।

इसका परिमाण $= 0.15 \times 2 \times 15 \times \cos 22.5° = 4.2$ kg m s^{-1}

4.21 $$v = 2\pi \times 1.5 \times \frac{40}{60} = 2\pi \text{ m s}^{-1}$$

$$T = \frac{mv^2}{R} = \frac{0.25 \times 4\pi^2}{1.5} = 6.6 \text{ N}$$

© NCERT not to be republished

$200 = \frac{mv_{max}^2}{R}$, इससे प्राप्त होता है $v_{max} = 35\ \text{m s}^{-1}$

4.22 प्रथम नियम के अनुसार विकल्प (b) सही है ।

4.23 (a) रिक्त दिक्स्थान (empty space) से घोड़ा-गाड़ी निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है । घोड़ा तथा गाड़ी के बीच पारस्परिक बल निरस्त हो जाते हैं (तृतीय नियम) । फर्श पर, निकाय तथा फर्श के बीच संपर्क बल (घर्षण बल) घोड़े तथा गाड़ी को विराम से गति में लाने का कारण होते हैं ।

(b) शरीर का जो भाग सीट के सीधे संपर्क में नहीं है उसके जड़त्व के कारण ।

(c) घास-लावक (lawn mower) को किसी कोण पर बल आरोपित करके खींचा अथवा धकेला जाता है । जब आप धक्का देते हैं, तब ऊर्ध्वाधर दिशा में संतुलन के लिए अभिलंब बल (N) उसके भार से अधिक होना चाहिए इसके फलस्वरूप घर्षण बल $f (f \propto N)$ बढ़ जाता है और इसीलिए मूवर को चलाने के लिए अधिक बल आरोपित करना पड़ता है । खींचते समय ठीक इसके विपरीत होता है ।

(d) ऐसा वह खिलाड़ी संवेग परिवर्तन की दर को घटाने और इस प्रकार गेंद को रोकने के लिए आवश्यक बल को कम करने के लिए करता है ।

अध्याय 5

5.1 (a) धनात्मक (b) ऋणात्मक (c) ऋणात्मक (d) धनात्मक (e) ऋणात्मक

5.2 (a) 882 J ; (b) –247 J ; (c) 635 J ; (d) 635 J

किसी पिंड पर नेट बल द्वारा किया गया कार्य इसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है ।

5.3 (i) $x > a$; 0 (iii) $x < a, x > b$; $-V_1$

(ii) $-\infty < x < \infty$; V_1 (iv) $-b/2 < x < -a/2, a/2 < x < b/2$; $-V_1$

5.5 (a) रॉकेट; (b) एक संरक्षी बल के तहत किसी पथ पर चलने में किया गया कार्य पिंड की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन का ऋणात्मक होता है । पिंड जब अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करता है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता; (c) गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है जबकि स्थितिज ऊर्जा घटती है, तथा इन दोनों ऊर्जाओं का योग, घर्षण के विरुद्ध ऊर्जा क्षय के कारण, घट जाता है ; (d) दूसरे प्रकरण में ।

5.6 (a) कम हो जाती है; (b) गतिज ऊर्जा ; (c) बाह्य बल; (d) कुल रैखिक संवेग, तथा कुल ऊर्जा भी (यदि दो पिंडों का निकाय वियुक्त है) ।

5.7 (a) F ; (b) F ; (c) F ; (d) F (प्रायः सही परंतु सदैव नहीं, क्यों ?) ।

5.8 (a) नहीं; (b) हाँ; (c) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट के समय रैखिक संवेग संरक्षित रहता है, गतिज ऊर्जा संघट्ट समाप्त होने के पश्चात भी संरक्षित नहीं रहती; (d) प्रत्यास्थ ।

5.9 (ii) t

5.10 (iii) $t^{3/2}$

5.11 12 J

5.12 इलेक्ट्रॉन अपेक्षाकृत अधिक तीव्र है, $v_e/v_p = 13.5$

5.13 प्रत्येक आधे में 0.082 J ; – 0.163 J

5.14 हाँ, (अणु + दीवार) निकाय का संवेग संरक्षित है । दीवार का प्रतिक्षेप संवेग इस प्रकार है कि, दीवार का संवेग + बाहर जाने वाले अणु का संवेग = आने वाले अणु का संवेग । यहाँ यह माना गया है कि दीवार आरंभ में विराम अवस्था में है । तथापि, दीवार का अत्यधिक द्रव्यमान होने के कारण प्रतिक्षेप संवेग इसमें नगण्य वेग उत्पन्न कर पाता है । चूंकि यहाँ गतिज ऊर्जा भी संरक्षित रहती है, अतः संघट्ट प्रत्यास्थ है ।

© NCERT not to be republished

5.15 43.6 kW

5.16 (ii)

5.17 यह अपना समस्त संवेग मेज पर रखी गेंद को स्थानांतरित कर देता है तथा जरा भी ऊपर नहीं उठता ।

5.18 5.3 m s^{-1}

5.19 27 km h^{-1} (चाल में कोई परिवर्तन नहीं)

5.20 50 J

5.21 (a) $m = \rho A v t$ (b) $K = \rho A v^3 t/2$ (c) P = 4.5 kWh

5.22 (a) 49000 J (b) 6.45×10^{-3} kg

5.23 (a) 200 m^2 (b) 14 m × 14 m विमा के किसी बड़े घर की छत से तुलनीय ।

अध्याय 6

6.1 प्रत्येक का ज्यामितीय केंद्र । नहीं, द्रव्यमान केंद्र वस्तु के बाहर स्थित हो सकता है जैसा कि किसी छल्ले, खोखले गोले, खोखले सिलिंडर, खोखले घन आदि प्रकरणों में होता है ।

6.2 H तथा Cl नाभिकों को मिलाने वाली रेखा पर H सिरे से 1.24Å दूरी पर अवस्थित ।

6.3 चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है ; अत: (ट्रॉली + बच्चा) निकाय के द्रव्यमान-केंद्र की चाल अपरिवर्तित (v के बराबर) रहती है । ट्रॉली को दौड़ाए रखने में जो बल सम्मिलित हैं वे सभी इस निकाय के आंतरिक बल हैं ।

6.6 $l_z = xp_y - yp_x$, $l_x = yp_z - zp_y$, $l_y = zp_x - xp_z$

6.8 72 cm

6.9 अगले पहिए पर 3675 N, पिछले पहिए पर 5145 N

6.10 गोला

6.11 गतिज ऊर्जा = 3125 J ; कोणीय संवेग = 62.5 J s

6.12 (a) 100 चक्कर/मिनट (कोणीय संवेग संरक्षण नियम उपयोग कीजिए) ।

(b) नई गतिज ऊर्जा घूर्णन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा की 2.5 गुनी है । बच्चा अपनी आंतरिक ऊर्जा का उपयोग अपनी घूर्णी गतिज ऊर्जा में वृद्धि करने के लिए करता है ।

6.13 25 s^{-2} ; 10 m s^{-2}

6.14 36 kW

6.15 मूल डिस्क के केन्द्र से R/6 पर कटे भाग के केन्द्र के सामने।

6.16 66.0 g

6.17 6.75×10^{12} rad s^{-1}

अध्याय 7

7.1 (a) नहीं

(b) हाँ, यदि अंतरिक्ष यान का आकार उसके लिए इतना अधिक हो कि वह g के परिवर्तन का संसूचण कर सके ।

(c) ज्वारीय प्रभाव दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती होता है और इस अर्थ में यह उन बलों से भिन्न है जो दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं ।

7.2 (a) घटता है (b) घटता है (c) पिंड का द्रव्यमान (d) अधिक

© NCERT not to be republished

7.3 0.63 घटक से छोटा।

7.5 3.54×10^8 years

7.6 (a) गतिज ऊर्जा (b) कम

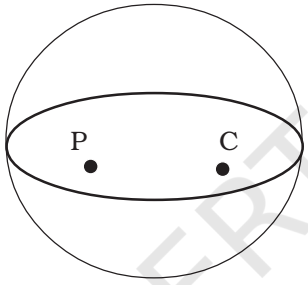
7.7 (a) नहीं, (b) नहीं, (c) नहीं, (d) हाँ

(पलायन वेग पिंड के द्रव्यमान तथा प्रक्षेपण की दिशा पर निर्भर नहीं करता। यह उस बिंदु के गुरुत्वीय विभव पर निर्भर करता है जिससे पिंड का प्रक्षेपण किया गया है। चूँकि यह विभव (अल्पत:) उस बिंदु के अक्षांश तथा ऊँचाई पर निर्भर करता है, अत: पलायन वेग (चाल) भी (अल्पत:) इन्हीं कारकों पर निर्भर करता है।)

7.8 घूमते हुए पिंड की कक्षा में कोणीय संवेग तथा कुल ऊर्जा को छोड़कर शेष सभी राशियों में परिवर्तन होता है।

7.9 (b), (c) तथा (d)

7.10 तथा **7.11** इन दोनों प्रश्नों के लिए रचनाएँ करिए। अर्धगोले को पूरा करके गोला बनाइए।



P तथा C दोनों पर, विभव नियत है तथा इसलिए तीव्रता = 0। अत: (c) और (e) सही हैं।

7.12 2.6×10^8 m

7.13 2.0×10^{30} kg

7.14 1.43×10^{12} m

7.15 28 N

7.16 125 N

7.17 पृथ्वी के केंद्र से 8.0×10^6 m दूरी पर

7.18 31.7 km s^{-1}

7.19 5.9×10^9 J

7.20 2.6×10^6 m s^{-1}

7.21 0, 2.7×10^{-8} J kg^{-1}; माध्य बिंदु पर रखा कोई पिंड किसी अस्थायी संतुलन में है।

© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished

भौतिकी

भाग 2

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक



11089

© NCERT not to be republished

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

Reprint 2026-27

11089—भौतिकी (भाग 2)
कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-515-6 (भाग 1)
ISBN 81-7450-591-1 (भाग 2)

प्रथम संस्करण
जुलाई 2006 श्रावण 1928

पुनर्मुद्रण
जनवरी 2007, मई 2008, जून 2009,
जनवरी 2010, जून 2011, फरवरी 2012,
जनवरी 2013, मार्च 2014, फरवरी 2015,
दिसंबर 2015, मार्च 2017, दिसंबर 2017,
फरवरी 2019 और अक्तूबर 2019

संशोधित संस्करण
नवंबर 2022 अग्रहायण 1944

पुनर्मुद्रण
मार्च 2024 चैत्र 1946
जून 2024 ज्येष्ठ 1946
दिसंबर 2024 पौष 1946

PD 15T+10T M

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2006, 2022

₹ 110.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 70 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा डी.पी. प्रिंटिंग एवं बाईंडिंग, बी-149, ओखला-I, ए-1, नई दिल्ली-110020 द्वारा मुद्रित।

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटोप्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781 021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : *एम.वी. श्रीनिवासन*

मुख्य संपादक : *बिज्ञान सुतार*

मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी) : *जहान लाल*

मुख्य व्यापार प्रबंधक : *अमिताभ कुमार*

संपादक : *नरेश यादव*

सहायक उत्पादन अधिकारी : सायुराज ए.आर.

आवरण एवं चित्रांकन
श्वेता राव

© NCERT not to be republished

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभवों पर विचार करने का कितना अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक जिंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फ़ेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित पाठ्यपुस्तक सलाहकार समिति के अध्यक्ष, प्रोफ़ेसर जे.वी. नार्लीकर और इस पाठ्यपुस्तक के मुख्य सलाहकार, प्रोफ़ेसर ए.डब्ल्यू. जोशी, जिन्होंने इस समिति के कार्य को निर्देशित किया, की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान किया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। प्रोफ़ेसर मृणाल मीरी और प्रोफ़ेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में मानव संसाधन विकास मंत्रालय के अधीन उच्च माध्यमिक शिक्षा विभाग द्वारा गठित निगरानी समिति (मॉनीटरिंग कमेटी) के सदस्यों के अमूल्य समय और सहयोग के लिए हम कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्

नयी दिल्ली

20 दिसंबर 2005

© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन

कोविड-19 महामारी को देखते हुए, विद्यार्थियों के ऊपर से पाठ्य सामग्री का बोझ कम करना अनिवार्य है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 2020* में भी विद्यार्थियों के लिए पाठ्य सामग्री का बोझ कम करने और रचनात्मक नज़रिए से अनुभवात्मक अधिगम के अवसर प्रदान करने पर ज़ोर दिया गया है। इस पृष्ठभूमि में, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने सभी कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित करने की शुरुआत की है। इस प्रक्रिया में रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पहले से ही विकसित कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखा गया है।

पाठ्य सामग्रियों के पुनर्संयोजन में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखा गया है –

- एक ही कक्षा में अलग-अलग विषयों के अंतर्गत समान पाठ्य सामग्री का होना;
- एक कक्षा के किसी विषय में उससे निचली कक्षा या ऊपर की कक्षा में समान पाठ्य सामग्री का होना;
- कठिनाई स्तर;
- विद्यार्थियों के लिए सहज रूप से सुलभ पाठ्य सामग्री का होना, जिसे शिक्षकों के अधिक हस्तक्षेप के बिना, वे खुद से या सहपाठियों के साथ पारस्परिक रूप से सीख सकते हों;
- वर्तमान संदर्भ में अप्रासंगिक सामग्री का होना।

वर्तमान संस्करण, ऊपर दिए गए परिवर्तनों को शामिल करते हुए तैयार किया गया पुनर्संयोजित संस्करण है।

© NCERT not to be republished

© NCERT
not to be republished

प्राक्कथन

एक दशक से भी अधिक समय पूर्व, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने प्रो. टी.वी. रामकृष्णन, एफ.आर.एस., की अध्यक्षता में लेखकों के एक दल की सहायता से कक्षा 11 तथा 12 के लिए लिखी गई पाठ्यपुस्तकें प्रकाशित की थीं। इन पुस्तकों को विद्यार्थियों तथा शिक्षकों ने समान रूप से भलीभांति अपनाया। वास्तव में ये पुस्तकें मील का पत्थर तथा विचारधारा निर्धारित करने वाली सिद्ध हुईं। तथापि, पाठ्यपुस्तकों और विशेषकर विज्ञान की पुस्तकों का विकास परिवर्तनशील बोध, आवश्यकता, पुनर्निवेशन तथा विद्यार्थियों, शिक्षाविदों तथा समाज के अनुभवों की दृष्टि से एक गत्यात्मक प्रक्रिया है। विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2000 पर आधारित संशोधित पाठ्यक्रमों के अनुरूप भौतिकी की पाठ्यपुस्तकों का एक दूसरा संस्करण प्रोफेसर सुरेश चन्द्र के निर्देशन में प्रकाशित किया गया जो अब तक लागू था। हाल में राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 (एन.सी.एफ. 2005) प्रकाशित की तथा विद्यालयी स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान पाठ्यक्रम में तदनुसार संशोधन किया गया। *उच्चतर माध्यमिक स्तर के लिए पाठ्यक्रम* (एन.सी.ई.आर.टी., 2005) विकसित किया गया है। कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तक में 15 अध्याय दो भागों में हैं। भाग 1 में प्रथम आठ अध्याय हैं जबकि भाग 2 में अगले सात अध्याय हैं। प्रस्तुत पुस्तक वर्तमान पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के नवीन प्रयास का परिणाम है और साथ ही यह आशा है कि विद्यार्थी भौतिकी के सुंदरता एवं तर्क का महत्त्व समझेंगे। उच्चतर माध्यमिक स्तर के आगे विद्यार्थी भौतिकी का अध्ययन जारी रख सकते हैं या नहीं भी परन्तु हम मानते हैं कि वे चाहे किसी भी दूसरे विषय का अध्ययन करें, उसमें वे भौतिकी की सोच–विचार प्रक्रिया को उपयोगी पाएँगे। यह विषय, कुछ भी हों, जैसे – अर्थव्यवस्था, प्रशासन, सामाजिक विज्ञान, पर्यावरण, अभियांत्रिकी, प्रौद्योगिकी, जीवविज्ञान या चिकित्साशास्त्र। उन विद्यार्थियों के लिए, जो भौतिकी का अध्ययन इस स्तर के आगे जारी रखेंगे, इस पुस्तक में विकसित विषय निश्चय ही एक सुदृढ़ आधार प्रदान करेगा।

विज्ञान और प्रौद्योगिकी की लगभग सभी शाखाओं के ज्ञान का आधारभूत भौतिकी है। यह उल्लेख करना रोचक है कि भौतिकी की धारणाओं एवं विचारों का उपयोग ज्ञान की दूसरी भाषाओं; जैसे – अर्थशास्त्र, वाणिज्य और व्यवहार विज्ञान में भी बढ़ता जा रहा है। हम इस तथ्य से अभिज्ञ हैं कि भौतिकी के कुछ सरल आधारिक सिद्धांत प्रायः प्रत्यात्मक रूप में जटिल होते हैं। इस पुस्तक में हमने 'प्रत्यात्मक सामंजस्य' लाने का प्रयास किया है। शैक्षणिक तथा विषय की परिशुद्धता को बनाए रखकर सरल एवं सुबोध भाषा का प्रयोग करना हमारे प्रयास का केंद्र बिंदु है। भौतिकी विषय की प्रकृति ही ऐसी है जिसके लिए कुछ न्यूनतम गणित का उपयोग करना आवश्यक हो जाता है। जहाँ तक संभव हो सका है हमने गणितीय सूत्रों को तार्किक ढंग से विकसित करने का प्रयास किया है।

भौतिकी के विद्यार्थियों एवं अध्यापकों को पूर्ण रूप से समझना चाहिए कि भौतिकी विषय को याद करने की बजाय बोधगम्य बनाने की आवश्यकता होती है। जब हम माध्यमिक से उच्चतर माध्यमिक या आगे की स्तर को जाते हैं तो भौतिकी में मुख्य रूप से चार अवयव होते हैं : (i) गणित का पर्याप्त सुदृढ़ आधार, (ii) तकनीकी शब्द एवं पद जिनके अंग्रेजी भाषा में सामान्य अर्थ एकदम भिन्न हो सकते हैं, (iii) नयी जटिल अवधारणाएँ, तथा (iv) प्रायोगिक आधार। भौतिकी में गणित की आवश्यकता है क्योंकि हम अपने चारों ओर के परिवेश का यथार्थ चित्रण विकसित तथा अपने प्रेक्षणों को मेय राशियों के पदों में व्यक्त करना चाहते हैं। भौतिकी कणों के नए गुणों की खोज करती है तथा प्रत्येक कण के लिए एक नाम देना चाहती है। शब्द आमतौर से अंग्रेजी, लैटिन, या ग्रीक भाषा से लेते हैं परन्तु भौतिकी इन शब्दों को एकदम नया अर्थ देती है। इसको समझने के लिए आप ऊर्जा, बल, शक्ति, आवेश, स्पिन या इस तरह के अन्य शब्दों के मान किसी

© NCERT not to be republished

मानक अंग्रेजी शब्दावली में देख सकते हैं तथा इनके अर्थों को भौतिकी में प्रयुक्त इन शब्दों के अर्थों से तुलना कर सकते हैं। भौतिकी कणों के व्यवहार को समझाने के लिए जटिल एवं अनूठी अवधारणाओं को विकसित करती है। अन्ततः यह याद रखना होगा कि भौतिकी प्रेक्षणों और प्रयोगों पर आधारित है – इनके अभाव में किसी सिद्धांत को भौतिकी के क्षेत्र में मान्यता नहीं मिलती है।

इस पुस्तक में कुछ विशिष्टताएँ हैं। हमें पूर्ण आशा एवं विश्वास है कि ये विद्यार्थियों के लिए पुस्तक की उपयोगिता में वृद्धि करेंगी। अध्याय की विषय-वस्तु पर तेजी से सरसरी दृष्टि डालने के लिए प्रत्येक अध्याय के अंत में **सारांश** दिया गया है। इसके पश्चात् **विचारणीय विषय** दिए गए हैं जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उत्पन्न होने वाली संभावित भ्रांतियों, अध्याय में दिए कुछ प्रकथनों/सिद्धांतों में छिपी उलझनों तथा अध्याय से उपलब्ध ज्ञान के उपयोग के लिए आवश्यक 'चेतावनियों' की ओर इंगित करते हैं। ये कुछ विचार उत्तेजक प्रश्न भी उठाते हैं जिनसे विद्यार्थी भौतिकी के परे जीवन पर विचार कर सके। इन 'बिंदुओं' पर सोचना तथा अपने मस्तिष्क का अनुप्रयोग करना विद्यार्थियों को रोचक लगेगा। इसके अतिरिक्त संकल्पनाओं के स्पष्टीकरण तथा/अथवा दैनिक जीवन की परिस्थितियों में इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों की व्याख्या के लिए बड़ी संख्या में पाठ्य सामग्री में 'हल सहित अभ्यासों' का समावेश किया गया है। यदा-कदा भौतिकी विषय के क्रमिक विकास के प्रति जिज्ञासा को शांत करने के लिए ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्यों को भी सम्मिलित किया गया है। बहुत से अध्यायों में या तो इसी उद्देश्य के लिए अथवा उन विषयवस्तुओं जिनमें विद्यार्थियों को अतिरिक्त ध्यान देने की आवश्यकता होती है, उनकी कुछ विशेष विशिष्टताओं की ओर आकर्षित करने के उद्देश्य से विषयवस्तु को 'बॉक्स' में दिया गया है। पुस्तक के अंत में पुस्तक में प्रयुक्त मुख्य शब्दों की सूची दी गई है।

भौतिकी की विशेष प्रकृति, धारणाओं की समझ के अलावा कुछ परिपाटियों का ज्ञान, आधारभूत गणितीय साधन, महत्त्वपूर्ण भौतिक स्थिरांकों के आंकिक मान, सूक्ष्म स्तर से गैलेक्सीन स्तर के परिसर तक उपयोगी मात्रकों की प्रणाली की अपेक्षा करती है। विद्यार्थियों की सहायता के लिए हमने पुस्तक के अंत में परिशिष्ट A1 से A9 के रूप में आवश्यक साधन एवं डाटाबेस दिए हैं। अतिरिक्त जानकारी या किसी अध्याय विशेष में वर्णित विषय के उपयोग के लिए कुछ अध्यायों के अंत में भी कुछ परिशिष्ट दिए गए हैं।

सुस्पष्ट चित्र प्रदान करने की ओर विशेष ध्यान दिया गया है। चित्रों की स्पष्टता में वृद्धि के लिए उन्हें 'दो रंगों' में रेखांकित किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में पर्याप्त संख्या में अभ्यास दिए गए हैं। इनमें से कुछ जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से संबंधित हैं। विद्यार्थियों से अनुरोध है कि वे इन्हें हल करें और ऐसा करते समय वे इन अभ्यासों को अत्यधिक शिक्षाप्रद पाएंगे। कुछ अतिरिक्त अभ्यास भी दिए गए हैं जो अधिक कठिन हैं। कुछ अभ्यासों को हल करने के लिए संकेत एवं उत्तर दिए गए हैं। संपूर्ण पुस्तक में SI मात्रकों का उपयोग किया गया है। निर्धारित पाठ्यक्रम/पाठ्यचर्या के भाग के रूप में और साथ ही भौतिकी के लक्ष्य में सहायक के रूप में अध्याय 2 में "मात्रक और मापन" का विस्तृत विवरण दिया गया है। इस अध्याय में दिया गया एक 'बॉक्स' एक लंबी वक्रीय लाइन जैसी सरल वस्तु के मापन से कठिनाइयों को उजागर करता है। SI मूल मात्रकों एवं अन्य संबंधित मात्रकों की सारणी इस अध्याय में वर्तमान मान्य परिभाषाओं को मन में बैठाने तथा आज मापन में उपलब्ध शुद्धता की उच्चकोटि को स्पष्ट करने के लिए की गई है। यहाँ दी गई संख्याओं को न तो कंठस्थ करने की आवश्यकता है और न इन्हें परीक्षा में पूछना चाहिए।

विद्यार्थियों, अध्यापकों तथा आम जनता में यह धारणा है कि माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तर में तीक्ष्ण चढ़ाव है। परन्तु तनिक सोच दर्शाती है कि शिक्षा की वर्तमान व्यवस्था में ऐसा होगा ही। माध्यमिक स्तर तक की शिक्षा सामान्य शिक्षा है जहाँ विद्यार्थी को कई विषयों, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, गणित, भाषा का अध्ययन प्राथमिक स्तर का करना होता है। उच्चतर माध्यमिक या आगे की शिक्षा में, उद्यम के किसी चुने क्षेत्र में व्यावसायिक दक्षता ग्रहण करना होता है। इसकी तुलना आप निम्न स्थिति से कर सकते हैं। बच्चे

© NCERT not to be republished

अपने घरों के अंदर या बाहर या गलियों में क्रिकेट या बैडमिंटन खेलते हैं। परन्तु उनमें से कुछ स्कूल टीम, फिर जिले की टीम, फिर राज्य टीम और राष्ट्रीय टीम तक पहुँचना चाहते हैं। प्रत्येक स्तर पर तीक्ष्ण चढ़ाव होगा ही। अधिक परिश्रम जरूरी होता है यदि विद्यार्थी विज्ञान, साहित्य, भाषा, संगीत, कला, वाणिज्य, अर्थप्रबन्ध, वास्तुकला के क्षेत्र में शिक्षा ग्रहण करना चाहते हैं या वे खिलाड़ी या फैशन डिज़ाइनर बनना चाहते हैं।

इस पुस्तक को पूर्ण कर पाना बहुत से व्यक्तियों की सहज स्वाभाविक एवं सतत् सहायता के कारण ही संभव हो सका है। पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति डा. आर.एच. रेबेगकर का अध्याय 4 में उनके बॉक्स विषय तथा डॉ. एफ.आई. सुर्वे का अध्याय 15 में उनके बॉक्स विषय के उपयोग की अनुमति के लिए आभारी है। विज्ञान शिक्षा में सुधार के लिए राष्ट्रीय प्रयासों के एक भाग के रूप में इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण का कार्य सौंपने के लिए हम राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक के प्रति अपना आभार प्रकट करते हैं। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष तथा संकाय के अन्य सदस्य इस उद्यम में सदैव ही हर संभव ढंग से हमारी सहायता के लिए तत्पर रहे, हम उनके भी अत्यंत अभारी हैं।

पुरानी पाठ्यपुस्तक को शिक्षकों, विद्यार्थियों तथा विशेषज्ञों का श्रेष्ठ विद्वतापूर्ण निवेश प्राप्त हुआ जिन्होंने पिछले कुछ वर्षों में परिमार्जन के लिए सुझाव दिए। हम उन सभी के कृतज्ञ हैं जिन्होंने एन.सी.ई.आर.टी. को अपने सुझाव भेजे। हम प्रथम पाण्डुलिपि पर चर्चा तथा परिमार्जन के लिए आयोजित समीक्षा कार्यगोष्ठी तथा सम्पादन कार्यगोष्ठी के सदस्यों के भी आभारी हैं। हम अध्यक्ष तथा उनके लेखन मंडल को उनके द्वारा 1988 में लिखी गई पाठ्यसामग्री के लिए धन्यवाद देते हैं जिसने 2002 संस्करण तथा जिसने हमें इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने का आधार तथा संदर्भ प्रदान किया। यदा-कदा पुरानी पुस्तकों के कुछ बड़े भागों को, विशेषकर जिन्हें विद्यार्थियों/शिक्षकों ने सराहा है, विद्यार्थियों की भावी पीढ़ी के हित को ध्यान में रखकर, प्रस्तुत पुस्तक में अपनाया/रूपांतरित किया है।

हम अपने सम्मानित प्रयोक्ताओं, विशेषकर विद्यार्थियों तथा शिक्षकों से प्राप्त समीक्षा एवं सुझावों का आदर करते हैं। हम अपने युवा पाठकों की भौतिकी के रोमांचकारी कार्यक्षेत्र की ओर अग्रसर होने की कामना करते हैं।

ए. डब्ल्यू. जोशी
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

© NCERT not to be republished

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1][**संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य**] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2][**राष्ट्र की एकता और अखंडता**] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित पाठ्यपुस्तकों की सलाहकार समिति

जे.वी. नार्लीकर, *इमेरिटस प्रोफ़ेसर*, अंतर-विश्वविद्यालय केंद्र : खगोलविज्ञान और खगोलभौतिकी, पुणे

मुख्य सलाहकार

ए.डब्ल्यू. जोशी, *प्रोफ़ेसर*, हानरेरी विजिटिंग साइंटिस्ट, एनसीआरए, पुणे
(भूतपूर्व प्रोफ़ेसर, भौतिकी विभाग, पुणे विश्वविद्यालय)

सदस्य

अनुराधा माथुर, *पी.जी.टी.*, मॉडर्न स्कूल, वसंत विहार, नयी दिल्ली
आर.जोशी. *प्रवक्ता* (एस.जी.), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एच.सी. प्रधान, *प्रोफ़ेसर*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केन्द्र, टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई
एन. पंचपकेशन, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस. राय चौधरी, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस.के. दास, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एस.एन. प्रभाकर, *पी.जी.टी.*, डी.एम.स्कूल, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर
गगन गुप्त, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
चित्रा गोयल, *पी.जी.टी.*, राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, त्यागराज नगर, लोदी रोड, नयी दिल्ली
टी.जे. सिंह, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, मणिपुर विश्वविद्यालय, इम्फाल
पी.के. श्रीवास्तव, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, निदेशक, सीएसईसी, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
पी.के. मोहंती, *पी.जी.टी.*, सैनिक स्कूल, भुवनेश्वर
पी.सी. अग्रवाल, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., भुवनेश्वर
वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
शेर सिंह, *पी.जी.टी.*, नवयुग स्कूल, लोदी रोड, नयी दिल्ली

सदस्य-समन्वयक (अंग्रेजी संस्करण)

वी.के. शर्मा, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

हिंदी अनुवादक

आर.एस. दास, *अवकाश प्राप्त उपप्रधानाचार्य*, बलवंत राय मेहता विद्याभवन सीनियर सेकंडरी स्कूल, नयी दिल्ली
ओ.पी. खंडेलवाल, *अवकाश प्राप्त रीडर*, द्रोणाचार्य राजकीय महाविद्यालय, गुड़गाँव, हरियाणा
जे.पी. अग्रवाल, *अवकाश प्राप्त प्राचार्य*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
विनोद प्रकाश, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद, उ.प्र.

सदस्य-समन्वयक

वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

© NCERT not to be republished

आभार

पुस्तक के अंतिम स्वरूप के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के बारे में परिषद् आभार व्यक्त करती है: वी.बी. त्रिपाठी, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, आई.आई.टी., नयी दिल्ली; एम.एन. बापट, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर; डी. प्रसाद, *वरिष्ठ वैज्ञानिक अधिकारी* (अवकाश प्राप्त), विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी विभाग, नयी दिल्ली; जे.सी. शर्मा, *शिक्षा अधिकारी*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् एम. चन्द्रा, *प्रोफ़ेसर* तथा *विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली की आभारी है।

परिषद् सन 2017 में पाठ्य के परिष्करण में अमूल्य योगदान के लिए एके श्रीवास्तव, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; अरनब सेन, एनईआरआईई, शिलांग; एलएस चौहान, आरआईई, भोपाल; ओएन अवस्थी (रिटायर्ड), आरआईई, भोपाल; रचना गर्ग, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; रामन नंबूदरी, आरआईई, मैसुरू; आर आर कोइरेंग, डीसीएस, एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; शशि प्रभा, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली और एसवी शर्मा, आरआईई, अजमेर का भी आभार व्यक्त करती है।

परिषद् गीता, अरविंद शर्मा, इन्द्र कुमार, *डी.टी.पी. ऑपरेटर*; रेशमा नेगी, सतीश झा, विभूति नाथ झा, यतेन्द्र यादव, *कॉपी एडीटर*; अनुराधा, रणधीर ठाकुर, सीमा यादव, *प्रूफ रीडर*; दीपक कपूर, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. और प्रकाशन प्रभाग के सहयोग हेतु हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

© NCERT not to be republished

अध्यापकों के लिए संदेश

पाठ्यचर्या को शिक्षार्थी-केंद्रित बनाने के लिए अति आवश्यक है कि विद्यार्थी अधिगम प्रक्रिया में सक्रिय रूप से भाग लें। प्रति सप्ताह या प्रति छः कक्षाओं पर एक बार इस तरह के सेमिनार और विचारों का आदान-प्रदान आयोजित होना चाहिए। भागीदारों के बीच परिचर्चा के लिए, इस पुस्तक में कुछ विशेष विषयों के संदर्भ में, कुछ सुझाव नीचे दिए गये हैं।

विद्यार्थियों को पाँच या छः के समूह में व्यवस्थित कीजिए। यदि आवश्यक हो, तो शिक्षण वर्ष में इन समूहों के सदस्यों में क्रमावर्तन करें।

परिचर्चा के विषय को बोर्ड पर या कागज पर लिखें। विद्यार्थियों को निर्देश दीजिए कि वे प्रश्नों के उत्तर या अपनी प्रतिक्रिया, जो भी अभीष्ट है, दिए हुए कागज पर लिखें। तत्पश्चात अपने समूह में चर्चा करें तथा इन पृष्ठों पर संशोधन या टिप्पणी जोड़ें। फिर इन सबकी उसी कक्षा में या किसी और कक्षा में परिचर्चा करें। विद्यार्थियों के उत्तर पृष्ठों का मूल्यांकन भी किया जा सकता है। प्रस्तुत पुस्तक से हम तीन सम्भावित विषयों को प्रस्तावित करते हैं। वास्तव में, प्रथम दो विषय, बहुत ही सामान्य हैं तथा पिछले चार या अधिक शताब्दियों के दौरान विज्ञान के विकास से सम्बन्धित हैं। प्रत्येक सेमिनार के लिए विद्यार्थी तथा अध्यापक, इस तरह के अन्य विषय को सुझा सकते हैं।

1. विचार जिसने सभ्यता को बदल दिया

मान लीजिए मानव जाति धीरे-धीरे विलुप्त हो रही है और आने वाली पीढ़ी या परकीय आगंतुक के लिए कोई संदेश छोड़ना है। प्रसिद्ध भौतिक विज्ञानी आर.पी. फाइनमैन आने वाली पीढ़ी के लिए निम्न संदेश छोड़ना चाहते थे :

''पदार्थ अणुओं से बना है''

एक महिला छात्रा तथा साहित्य की अध्यापिका निम्न संदेश छोड़ना चाहती थी :

''जल विद्यमान है, अतः मानव जाति का अस्तित्व रहेगा''

किसी अन्य व्यक्ति ने सोचा : ''गति के लिए पहिए का विचार''

आने वाली पीढ़ी के लिए आप में से प्रत्येक जो संदेश छोड़ना चाहेंगे उसे लिखें। तब अपने समूह में इस पर चर्चा करें, और इसमें परिवर्तन करें या इसमें और विचार जोड़ें, यदि आप अपना विचार बदलना चाहते हैं। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इससे संबंधित परिचर्चा में भाग लें।

2. न्यूनीकरण

गैस का अणुगति सिद्धान्त 'बड़े को छोटे से' या 'मैक्रो को माइक्रो' से संबंधित करता है। एक निकाय के रूप में गैस इसके अवयवों, अणुओं से संबंधित है। किसी निकाय को उसके अवयवों के गुणों से संबंधित करके वर्णित करना *न्यूनीकरण* कहलाता है। यह विधि व्यष्टि के साधारण एवं भविष्यवाची व्यवहार के आधार पर समूह के व्यवहार को स्पष्ट करती है। इस उपगमन में सूक्ष्मदर्शी गुणों एवं स्थूल प्रेक्षणों में एक परस्पर निर्भरता होती है। क्या यह विधि उपयोगी है? इस प्रकार के उपगमन की भौतिकी और रसायन विज्ञान के अतिरिक्त अन्य विषयों में अपनी सीमाएँ होती हैं - सम्भव है इन विषयों में भी सीमाएँ हों। किसी कैनवस पर बने चित्र को इसमें प्रयुक्त रसायनों के गुणों के समूह से संबंधित कर विवेचना *नहीं* की जा सकती है। वास्तविकता अवयवों के योग से कहीं परे है।

प्रश्न : क्या आप अन्य क्षेत्र बता सकते हैं जहाँ इस प्रकार के उपगमन को उपयोग में लाया जाता है?

किसी निकाय का संक्षेप में वर्णन कीजिए जिसका उसके अवयवों के पदों में पूर्ण रूप से विवेचना किया जा सके। एक अन्य निकाय का भी वर्णन कीजिए जिसमें ऐसा सम्भव नहीं है। अपने समूह के अन्य सदस्यों से इस पर विचार-विमर्श करें और अपने विचार लिखें। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इस पर आयोजित परिचर्चा में भाग लें।

3. ऊष्मा का आण्विक उपगमन

आपके विचार से निम्न अवस्थाओं में क्या होगा, बताएँ।

कोई आवेष्टन एक सरंध्र दीवार से दो भागों में पृथक है। एक भाग नाइट्रोजन गैस (N_2) तथा दूसरा कार्बन डाइऑक्साइड (CO_2) से भरा है। गैसें एक भाग से दूसरे भाग में विसरित होती हैं।

प्रश्न 1 : दोनों गैसें एकसमान मात्रा में विसरित होंगी? यदि नहीं, तो कौन सी गैस अधिक विसरित होगी? कारण सहित बताइए।

प्रश्न 2 : क्या दाब एवं ताप अपरिवर्तित रहेंगे? यदि नहीं तो दोनों में क्या परिवर्तन होगा? कारण सहित बताइए।

अपने उत्तर लिखिए। समूह के अन्य सदस्यों के साथ विचार-विमर्श करें तथा उत्तर को परिष्कृत करें या टिप्पणी जोड़ें। उत्तर अध्यापक को दें तथा परिचर्चा में भाग लें।

विद्यार्थी तथा अध्यापक पाएँगे कि इस तरह के परिचर्चा तथा विचार-विमर्श, न केवल भौतिकी में, बल्कि विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान की समझ में हमें अत्यधिक सहायक होते हैं। इससे विद्यार्थियों की सोच में परिपक्वता आएगी।

© NCERT not to be republished

भौतिकी भाग 1 की विषय-सूची

अध्याय 1
मात्रक और मापन 1

अध्याय 2
सरल रेखा में गति 13

अध्याय 3
समतल में गति 28

अध्याय 4
गति के नियम 50

अध्याय 5
कार्य, ऊर्जा और शक्ति 72

अध्याय 6
कणों के निकाय तथा घूर्णी गति 94

अध्याय 7
गुरुत्वाकर्षण 130

परिशिष्ट 148

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर 164

© NCERT not to be republished

विषय-सूची

आमुख *iii*
पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन *v*
प्राक्कथन *vii*
अध्यापकों के लिए संदेश *xiii*

अध्याय 8
ठोसों के यांत्रिक गुण

8.1 भूमिका 173
8.2 प्रतिबल तथा विकृति 174
8.3 हुक का नियम 175
8.4 प्रतिबल-विकृति वक्र 175
8.5 प्रत्यास्थता गुणांक 176
8.6 द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के अनुप्रयोग 181

अध्याय 9
तरलों के यांत्रिकी गुण

9.1 भूमिका 187
9.2 दाब 187
9.3 धारारेखी प्रवाह 194
9.4 बर्नूली का सिद्धांत 195
9.5 श्यानता 198
9.6 पृष्ठ तनाव 200

अध्याय 10
द्रव्य के तापीय गुण

10.1 भूमिका 211
10.2 ताप तथा ऊष्मा 211
10.3 ताप मापन 212
10.4 आदर्श गैस समीकरण तथा परम ताप 212
10.5 तापीय प्रसार 213
10.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता 217
10.7 ऊष्मामिति 218
10.8 अवस्था परिवर्तन 219
10.9 ऊष्मा स्थानांतरण 223
10.10 न्यूटन का शीतलन नियम 229

© NCERT not to be republished

अध्याय 11
ऊष्मागतिकी

11.1 भूमिका 237
11.2 तापीय साम्य 238
11.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम 239
11.4 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य 240
11.5 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम 241
11.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता 242
11.7 ऊष्मागतिकीय अवस्था चर तथा अवस्था का समीकरण 244
11.8 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम 244
11.9 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम 247
11.10 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम 247
11.11 कार्नो इंजन 248

अध्याय 12
अणुगति सिद्धांत

12.1 भूमिका 255
12.2 द्रव्य की आण्विक प्रकृति 255
12.3 गैसों का व्यवहार 257
12.4 आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत 260
12.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम 263
12.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता 265
12.7 माध्य मुक्त पथ 266

अध्याय 13
दोलन

13.1 भूमिका 271
13.2 दोलन और आवर्ती गति 272
13.3 सरल आवर्त गति 274
13.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति 276
13.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण 278
13.6 सरल आवर्त गति के लिए बल का नियम 279
13.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा 280
13.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय 282

© NCERT not to be republished

अध्याय 14

तरंगें

14.1	भूमिका	290
14.2	अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें	292
14.3	प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध	293
14.4	प्रगामी तरंग की चाल	296
14.5	तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत	299
14.6	तरंगों का परावर्तन	301
14.7	विस्पंदें	306

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर 313

ग्रंथ सूची 319

पारिभाषिक शब्दावली 321

© NCERT not to be republished

मुख्य आवरण अभिकल्पना

नोबल फाउंडेशन की वेबसाइट **http://www.nobelprize.org**
से रूपांतरित

प्रबल नाभिकीय बल नाभिक में प्रोटानों तथा न्यूट्रानों को बांधता है तथा प्रकृति के चार मूल बलों में सबसे अधिक शक्तिशाली है। प्रबल नाभिकीय बल से जुड़ी एक गुत्थी सुलझा ली गई है। प्रोटान में अन्तर्निहित तीनों क्वार्क यदा कदा मुक्त प्रतीत होते हैं यद्यपि किसी मुक्त क्वार्क का प्रेक्षण अभी तक नहीं हुआ है। क्वार्कों में एक क्वान्टम यांत्रिकीय गुण होता है जिसे 'कलर' कहते हैं तथा ये एक दूसरे से 'ग्लूऑन्स' (प्राकृतिक सरेस) नामक बलों के विनिमय से अन्योन्यक्रिया करते हैं।

पृष्ठ आवरण

भारतीय अंतरिक्ष अनुसंधान संगठन **(ISRO)** की वेबसाइट
http://www.isro.gov.in से रूपांतरित

कार्टोसैट-1 (CARTOSAT-1) *अति निपुणता वाला सुदूर संवेदन उपग्रह है। यह भारतीय अंतरिक्ष शोध संस्थान* (ISRO) *द्वारा इंडियन रिमोट सेन्सिंग सेटेलाइट्स श्रेणी में निर्मित ग्यारहवां उपग्रह है। मोचन क्षण पर इसकी संहति* 156 kg *थी, तथा इसे* ISRO *के ध्रुवीय उपग्रह प्रमोचन वाहन* PSLV-C6 *द्वारा* 618 km *ऊँचे ध्रुवी सूर्य तुल्यकालिक कक्ष में प्रमोचित किया गया। इसका उपयोग मुख्य रूप से मानचित्र कला के क्षेत्र में है।*

© NCERT not to be republished

अध्याय 8

11089CH09

ठोसों के यांत्रिक गुण

8.1 भूमिका
8.2 प्रतिबल तथा विकृति
8.3 हुक का नियम
8.4 प्रतिबल-विकृति वक्र
8.5 प्रत्यास्थता गुणांक
8.6 द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के अनुप्रयोग

सारांश
विचारणीय बिंदु
अभ्यास

8.1 भूमिका

अध्याय 7 में हमने पिण्डों के घूर्णन के बारे में पढ़ा और यह समझा कि किसी पिण्ड की गति इस बात पर कैसे निर्भर करती है कि पिण्ड के अंदर द्रव्यमान किस प्रकार वितरित है। हमने अपने अध्ययन को केवल दृढ़ पिण्डों की सरल स्थितियों तक ही सीमित रखा था। साधारणतया दृढ़ पिण्ड का अर्थ होता है एक ऐसा कठोर ठोस पदार्थ जिसकी कोई निश्चित आकृति तथा आकार हो। परन्तु वास्तव में पिण्डों को तनित, संपीडित अथवा बंकित किया जा सकता है। यहाँ तक कि किसी काफी दृढ़ इस्पात की छड़ को भी एक पर्याप्त बाह्य बल लगाकर विरूपित किया जा सकता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि ठोस पिण्ड पूर्ण रूप से दृढ़ नहीं होते हैं।

किसी ठोस की एक निश्चित आकृति तथा आकार होता है। किसी पिण्ड की आकृति अथवा आकार को बदलने (या विरूपित करने) के लिए एक बल की आवश्यकता होती है। यदि किसी कुण्डलित स्प्रिंग के सिरों को धीरे से खींचकर विस्तारित किया जाए तो स्प्रिंग की लंबाई थोड़ी बढ़ जाती है। अब यदि स्प्रिंग के सिरों को छोड़ दें तो वह अपनी प्रारंभिक आकृति एवं आकार को पुनः प्राप्त कर लेगी। किसी पिण्ड का वह गुण, जिससे वह प्रत्यारोपित बल को हटाने पर अपनी प्रारंभिक आकृति एवं आकार को पुनः प्राप्त कर लेता है, **प्रत्यास्थता** कहलाता है तथा उत्पन्न विरूपण **प्रत्यास्थ विरूपण** कहलाता है। जब एक पंक पिण्ड पर बल लगाते हैं तो पिण्डक में अपना प्रारंभिक आकार प्राप्त करने की प्रवृत्ति नहीं होती है और यह स्थायी रूप से विरूपित हो जाता है। इस प्रकार के पदार्थ को **प्लास्टिक** तथा पदार्थ के इस गुण को **प्लास्टिकता** कहते हैं। पंक और पुटी लगभग आदर्श प्लैस्टिक हैं।

अभियांत्रिकी डिज़ाइन में द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार की अहम भूमिका होती है। उदाहरण के लिए, किसी भवन को डिज़ाइन करते समय इस्पात, कांक्रीट आदि द्रव्यों की प्रत्यास्थ प्रकृति का ज्ञान आवश्यक है। पुल, स्वचालित वाहन, रज्जुमार्ग आदि की डिज़ाइन के लिए भी यही बात सत्य है। यह प्रश्न भी पूछा जा सकता है कि क्या हम ऐसा वायुयान डिज़ाइन कर सकते हैं जो बहुत हलका

© NCERT not to be republished

फिर भी बहुत मजबूत हो? क्या हम एक ऐसा कृत्रिम अंग डिज़ाइन कर सकते हैं जो अपेक्षाकृत हलका किन्तु अधिक मजबूत हो? रेल पटरी की आकृति **I** के समान क्यों होती है? काँच क्यों भंगुर होता है जबकि पीतल ऐसा नहीं होता? इस प्रकार के प्रश्नों का उत्तर इस अध्ययन से प्रारंभ होगा कि अपेक्षाकृत साधारण प्रकार के लोड या बल भिन्न-भिन्न ठोस पिण्डों को किस प्रकार विरूपित करने का कार्य करते हैं। इस अध्याय में हम ठोसों के प्रत्यास्थ व्यवहार और यांत्रिक गुणों का अध्ययन करेंगे जो ऐसे बहुत से प्रश्नों का उत्तर देगा।

8.2 प्रतिबल तथा विकृति

जब किसी पिण्ड पर एक बल लगाया जाता है तो उसमें थोड़ा या अधिक विरूपण हो जाता है जो पिण्ड के द्रव्य की प्रकृति तथा विरूपक बल के मान पर निर्भर करता है। हो सकता है कि बहुत से द्रव्यों में यह विरूपण बेशक दिखाई नहीं पड़ता, फिर भी यह होता है। जब किसी पिण्ड पर एक विरूपक बल लगाया जाता है तो उसमें एक प्रत्यानयन बल विकसित हो जाता है, जैसा कि पहले कहा जा चुका है। यह प्रत्यानयन बल मान में प्रत्यारोपित बल के बराबर तथा दिशा में उसके विपरीत होता है। एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाले प्रत्यानयन बल को **प्रतिबल** कहते हैं। यदि पिण्ड के क्षेत्रफल A वाले किसी अनुप्रस्थ काट की लंबवत् दिशा में लगाए गए बल का मान F हो तो

$$\text{प्रतिबल} = F/A \qquad (8.1)$$

प्रतिबल की SI इकाई $\mathrm{N\,m^{-2}}$ तथा इसका विमीय सूत्र $[\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}]$ होता है।

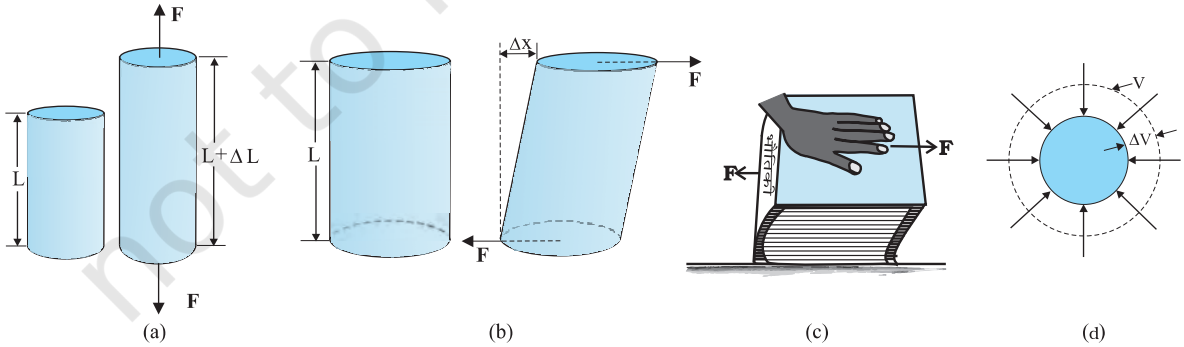
जब किसी ठोस पर कोई बाह्य बल कार्य करता है तो इसकी विमाएँ तीन प्रकार से बदल सकती हैं। ये चित्र 8.1 में दिखाए गए हैं। चित्र 8.1(a) में, एक बेलन को उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद की लंबवत् दिशा में दो समान बल लगाकर तानित किया गया है। इस स्थिति में, एकांक क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल को **तनन प्रतिबल** कहते हैं। यदि प्रत्यारोपित बलों के कार्य से बेलन संपीडित हो जाए तो एकांक क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल को **संपीडन प्रतिबल** कहते हैं। तनन या संपीडन प्रतिबल को अनुदैर्घ्य प्रतिबल भी कहा जा सकता है।

दोनों ही स्थितियों में बेलन की लंबाई में अंतर हो जाता है। पिण्ड (यहाँ बेलन) की लंबाई में परिवर्तन ΔL तथा उसकी प्रारंभिक लंबाई L के अनुपात को **अनुदैर्घ्य विकृति** कहते हैं।

$$\text{अनुदैर्घ्य विकृति} = \frac{\Delta L}{L} \qquad (8.2)$$

यदि दो बराबर और विरोधी विरूपक बल बेलन के अनुप्रस्थ परिच्छेद के समांतर लगाए जाएँ, जैसा चित्र 8.1(b) में दिखाया गया है, तो बेलन के सम्मुख फलकों के बीच सापेक्ष विस्थापन हो जाता है। लगाए गए स्पर्शी बलों के कारण एकांक क्षेत्रफल पर उत्पन्न प्रत्यानयन बल को **स्पर्शी** या **अपरूपण प्रतिबल** कहते हैं। लगाए गए स्पर्शी बल के परिणामस्वरूप बेलन के सम्मुख फलकों के बीच एक सापेक्ष विस्थापन Δx होता है, जैसा चित्र 8.1(b) में दिखाया गया है। इस प्रकार उत्पन्न विकृति को **अपरूपण विकृति** कहते हैं और इसे फलकों के सापेक्ष विस्थापन Δx तथा बेलन की लंबाई L के अनुपात से परिभाषित करते हैं :

$$\text{अपरूपण विकृति} = \frac{\Delta x}{L} = \tan\theta \qquad (8.3)$$



चित्र 8.1 *(a) तनन प्रतिबल के प्रभाव में एक बेलन ΔL मान से विस्तरित हो जाता है, (b) अपरूपण (स्पर्शी) प्रतिबल के प्रभाव में एक बेलन कोण θ से विरूपित हो जाता है, (c) अपरूपण प्रतिबल के प्रभाव में एक पुस्तक, (d) समान जलीय प्रतिबल के प्रभाव में एक ठोस गोला ΔV मान से आयतन में संकुचित हो जाता है।*

© NCERT not to be republished

जहाँ θ ऊर्ध्वाधर (बेलन की प्रारंभिक स्थिति) से बेलन का कोणीय विस्थापन है। चूंकि θ बहुत कम होता है, $\tan\theta$ लगभग कोण θ के बराबर ही होता है, (उदाहरण के लिए यदि $\theta = 10°$ तो θ और $\tan\theta$ के मान में केवल 1% का अंतर होता है)। यदि किसी पुस्तक को हाथ से दबाकर क्षैतिज दिशा में ढकेलें, जैसा चित्र 8.2(c) में दिखाया गया है, तब भी ऐसी विकृति को देखा जा सकता है। इस प्रकार,

$$\text{अपरूपण विकृति} = \tan\theta \approx \theta \qquad (8.4)$$

चित्र 8.1(d) में, अधिक दाब के किसी द्रव के अंदर रखा एक ठोस गोला सभी ओर से समान रूप से संपीडित हो जाता है। द्रव द्वारा लगाया गया बल पिण्ड के पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर लंबवत् दिशा में कार्य करता है; ऐसी स्थिति में पिण्ड को जलीय संपीडन की स्थिति में कहा जाता है। इससे ज्यामितीय आकृति में किसी परिवर्तन के बिना ही आयतन में कमी हो जाती है। पिण्ड के अंदर आंतरिक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाते हैं जो द्रव द्वारा लगाए गए बलों के बराबर तथा विरोधी होते हैं (द्रव से बाहर निकालने पर पिण्ड अपनी प्रारंभिक आकृति तथा आकार को पुनः प्राप्त कर लेता है)। इस स्थिति में एकांक क्षेत्रफल पर आंतरिक प्रत्यानयन बल को **जलीय प्रतिबल** कहते हैं और इसका मान जलीय दाब (एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल) के बराबर होता है।

जलीय दाब के कारण उत्पन्न विकृति को **आयतन विकृति** कहते हैं। इसे आयतन में परिवर्तन (ΔV) तथा प्रारंभिक आयतन (V) के अनुपात से परिभाषित करते हैं :

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\Delta V}{V} \qquad (8.5)$$

चूंकि विकृत प्रारंभिक विमा तथा विमा में अंतर का अनुपात होता है, इसलिए इसका कोई इकाई या विमीय सूत्र नहीं होता है।

8.3 हुक का नियम

चित्र 8.1 में दिखाई गई विभिन्न स्थितियों में प्रतिबल तथा विकृति के अलग-अलग रूप हो जाते हैं। कम विरूपण के लिए प्रतिबल तथा विकृति एक दूसरे के अनुक्रमानुपाती होते हैं। यही हुक का नियम कहलाता है। इस प्रकार

$$\text{प्रतिबल} \propto \text{विकृति}$$

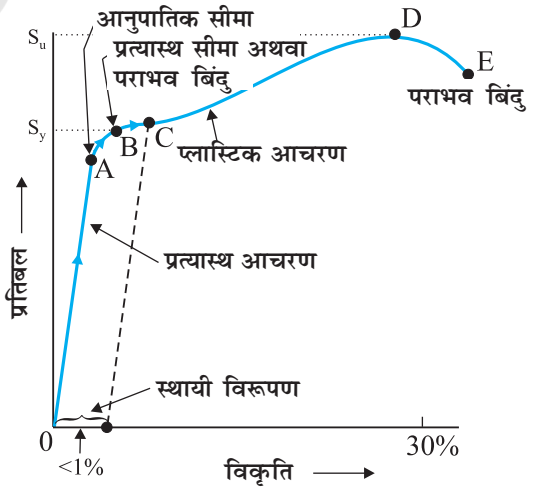
$$\text{प्रतिबल} = k \times \text{विकृति} \qquad (8.6)$$

जहाँ k अनुक्रमानुपातिकता स्थिरांक है और इसे **प्रत्यास्थता गुणांक** कहते हैं।

हुक का नियम एक आनुभाविक नियम है तथा अधिकतर पदार्थों के लिए वैध होता है। तथापि कुछ पदार्थ इस प्रकार रैखिक संबंध नहीं दर्शाते।

8.4 प्रतिबल-विकृति वक्र

तनन प्रतिबल के अंतर्गत किसी दिए गए द्रव्य के लिए प्रतिबल तथा विकृति के बीच संबंध प्रयोग द्वारा जाना जा सकता है। तनन गुणों की मानक जाँच में, किसी परीक्षण बेलन या तार को एक प्रत्यारोपित बल द्वारा विस्तारित किया जाता है। लंबाई में भिन्नात्मक अन्तर (विकृति) तथा इस विकृति को उत्पन्न करने के लिए आवश्यक प्रत्यारोपित बल को रिकार्ड करते हैं। प्रत्यारोपित बल को धीरे-धीरे क्रमबद्ध चरणों में बढ़ाते हैं और लंबाई में परिवर्तन को नोट करते जाते हैं। प्रतिबल (जिसका मान एकांक क्षेत्रफल पर लगाए गए बल के मान के बराबर होता है) और उससे उत्पन्न विकृति के बीच एक ग्राफ खींचते हैं। किसी धातु के लिए ऐसा एक प्रारूपिक ग्राफ चित्र 8.2 में दिखाया गया है। संपीडन तथा अपरूपण प्रतिबल के लिए भी सदृश ग्राफ प्राप्त किए जा सकते हैं। भिन्न-भिन्न द्रव्यों के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र भिन्न-भिन्न होते हैं। इन वक्रों की सहायता से हम यह समझ सकते हैं कि कोई दिया हुआ द्रव्य बढ़ते हुए लोड के साथ कैसे विरूपित होता है। ग्राफ से हम यह देख सकते हैं कि O से A के बीच में वक्र रैखिक है। इस क्षेत्र में हुक के नियम का पालन होता है। जब प्रत्यारोपित बल को हटा लिया जाता है तो पिण्ड अपनी प्रारंभिक विमाओं को पुनः प्राप्त कर लेता है। इस क्षेत्र में ठोस एक प्रत्यास्थ पिण्ड जैसा आचरण करता है।



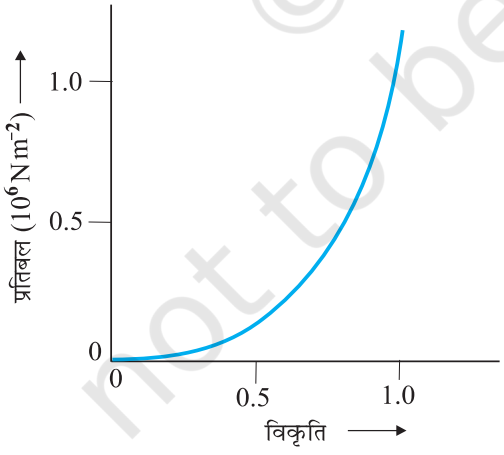
चित्र 8.2 किसी धातु के लिए एक प्रारूपिक प्रतिबल-विकृति वक्र।

© NCERT not to be republished

A से B के बीच के क्षेत्र में प्रतिबल तथा विकृति अनुक्रमानुपाती नहीं है। फिर भी भार हटाने पर पिण्ड अभी भी अपनी प्रारंभिक विमाओं पर वापस आ जाता है। वक्र में बिंदु B **पराभव बिंदु** (अथवा **प्रत्यास्थ सीमा**) कहलाता है और संगत प्रतिबल को द्रव्य का **पराभव सामर्थ्य** (σ_y) कहते हैं।

यदि भार को और बढ़ा दिया जाए तो उत्पन्न प्रतिबल पराभव सामर्थ्य से अधिक हो जाता है और फिर प्रतिबल में थोड़े से अंतर के लिए भी विकृति तेज़ी से बढ़ती है। वक्र का B और D के बीच का भाग यह दर्शाता है। B और D के बीच किसी बिंदु, मान लें C, पर जब भार को हटा दिया जाए तो पिण्ड अपनी प्रारंभिक विमा को पुनः प्राप्त नहीं करता है। इस स्थिति में जब प्रतिबल शून्य हो जाए तब भी विकृति शून्य नहीं होती है। तब यह कहा जाता है कि द्रव्य में **स्थायी विरूपण** हो गया। ऐसे विरूपण को **प्लास्टिक विरूपण** कहते हैं। ग्राफ पर बिंदु D द्रव्य की **चरम तनन सामर्थ्य** (σ_u) है। इस बिंदु के आगे प्रत्यारोपित बल को घटाने पर भी अतिरिक्त विकृति उत्पन्न होती है और बिंदु E पर विभंजन हो जाता है। यदि चरम सामर्थ्य बिंदु D और विभंजन बिंदु E पास-पास हों तो द्रव्य को **भंगुर** कहते हैं। यदि वे अधिक दूरी पर हों तो द्रव्य को **तन्य** कहते हैं।

जैसा पहले कहा जा चुका है, प्रतिबल-विकृति व्यवहार में एक द्रव्य से दूसरे द्रव्य में अंतर हो जाता है। उदाहरण के लिए, रबड़ को अपनी प्रारंभिक लंबाई के कई गुने तक खींचा जा सकता है, फिर भी वह अपनी प्रारंभिक आकृति में वापस आ जाता है। चित्र 8.3 में रबड़ जैसे द्रव्य, महाधमनी का प्रत्यास्थ ऊतक, के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र दिखाया गया है। ध्यान दें कि यद्यपि प्रत्यास्थ क्षेत्र बहुत अधिक है फिर भी यह द्रव्य हुक के नियम का बिलकुल भी पालन नहीं करता है। इसमें कोई सुस्पष्ट प्लैस्टिक क्षेत्र भी नहीं है। महाधमनी, रबड़ जैसे पदार्थ जिन्हें तनित करके अत्यधिक विकृति पैदा की जा सकती है, **प्रत्यस्थालक** कहलाते हैं।



चित्र 8.3 महाधमनी, हृदय से रक्त को ले जाने वाली वृहत नलिका (वाहिका), के प्रत्यास्थ ऊतक के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र।

8.5 प्रत्यास्थता गुणांक

संरचनात्मक तथा निर्माण अभियांत्रिकी डिज़ाइन के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र में प्रत्यास्थ सीमा के अंदर का अनुक्रमानुपाती क्षेत्र (चित्र 8.2 में क्षेत्र OA) बहुत महत्वपूर्ण होता है। प्रतिबल तथा विकृति के अनुपात को **प्रत्यास्थता गुणांक** कहते हैं और किसी दिए हुए द्रव्य के लिए इसका एक विशिष्ट मान होता है।

8.5.1 यंग गुणांक

प्रायोगिक प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि प्रतिबल चाहे तनक हो या चाहे संपीडक, उत्पन्न विकृति का मान समान होता है। तनक (या संपीडक) प्रतिबल (σ) तथा अनुदैर्घ्य विकृति (ε) के अनुपात से **यंग गुणांक** को परिभाषित करते हैं तथा इसे प्रतीक 'Y' द्वारा निरूपित करते हैं :

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (8.7)$$

समीकरणों (8.1) और (8.2) से

$$Y = (F/A)/(\Delta L/L)$$
$$= (F \times L)/(A \times \Delta L) \qquad (8.8)$$

चूंकि विकृति एक विमाविहीन राशि है, यंग गुणांक की इकाई वही होती है जो प्रतिबल की, अर्थात्, N m^{-2} या पास्कल (Pa)। सारणी 8.1 में कुछ द्रव्यों के यंग गुणांक तथा पराभव सामर्थ्य के मान दिए गए हैं।

सारणी 8.1 में दिए गए आँकड़ों से यह पता चलता है कि धातुओं के लिए यंग गुणांक अधिक होता है। इसलिए इन पदार्थों में लंबाई में थोड़ा ही अंतर उत्पन्न करने के लिए बहुत अधिक बल की आवश्यकता होती है। 0.1 cm^2 अनुप्रस्थ परिच्छेद के एक पतले इस्पात के तार की लंबाई को 0.1% से बढ़ाने के लिए 2000 N के बल की आवश्यकता होती है। उसी अनुप्रस्थ परिच्छेद के ऐलुमिनियम, पीतल तथा ताँबे के तारों में उतनी ही विकृति उत्पन्न करने के लिए आवश्यक बल क्रमशः 690 N, 900 N तथा 1100 N होते हैं। इसका अर्थ

© NCERT not to be republished

सारणी 8.1 कुछ द्रव्यों के यंग गुणांक तथा पराभव सामर्थ्य

पदार्थ	घनत्व ρ (kg m^{-3})	यंग गुणांक Y (10^9 N m^{-2})	चरम सामर्थ्य σ_u(10^6 N m^{-2})	पराभव सामर्थ्य σ_y (10^6 N m^{-2})
ऐलुमिनियम	2710	70	110	95
ताँबा	8890	110	400	200
लोहा (पिटवाँ)	7800-7900	190	330	170
इस्पात	7860	200	400	250
काँच#	2190	65	50	-
कंक्रीट	2320	30	40	-
लकड़ी#	525	13	50	-
अस्थि#	1900	9.4	170	-
पॉलीस्टीरीन	1050	3	48	-

 # पदार्थ का परीक्षण संपीडन के अंतर्गत किया गया

यह है कि ताँबा, पीतल तथा ऐलुमिनियम से इस्पात अधिक प्रत्यास्थ होता है। इसी कारण से अधिक काम ली जाने वाली मशीनों और संरचनात्मक डिज़ाइनों में इस्पात को अधिक वरीयता दी जाती है। लकड़ी, अस्थि, कंक्रीट तथा काँच के यंग गुणांक कम होते हैं।

उदाहरण 8.1 एक संरचनात्मक इस्पात की छड़ की त्रिज्या 10 mm तथा लंबाई 1 m है। 100 kN का एक बल F इसको लंबाई की दिशा में तनित करता है। छड़ में (a) प्रतिबल, (b) विस्तार, तथा (c) विकृति की गणना कीजिए। संरचनात्मक इस्पात का यंग गुणांक 2.0×10^{11} N m^{-2} है।

हल हम यह मान लेंगे कि छड़ को एक सिरे पर क्लैम्प करके रखा गया है और बल को दूसरे सिरे पर छड़ की लंबाई की दिशा में लगाया गया है तो छड़ पर प्रतिबल होगा

$$\text{प्रतिबल} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$= \frac{100\times10^3\,\text{N}}{3.14\times(10^{-2}\,\text{m})^2}$$

$$= 3.18\times10^8\ \text{N m}^{-2}$$

विस्तार होगा,

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{Y}$$

$$= \frac{(3.18\times10^8\,\text{N m}^{-2})(1\,\text{m})}{2\times10^{11}\,\text{N m}^{-2}}$$

$$= 1.59\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$= 1.59\ \text{mm}$$

विकृति होगी

$$\text{विकृति} = \Delta L/L$$

$$= (1.59\times10^{-3}\,\text{m})/(1\,\text{m})$$

$$= 1.59\times10^{-3}$$

$$= 0.16\ \%$$

उदाहरण 8.2 ताँबे का एक 2.2 m लंबा तार तथा इस्पात का एक 1.6 m लंबा तार, जिनमें दोनों के व्यास 3.0 mm हैं, सिरे से जुड़े हुए हैं। जब इसे एक भार से तनित किया गया तो कुल विस्तार 0.7 mm हुआ। लगाए गए भार का मान प्राप्त कीजिए।

हल ताँबे और इस्पात के तार उतने ही तनक प्रतिबल के अंतर्गत हैं क्योंकि उन पर समान तनाव (भार W के बराबर) लगा है तथा उनके अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल A बराबर हैं। समीकरण (8.7) से हम जानते हैं कि प्रतिबल = विकृति $\times$ यंग गुणांक, इसलिए

$$W/A = Y_c\times(\Delta L_c/L_c) = Y_s\times(\Delta L_s/L_s)$$

जहाँ पादाक्षर c तथा s क्रमशः ताँबे तथा इस्पात को संदर्भित करते हैं। अथवा,

$$\Delta L_c/\Delta L_s = (Y_s/Y_c)\times(L_c/L_s)$$

© NCERT not to be republished

दिया है, $L_c = 2.2$ m, $L_s = 1.6$ m

सारणी 8.1 से $Y_c = 1.1 \times 10^{11}$ N m^{-2} और

$Y_s = 2.0 \times 10^{11}$ N m^{-2}। इसलिए

$\Delta L_c / \Delta L_s = (2.0 \times 10^{11}/1.1 \times 10^{11}) \times (2.2/1.6) = 2.5$

कुल विस्तार दिया हुआ है

$$\Delta L_c + \Delta L_s = 7.0 \times 10^{-4} \text{ m}$$

ऊपर दिए गए समीकरणों को हल करने पर

$\Delta L_c = 5.0 \times 10^{-4}$ m, तथा $\Delta L_s = 2.0 \times 10^{-4}$ m

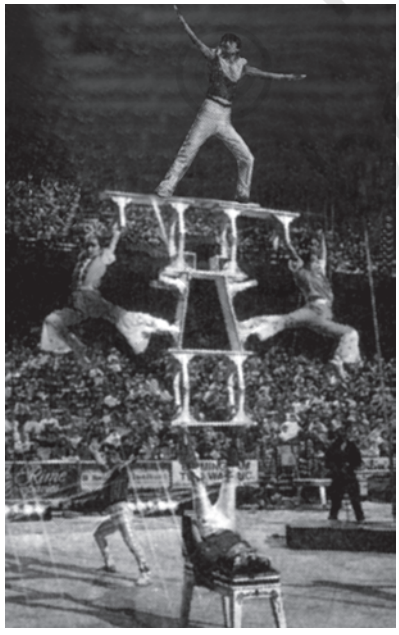
इसलिए,

$W = (A \times Y_c \times \Delta L_c)/L_c$

$= \pi (1.5 \times 10^{-3})^2 \times [1.1 \times 10^{11} \times (5.0 \times 10^{-4})/2.2]$

$= 1.8 \times 10^2$ N ◀

उदाहरण 8.3 किसी सर्कस में एक मानवीय पिरैमिड में एक संतुलित ग्रुप का सारा भार एक व्यक्ति, जो अपनी पीठ के बल लेटा हुआ है, के पैरों पर आधारित है (जैसा चित्र 8.4 में दिखाया गया है)। इस कार्य का निष्पादन करने वाले सभी व्यक्तियों, मेजों, प्लाकों आदि का कुल द्रव्यमान 280 kg है। पिरैमिड की तली पर अपनी पीठ के बल लेटे हुए व्यक्ति का द्रव्यमान 60 kg है। इस व्यक्ति की प्रत्येक उर्वस्थि (फीमर) की लंबाई 50 cm तथा प्रभावी त्रिज्या 2.0 cm है। निकालिए कि अतिरिक्त भार के कारण प्रत्येक उर्वस्थि कितनी मात्रा से संपीडित हो जाती है।



चित्र 8.4 सर्कस में एक मानवीय पिरैमिड।

हल सभी निष्पादकों, मेजों, प्लाकों आदि का कुल द्रव्यमान = 280 kg

आधार देने वाले निष्पादक का द्रव्यमान = 60 kg

पिरैमिड की तली के निष्पादक के पैरों पर आधारित द्रव्यमान = 280 – 60 = 220 kg

इस आधारित द्रव्यमान का भार

= 220 kg wt = 220 × 8.8 N = 2156 N

निष्पादक की प्रत्येक उर्वस्थि पर आधारित भार

= – (2156) N = 1078 N

सारणी 8.1 से अस्थि का यंग गुणांक,

$Y = 8.4 \times 10^9$ N m^{-2}

प्रत्येक उर्वस्थि की लंबाई $L = 0.5$ m तथा त्रिज्या = 2.0 cm

इस प्रकार उर्वस्थि के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

$A = \pi \times (2 \times 10^{-2})^2$ m^2 $= 1.26 \times 10^{-3}$ m^2

प्रत्येक उर्वस्थि में संपीडन (ΔL) की गणना समीकरण (8.8) का इस्तेमाल करके की जा सकती है :

$\Delta L = [(F \times L)/(Y \times A)]$

$= [(1078 \times 0.5)/(8.4 \times 10^9 \times 1.26 \times 10^{-3})]$

$= 4.55 \times 10^{-5}$ m या 4.55×10^{-3} cm

यह बहुत कम अंतर है। उर्वस्थि में भिन्नात्मक कमी होगी

$\Delta L/L = 0.000091$ या 0.0091% ◀

8.5.2 अपरूपण गुणांक

अपरूपण प्रतिबल तथा संगत अपरूपण विकृति का अनुपात द्रव्य का **अपरूपण गुणांक** कहलाता है तथा इसे G से निरूपित करते हैं। इसे **दृढ़ता गुणांक** भी कहते हैं :

G = अपरूपण प्रतिबल (σ_s)/अपरूपण विकृति

$G = (F/A)/(\Delta x/L)$

$= (F \times L)/(A \times \Delta x)$ (8.9)

इसी प्रकार समीकरण (8.4) से

$G = (F/A)/\theta$

$= F/(A \times \theta)$ (8.10)

अपरूपण प्रतिबल σ_s को ऐसे भी व्यक्त किया जा सकता है

$\sigma_s = G \times \theta$ (8.11)

अपरूपण गुणांक की SI इकाई N m^{-2} या Pa होती है। सारणी 8.2 में कुछ साधारण द्रव्यों के अपरूपण गुणांक दिए गए हैं। यह देखा जा सकता है कि अपरूपण गुणांक (या दृढ़ता गुणांक) आमतौर पर यंग गुणांक (सारणी 8.1) से कम होता है। अधिकतर द्रव्यों के लिए $G \approx Y/3$।

© NCERT not to be republished

सारणी 8.2 कुछ सामान्य द्रव्यों के अपरूपण गुणांक *(G)*

द्रव्य	*G* (10^9 Nm^{-2} या GPa)
ऐलुमिनियम	25
पीतल	36
ताँबा	42
काँच	23
लोहा	70
सीसा	5.6
निकिल	77
इस्पात	84
टंगस्टन	150
लकड़ी	10

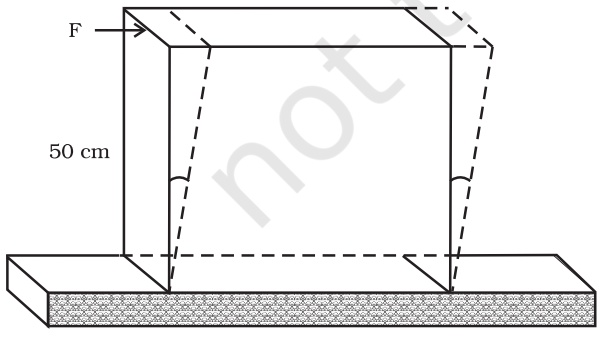
उदाहरण 8.4 *सीसे के 50 cm भुजा के एक वर्गाकार स्लैब, जिसकी मोटाई 10 cm है, की पतली फलक पर 8.0×10^4 N का एक अपरूपक बल लगा है। दूसरा पतला फलक फर्श से रिवेट किया हुआ है। ऊपरी फलक कितनी विस्थापित हो जाएगी?*

हल सीसे का स्लैब स्थिर है तथा बल को पतली फलक के समांतर लगाया गया है, जैसा चित्र 8.5 में दिखाया गया है। इस फलक का क्षेत्रफल है

$$A = 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$$
$$= 0.5 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$$
$$= 0.05 \text{ m}^2$$

इसलिए

$$\text{प्रतिबल} = (8.4 \times 10^4 \text{ N}/0.05 \text{ m}^2)$$
$$= 1.80 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$$



चित्र 8.5

हम जानते हैं कि अपरूपण विकृति = $(\Delta x/L)$= प्रतिबल $/G$

इसलिए, विस्थापन Δx = (प्रतिबल $\times L)/G$

$= (1.8 \times 10^6 \text{ N m}^{-2} \times 0.5 \text{ m})/(5.6 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})$

$= 1.6 \times 10^{-4}$ m = 0.16 mm ◀

8.5.3 आयतन गुणांक

पहले के खंड (8.2) में हम यह देख चुके हैं कि जब किसी पिण्ड को अधिक दाब के एक द्रव में डुबोया जाता है [चित्र 8.1(d)] तो वह जलीय प्रतिबल (जलीय दाब के मान के बराबर) के अंतर्गत चला जाता है। यह पिण्ड के आयतन में कमी उत्पन्न करता है, इस प्रकार एक विकृति, जिसे आयतन विकृति कहते हैं, उत्पन्न होती है (समीकरण 8.5)। जलीय प्रतिबल तथा संगत आयतन विकृति के अनुपात को *आयतन गुणांक* कहते हैं। यह प्रतीक B से निरूपित किया जाता है :

$$B = -p/(\Delta V/V) \qquad (8.12)$$

ऋण चिह्न इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि दाब में वृद्धि करने पर आयतन में कमी होती है। अर्थात्, यदि p धनात्मक है तो ΔV ऋणात्मक होगा। इस प्रकार साम्यावस्था में किसी निकाय के लिए आयतन गुणांक B का मान सदा धनात्मक होगा। आयतन गुणांक की SI इकाई वही होती है जो दाब की, अर्थात्, N m^{-2} या Pa। कुछ सामान्य द्रव्यों के आयतन गुणांक सारणी 8.3 में दिए गए हैं।

आयतन गुणांक के व्युत्क्रम को *संपीड्यता* कहते हैं तथा इसे k से निरूपित करते हैं। दाब में एकांक वृद्धि पर आयतन में भिन्नात्मक अंतर से इसे परिभाषित करते हैं :

$$k = (1/B) = -(1/\Delta p) \times (\Delta V/V) \qquad (8.13)$$

सारणी 8.3 में दिए गए आँकड़ों से यह देख सकते हैं कि ठोसों के आयतन गुणांक द्रवों से कहीं अधिक हैं और द्रवों के लिए इसका मान गैसों (वायु) की तुलना में कहीं अधिक है। इस प्रकार ठोस पदार्थ सबसे कम संपीड्य होते हैं जबकि गैसें सबसे अधिक संपीड्य होती हैं। गैसें ठोसों की अपेक्षा लगभग दस लाख गुनी अधिक संपीड्य होती हैं। गैसों की संपीड्यता अधिक होती है जो ताप तथा दाब के साथ बदलती है। ठोसों की असंपीड्यता मुख्यतया आस-पास के परमाणुओं के बीच दृढ़ युग्मन के कारण होती है। द्रवों के अणु भी अपने पास के अणुओं से बँध होते हैं लेकिन उतने मजबूती से नहीं जितने ठोसों में। गैसों के अणु अपने पास के अणुओं से बहुत हलके से युग्मित होते हैं।

© NCERT not to be republished

सारणी 8.3 कुछ सामान्य द्रव्यों के आयतन गुणांक *(B)*

द्रव्य	B (10^9 N m^{-2} या GPa)
ठोस	
ऐलुमिनियम	72
पीतल	61
ताँबा	140
काँच	37
लोहा	100
निकिल	260
इस्पात	160
द्रव	
जल	2.2
इथेनाल	0.9
कार्बन डाइसल्फाइड	1.56
ग्लिसरीन	4.76
पारा	25
गैस	
वायु मानक (मानक ताप एवं दाब पर)	1.0×10^{-4}

सारणी 8.4 में विभिन्न प्रकार के प्रतिबल, विकृति, प्रत्यास्थ गुणांक तथा द्रव्यों की वह अवस्था जिसमें यह लागू होते हों, को एक दृष्टि में दिखाया गया है।

उदाहरण 8.5 हिन्द महासागर की औसत गहराई लगभग 3000 m है। महासागर की तली में पानी के भिन्नात्मक संपीडन $\Delta V/V$ की गणना कीजिए, दिया है कि पानी का आयतन गुणांक 2.2×10^9 N m^{-2} है (g = 10 m s^{-2} लीजिए)।

हल तली की परत पर पानी के 3000 m ऊँचे स्तंभ द्वारा लगने वाला दाब

$$p = h\rho g = 3000 \text{ m} \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$
$$= 3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

भिन्नात्मक संपीडन $\Delta V/V$ होगा

$$\Delta V/V = \text{प्रतिबल}/B$$
$$= (3 \times 10^7 \text{ N m}^{-2})/(2.2 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})$$
$$= 1.36 \times 10^{-2} \text{ या } 1.36\ \%$$

◀

8.5.4 प्वासों अनुपात

प्रयुक्त बल के लम्बवत दिशा में होने वाली विकृति को **पार्श्विक विकृति** कहते हैं। सिमोन प्वासों ने यह निर्धारित किया था कि प्रत्यास्थता सीमा में पार्श्विक विकृति अनुदैर्घ्य विकृति के समानुपाती होती है। किसी तानित तार में पार्श्विक विकृति तथा अनुदैर्घ्य विकृति का अनुपात **प्वासों अनुपात** कहलाता है। यदि किसी तार का मूल व्यास d तथा प्रयुक्त प्रतिबल की दशा में व्यास में संकुचन Δd है, तो पार्श्विक विकृति $\Delta d/d$ होगी। यदि इस तार की मूल लंबाई L तथा प्रयुक्त प्रतिबल की स्थिति में लंबाई में वृद्धि ΔL है, तो अनुदैर्घ्य विकृति $\Delta L/L$ है। अत: प्वासों अनुपात $(\Delta d/d)/(\Delta L/L)$ अथवा $(\Delta d/\Delta L) \times (L/d)$ होगा। प्वासों अनुपात दो विकृतियों का अनुपात है। अत: यह एक संख्या है तथा इसकी कोई विमा अथवा मात्रक नहीं होता। इसका मान पदार्थ की प्रकृति पर ही निर्भर करता है। स्टील के लिए इस अनुपात का मान 0.28 तथा 0.30 के मध्य होता है। एल्युमीनियम की मिश्रधातुओं के लिए इसका मान लगभग 0.33 होता है।

8.5.6 तानित तार में प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा

जब किसी तार पर तनन प्रतिबल आक्षेपित किया जाता है, तो अंत:परमाण्विक बलों के विरुद्ध कार्य किया जाता है। यह कार्य तार में प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा के रूप में संग्रहित हो जाता है। कोई L मूल लंबाई तथा A अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल के एक तार की लंबाई के परित: किसी विकृतकारी बल F लगाने पर माना कि लंबाई में l वृद्धि हो जाती है, तब समीकरण (8.8) से हमें $F = YA \times (l/L)$ प्राप्त होता है। यहाँ Y तार के पदार्थ का यंग गुणांक है। अब इस तार की लंबाई में अत्यन्त सूक्ष्म dl मात्रा से पुन: वृद्धि कराने के लिए प्रयुक्त कार्य dW का मान $F \times dl$ अथवा $YAl\,dl/L$ होगा। अत: किसी तार को उसकी मूल लंबाई L से $L + l$ तक अर्थात् $l = 0$ से $l = l$ तक बढ़ाने में किया गया कार्य (W) –

$$W = \int_0^l \frac{YAl}{L} dl = \frac{YA}{2} \times \frac{l^2}{L}$$

$$W = \frac{1}{2} \times Y \times \left(\frac{l}{L}\right)^2 \times AL$$

© NCERT not to be republished

सारणी 8.4 प्रतिबल, विकृति तथा विभिन्न प्रत्यास्थ गुणांक

प्रतिबल का प्रकार	प्रतिबल	विकृति	अन्तर आकृति में	अन्तर आयतन में	प्रत्यास्थ गुणांक	गुणांक का नाम	द्रव्य की अवस्था
तनक अथवा संपीडक ($\sigma = F/A$)	सम्मुख पृष्ठों के लंबवत् दो बराबर और विरोधी बल	बल की दिशा में विस्तार या संपीडन अनुदैर्घ्य विकृति ($\Delta L/L$)	हाँ	नहीं	$Y = (F \times L)/(A \times \Delta L)$	यंग गुणांक	ठोस
अपरूपक ($\sigma_s = F/A$)	सम्मुख पृष्ठों के समांतर दो बराबर और विरोधी बल (प्रत्येक स्थिति में बल ऐसे लगें ताकि पिण्ड पर कुल बल तथा कुल बल आघूर्ण शून्य हो जाए)	शुद्ध अपरूपण, θ	हाँ	नहीं	$G = F/(A \times \theta)$	अपरूपण गुणांक या दृढ़ता गुणांक	ठोस
जलीय	पृष्ठ पर सभी जगह लंबवत् बल, सभी जगह एकांक क्षेत्रफल पर बल (दाब) का मान बराबर	आयतन में अंतर (संपीडन या विस्तार) ($\Delta V/V$)	नहीं	हाँ	$B = -p/(\Delta V/V)$	आयतन गुणांक	ठोस, द्रव तथा गैस

$$= \frac{1}{2} \times \text{यंग गुणांक} \times \text{विकृति}^2 \times \text{तार का आयतन}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल} \times \text{विकृति} \times \text{तार का आयतन}$$

यह कार्य तार में प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा (U) के रूप में संग्रहित हो जाती है। अतः तार में पदार्थ की प्रति एकांक आयतन प्रत्यास्थ स्थैतिक ऊर्जा (u) निम्न है –

$$u = \frac{1}{2} \times \sigma\varepsilon \qquad (8.14)$$

8.6 द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के अनुप्रयोग

दैनिक जीवन में द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार की अहम भूमिका होती है। सभी अभियांत्रिकी डिज़ाइनों में द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के परिशुद्ध ज्ञान की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए किसी भवन की डिज़ाइन करते समय स्तंभों, दंडों तथा आधारों की संरचनात्मक डिज़ाइन के लिए प्रयुक्त द्रव्यों की प्रबलता का ज्ञान आवश्यक है। क्या आपने कभी इस पर विचार किया है कि पुलों की संरचना में आधार के रूप में प्रयुक्त दंडों का अनुप्रस्थ परिच्छेद **I** की तरह का क्यों होता है? बालू का एक ढेर या एक पहाड़ी पिरैमिड की आकृति का क्यों होता है? इन प्रश्नों के उत्तर संरचनात्मक अभियांत्रिकी के अध्ययन से पाए जा सकते हैं।

भारी भारों को उठाने तथा एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने के लिए प्रयुक्त क्रेनों में धातु का एक मोटा रस्सा होता है जिससे भार को जोड़ दिया जाता है। रस्से को मोटरों तथा घिरनियों की मदद से खींचा जाता है। मान लें कि हमें एक ऐसा क्रेन बनाना है जिसको उठा सकने की सामर्थ्य 10 मीट्रिक टन (1metric ton = 1000 kg) हो। इस्पात का रस्सा कितना मोटा होना चाहिए? स्पष्टतया, हम यह चाहते हैं कि भार रस्से को स्थायी रूप से विरूपित न कर दे। इसलिए विस्तार प्रत्यास्थ सीमा से अधिक नहीं होना चाहिए। सारणी 8.1 से हमें पता चलता है कि मृदु इस्पात का पराभव सामर्थ्य (σ_y) लगभग 300×10^6 N m^{-2} है। इस प्रकार रस्से के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल का न्यूनतम मान है :

$$A \geq W/\sigma_y = Mg/\sigma_y \qquad (8.15)$$
$$= (10^4 \text{ kg} \times 10 \text{ m s}^{-2})/(300 \times 10^6 \text{ N m}^{-2})$$
$$= 3.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

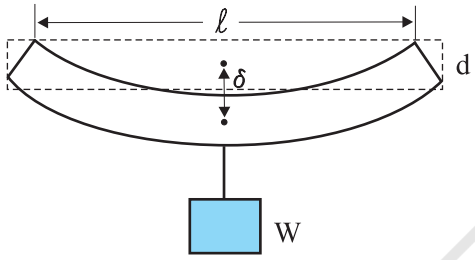
जो वृत्ताकार परिच्छेद के रस्से के लिए लगभग 1 cm त्रिज्या के संगत बनता है। साधारणतया, सुरक्षा के लिए भार में एक बड़ा मार्जिन (लगभग दस के गुणक का) दिया जाता है। इस तरह लगभग 3 cm त्रिज्या का एक मोटा रस्सा संस्तुत किया जाता है। इस त्रिज्या का एकल तार व्यावहारिक रूप से एक दृढ़ छड़ हो जाएगा। इसलिए व्यापारिक निर्माण में लचक तथा प्रबलता के लिए ऐसे रस्सों को हमेशा वेणी की तरह बहुत से पतले तारों को गुम्फित करके आसानी से बनाया जाता है।

किसी पुल को इस प्रकार डिज़ाइन करना होता है जिससे यह चलते हुए यातायात के भार को, पवन बल को तथा अपने

© NCERT not to be republished

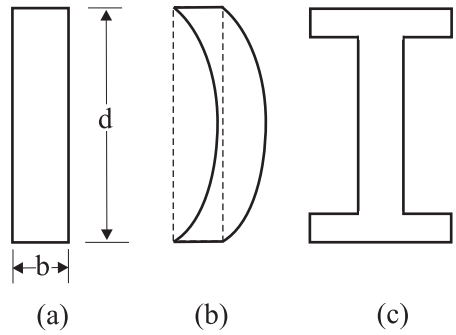
भार को वहन कर सके। इसी प्रकार, भवनों की डिज़ाइन में दण्डों एवं स्तंभों का उपयोग बहुत प्रचलित है। दोनों ही स्थितियों में, भार के अंतर्गत दण्ड के बंकन की समस्या से छुटकारा पाना बहुत ही महत्वपूर्ण होता है। दण्ड को अत्यधिक बंकित होना या टूटना नहीं चाहिए। हम किसी ऐसे दण्ड के बारे में विचार करें जो सिरों के पास आधारित हो तथा जिसके मध्य बिंदु पर भार लगा हो, जैसा चित्र 8.6 में दिखाया गया है। लंबाई l, चौड़ाई b तथा मोटाई d की एक पट्टी के मध्य बिंदु पर भार W का भार लगाने से इसमें एक झोल आएगा जिसकी मात्रा होगी

$$\delta = W l^3/(4bd^3Y) \qquad (8.16)$$



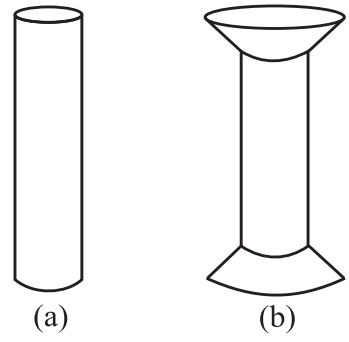
चित्र 8.6 *सिरों पर आधारित तथा केन्द्र पर भारित एक दण्ड।*

थोड़ा सा कैलकुलस और जितना आप पहले ही पढ़ चुके हैं, उसका उपयोग करके इस संबंध का निगमन किया जा सकता है। समीकरण (8.15) से हम देखते हैं कि किसी दिये हुए भार के लिए बंकन कम करने के लिए ऐसे द्रव्य का उपयोग करना चाहिए जिसका यंग गुणांक Y अधिक हो। किसी दिये हुए द्रव्य के लिए बंकन कम करने के लिए चौड़ाई b की बजाय मोटाई d को बढ़ाना अधिक प्रभावी होता है क्योंकि δ, d^{-3} लेकिन b^{-1} के अनुक्रमानुपाती होता है (यद्यपि दण्ड की लंबाई यथासम्भव कम होनी ही चाहिए)। लेकिन जब तक ऐसा न हो कि भार बिलकुल ठीक स्थान पर लगा हो (पर चलते हुए यातायात वाले पुल पर ऐसा व्यवस्थित करना कठिन है), मोटाई बढ़ाने पर पट्टी ऐसे बंकित हो सकती है जैसा चित्र 8.7(b) में दिखाया गया है। इसे आकुंचन कहते हैं। इससे बचने के लिए साधारणतया चित्र 8.7(c) में दिखाई गई आकृति का अनुप्रस्थ परिच्छेद लिया जाता है। ऐसे परिच्छेद से भार वहन करने के लिए बड़ा पृष्ठ तथा बंकन रोकने के लिए पर्याप्त मोटाई मिलती है। इस प्रकार की आकृति से प्रबलता को न्योछावर किये बिना ही दण्ड के भार को कम किया जा सकता है, अत: लागत भी कम हो जाती है।



चित्र 8.7 *किसी दण्ड की विभिन्न अनुप्रस्थ परिच्छेद आकृतियाँ (a) एक पट्टी का आयताकार परिच्छेद, (b) एक पतली पट्टी और कैसे आकुंचित हो सकती है, (c) भार वहन करने वाली पट्टी के लिए साधारणतया प्रयुक्त परिच्छेद।*

भवनों तथा पुलों में खम्भों या स्तम्भों का उपयोग भी बहुत प्रचलित है। गोल सिरों वाले खम्भे जैसा चित्र 8.8(a) में दिखाये गये हैं, फैलावदार आकृति चित्र 8.8(b) वाले खम्भों की अपेक्षा कम भार वहन कर सकते हैं। किसी पुल या भवन की परिशुद्ध डिज़ाइन करते समय उन बातों का ध्यान रखना पड़ता है कि वह किन परिस्थितियों में काम करता है, लागत क्या होगी और संभावित द्रव्यों आदि की दीर्घकालीन विश्वसनीयता आदि क्या है?



चित्र 8.8 *खम्भे या स्तम्भ: (a) गोलीय सिरों का खम्भा, (b) फैलावदार सिरों का खम्भा।*

पृथ्वी पर किसी पर्वत की अधिकतम ऊँचाई लगभग 10 km होती है, इस प्रश्न का उत्तर भी चट्टानों के प्रत्यास्थ गुणों पर विचार करने से मिल सकता है। एक पर्वत का आधार समान संपीडन के अन्तर्गत नहीं होता है, यह चट्टानों को कुछ अपरूपक प्रतिबल प्रदान करता है जिसके अन्तर्गत वे प्रवाहित

© NCERT not to be republished

(खिसक) हो सकती हैं। ऊपर के सारे द्रव्य के कारण प्रतिबल उस क्रान्तिक अपरूपक प्रतिबल से कम होना चाहिए जिस पर चट्टानें प्रवाहित हों (खिसकें)।

ऊँचाई h के किसी पर्वत की तली पर, पर्वत के भार के कारण एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल $h\rho g$ होता है जहाँ ρ पर्वत के द्रव्यमान का घनत्व है तथा g गुरुत्वीय त्वरण है। तली पर का द्रव्य ऊर्ध्वाधर दिशा में इस बल का अनुभव करता है, लेकिन पर्वत के किनारे स्वतंत्र हैं। इसलिए यह दाब या आयतन संपीडन जैसी स्थिति नहीं है। यहाँ एक अपरूपक अवयव है जो लगभग $h\rho g$ ही है। अब, किसी प्रारूपिक चट्टान की प्रत्यास्थ सीमा 30×10^7 N m^{-2} होती है। इसे $h\rho g$ के बराबर रखने पर जहाँ $\rho = 3 \times 10^3$ kg m^{-3}, हम पाते हैं कि

$$h\rho g = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

$$\text{या, } h = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2} / (3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2})$$

$$\simeq 10 \text{ km}$$

जो माउन्ट एवरेस्ट की ऊँचाई से ज़्यादा है।

सारांश

1. एकांक क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल प्रतिबल होता है तथा विमा में भिन्नात्मक अन्तर विकृति होता है। आम तौर पर तीन प्रकार के प्रतिबल होते हैं (a) तनक प्रतिबल — अनुदैर्घ्य प्रतिबल (तनन से संबद्ध) या संपीडक प्रतिबल (संपीडन से संबद्ध), (b) अपरूपक प्रतिबल, तथा (c) जलीय प्रतिबल।

2. कम विरूपण के लिए अधिकतर पदार्थों में प्रतिबल विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है। इसे हुक का नियम कहते हैं। अनुक्रमानुपातिकता का स्थिरांक प्रत्यास्थता गुणांक कहलाता है। विरूपण बलों के लगने पर पिण्डों की प्रतिक्रिया और प्रत्यास्थ व्यवहार का वर्णन करने के लिए तीन प्रत्यास्थता गुणांकों – यंग गुणांक, अपरूपण गुणांक तथा आयतन गुणांक का उपयोग किया जाता है।

   ठोसों का एक वर्ग, जो प्रत्यास्थलक कहलाता है, हुक के नियम का पालन नहीं करता है।

3. जब कोई पिण्ड तनाव या संपीडन के अंतर्गत होता है तो हुक के नियम का रूप होता है

$$F/A = Y\Delta L/L,$$

   जहाँ $\Delta L/L$ पिण्ड की तनन या संपीडन विकृति है, F विकृति उत्पन्न करने वाले प्रत्यारोपित बल का मान है, A अनुप्रस्थ परिच्छेद का वह वह क्षेत्रफल है जिस पर F प्रत्यारोपित होता है (A के लंबवत) और Y पिण्ड के द्रव्य का यंग गुणांक है। प्रतिबल F/A है।

4. जब दो बल ऊपरी और निचली फलकों के समान्तर लगाये जाते हैं तो ठोस पिण्ड इस प्रकार विरूपित होता है कि ऊपरी फलक निचली फलक के सापेक्ष बगल की ओर विस्थापित होती है। ऊपरी फलक का क्षैतिज विस्थापन ΔL ऊर्ध्वाधर ऊँचाई L के लंबवत होता है। इस प्रकार का विरूपण अपरूपण कहलाता है और संगत प्रतिबल अपरूपण प्रतिबल होता है। इस प्रकार का प्रतिबल केवल ठोसों में ही संभव है।

   इस प्रकार के विरूपण के लिए हुक के नियम का रूप हो जाता है

$$F/A = G \times \Delta L/L$$

   जहाँ ΔL पिण्ड के एक सिरे का प्रत्यारोपित बल F की दिशा में विस्थापित है और G अपरूपण गुणांक है।

5. जब कोई पिण्ड परिवर्ती द्रव द्वारा लगाये गये प्रतिबल के कारण जलीय संपीडन में जाता है तो हुक के नियम का रूप निम्न हो जाता है

$$p = B\,(\Delta V/V),$$

   जहाँ p पिण्ड पर द्रव के कारण दाब (जलीय प्रतिबल) है, $\Delta V/V$ (आयतन विकृति) उस दाब के कारण पिण्ड के आयतन में भिन्नात्मक अन्तर और B पिण्ड का आयतन गुणांक होता है।

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

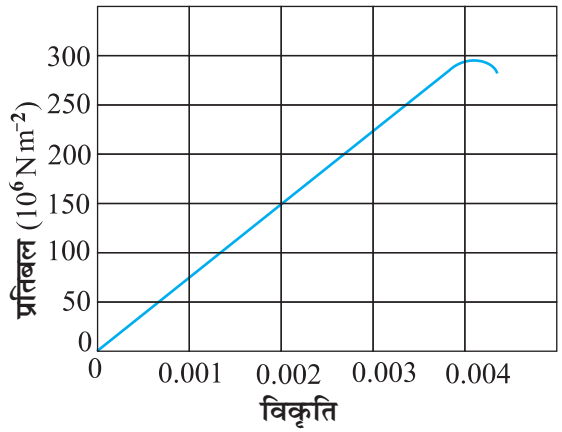
1. किसी तार को एक छत से लटकाया गया है तथा उसे दूसरे सिरे पर भार *(F)* लगाकर तनित किया गया है। छत द्वारा इस तार पर आरोपित बल भार के बराबर और विपरीत होता है। परन्तु तार के किसी परिच्छेद A पर तनाव F होता है ना कि $2F$। अतः तनन प्रतिबल, जो प्रति इकाई क्षेत्रफल पर तनाव है, F/A होता है।
2. हुक का नियम प्रतिबल-विकृति वक्र के केवल रैखिक भाग में ही वैध है।
3. यंग प्रत्यास्थता गुणांक तथा अपरूपण गुणांक केवल ठोसों के लिए ही प्रासंगिक होते हैं, इसका कारण यह है कि केवल ठोसों की ही लंबाई तथा आकृति होती है ।
4. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक ठोसों, द्रवों तथा गैसों सभी के लिए प्रासंगिक होता है। यह उस स्थिति में आयतन में परिवर्तन से संबंधित है जब पिण्ड का प्रत्येक भाग समान प्रतिबल के अंतर्गत होता है ताकि पिण्ड की आकृति ज्यों की त्यों बनी रहे।
5. धातुओं के लिए यंग गुणांक का मान मिश्र धातुओं और प्रत्यास्थलकों की अपेक्षा अधिक होता है। यंग गुणांक के अधिक मान वाले द्रव्यों में लंबाई में थोड़ा परिवर्तन करने के लिए अधिक बल की आवश्यकता होती है।
6. दैनिक जीवन में हमारी यह धारणा होती है कि जो द्रव्य अधिक तनित होते हैं, वे अधिक प्रत्यास्थ होते हैं, लेकिन यह मिथ्या है। वास्तव में वे द्रव्य जो दिए हुए भार के लिए कम तनित होते हैं, अधिक प्रत्यास्थ समझे जाते हैं।
7. व्यापक रूप में, किसी एक दिशा में आरोपित विरूपक बल अन्य दिशाओं में भी विकृति उत्पन्न कर सकता है। ऐसी परिस्थितियों में प्रतिबल एवं विकृति के बीच आनुपातिकता का वर्णन केवल एक प्रत्यास्थता नियतांक द्वारा नहीं किया जा सकता। उदाहरण के लिए, अनुदैर्घ्य विकृति के अंतर्गत, अनुप्रस्थ विमा (परिच्छेद की त्रिज्या) में भी थोड़ा अंतर हो जाएगा जिसका वर्णन द्रव्य के दूसरे प्रत्यास्थता नियतांक से करते हैं (जिसे प्वायसां अनुपात कहते हैं)।
8. प्रतिबल एक सदिश राशि नहीं है क्योंकि बल की तरह प्रतिबल किसी विशेष दिशा से निर्धारित नहीं किया जा सकता। किसी पिण्ड के एक भाग पर किसी काट की निश्चित ओर कार्यरत बल की एक निश्चित दिशा होती है।

अभ्यास

8.1 4.7 m लंबे व $3.0 \times 10^{-5}\,m^2$ अनुप्रस्थ काट के स्टील के तार तथा 3.5 m लंबे व $4.0 \times 10^{-5}\,m^2$ अनुप्रस्थ काट के ताँबे के तार पर दिए गए समान परिमाण के भारों को लटकाने पर उनकी लंबाइयों में समान वृद्धि होती है । स्टील तथा ताँबे के यंग प्रत्यास्थता गुणांकों में क्या अनुपात है?

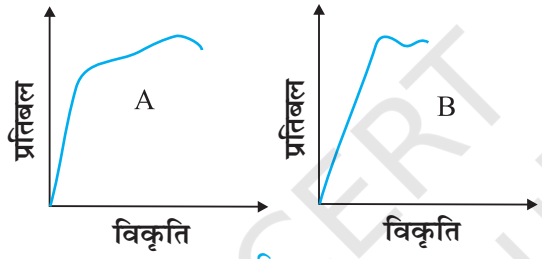
8.2 नीचे चित्र 8.9 में किसी दिए गए पदार्थ के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र दर्शाया गया है। इस पदार्थ के लिए (a) यंग प्रत्यास्थता गुणांक, तथा (b) सन्निकट पराभव सामर्थ्य क्या है?

© NCERT not to be republished



चित्र 8.9

8.3 दो पदार्थों A और B के लिए प्रतिबल-विकृति ग्राफ चित्र 8.10 में दर्शाए गए हैं।



चित्र 8.10

इन ग्राफों को एक ही पैमाना मानकर खींचा गया है।

(a) किसी पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक अधिक है?

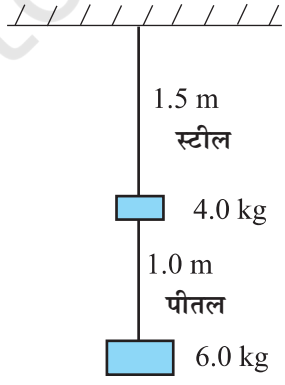
(b) दोनों पदार्थों में कौन अधिक मजबूत है?

8.4 निम्नलिखित दो कथनों को ध्यान से पढ़िये और कारण सहित बताइये कि वे सत्य हैं या असत्य :

(a) इस्पात की अपेक्षा रबड़ का यंग गुणांक अधिक है;

(b) किसी कुण्डली का तनन उसके अपरूपण गुणांक से निर्धारित होता है।

8.5 0.25 cm व्यास के दो तार, जिनमें एक इस्पात का तथा दूसरा पीतल का है, चित्र 8.11 के अनुसार भारित हैं। बिना भार लटकाये इस्पात तथा पीतल के तारों की लंबाइयाँ क्रमशः 1.5 m तथा 1.0 m हैं। यदि इस्पात तथा पीतल के यंग गुणांक क्रमशः 2.0×10^{11} Pa तथा 0.91×10^{11} Pa हों तो इस्पात तथा पीतल के तारों में विस्तार की गणना कीजिए।



चित्र 8.11

© NCERT not to be republished

8.6 ऐलुमिनियम के किसी घन के किनारे 10 cm लंबे हैं। इसकी एक फलक किसी ऊर्ध्वाधर दीवार से कसकर जड़ी हुई है। इस घन के सम्मुख फलक से 100 kg का एक द्रव्यमान जोड़ दिया गया है। एलुमिनियम का अपरूपण गुणांक 25 GPa है। इस फलक का ऊर्ध्वाधर विस्थापन कितना होगा?

8.7 मृदु इस्पात के चार समरूप खोखले बेलनाकार स्तम्भ 50,000 kg द्रव्यमान के किसी बड़े ढाँचे को आधार दिये हुए हैं। प्रत्येक स्तम्भ की भीतरी तथा बाहरी त्रिज्याएँ क्रमशः 30 तथा 60 cm हैं। भार वितरण को एकसमान मानते हुए प्रत्येक स्तम्भ की संपीडन विकृति की गणना कीजिये।

8.8 ताँबे का एक टुकड़ा, जिसका अनुप्रस्थ परिच्छेद 15.2 mm × 19.1 mm का है, 44,500 N बल के तनाव से खींचा जाता है, जिससे केवल प्रत्यास्थ विरूपण उत्पन्न हो। उत्पन्न विकृति की गणना कीजिये।

8.9 1.5 cm त्रिज्या का एक इस्पात का केबिल भार उठाने के लिए इस्तेमाल किया जाता है। यदि इस्पात के लिए अधिकतम अनुज्ञेय प्रतिबल 10^8 N m^{-2} है तो उस अधिकतम भार की गणना कीजिए जिसे केबिल उठा सकता है।

8.10 15 kg द्रव्यमान की एक दृढ़ पट्टी को तीन तारों, जिनमें प्रत्येक की लंबाई 2 m है, से सममित लटकाया गया है। सिरों के दोनों तार ताँबे के हैं तथा बीच वाला लोहे का है। तारों के व्यासों के अनुपात निकालिए, प्रत्येक पर तनाव उतना ही रहना चाहिए।

8.11 एक मीटर अतानित लंबाई के इस्पात के तार के एक सिरे से 14.5 kg का द्रव्यमान बाँध कर उसे एक ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमाया जाता है, वृत्त की तली पर उसका कोणीय वेग 2rev/s है। तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल 0.065 cm^2 है। तार में विस्तार की गणना कीजिए जब द्रव्यमान अपने पथ के निम्नतम बिंदु पर है।

8.12 नीचे दिये गये आँकड़ों से जल के आयतन प्रत्यास्था गुणांक की गणना कीजिए; प्रारंभिक आयतन = 100.0 L दाब में वृद्धि = 100.0 atm (1 atm = 1.013 × 10^5 Pa), अंतिम आयतन = 100.5 L । नियत ताप पर जल तथा वायु के आयतन प्रत्यास्थता गुणांकों की तुलना कीजिए। सरल शब्दों में समझाइये कि यह अनुपात इतना अधिक क्यों है।

8.13 जल का घनत्व उस गहराई पर, जहाँ दाब 80.0 atm हो, कितना होगा? दिया गया है कि पृष्ठ पर जल का घनत्व 1.03 × 103 kg m^{-3}, जल की संपीडता 45.8 × 10^{-11} Pa^{-1} (1 Pa = 1 N m^{-2})

8.14 काँच के स्लेब पर 10 atm का जलीय दाब लगाने पर उसके आयतन में भिन्नात्मक अंतर की गणना कीजिए।

8.15 ताँबे के एक ठोस घन का एक किनारा 10 cm का है। इस पर 7.0 × 10^6 Pa का जलीय दाब लगाने पर इसके आयतन में संकुचन निकालिए।

8.16 एक लीटर जल पर दाब में कितना अंतर किया जाए कि वह 0.10% से संपीडित हो जाए?

© NCERT not to be republished

अध्याय 9

11089CH10

तरलों के यांत्रिकी गुण

9.1 भूमिका
9.2 दाब
9.3 धारारेखी प्रवाह
9.4 बर्नूली का सिद्धांत
9.5 श्यानता
9.6 पृष्ठ तनाव

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

9.1 भूमिका

इस अध्याय में हम द्रवों तथा गैसों के कुछ सामान्य भौतिक गुणों का अध्ययन करेंगे। द्रव तथा गैस प्रवाहित होती हैं अत: तरल कहलाती है। मूल रूप में इस गुण के आधार पर हम द्रवों एवं गैसों का ठोसों से विभेद करते हैं।

हमारे चारों ओर हर स्थान पर तरल हैं। पृथ्वी के ऊपर वायु का आवरण है और इसके पृष्ठ का दो-तिहाई भाग जल से आच्छादित है। जल केवल हमारे जीवन के अस्तित्व के लिए ही आवश्यक नहीं है वरन् सभी स्तनपायी जंतुओं के शरीर का अधिकांश भाग जल है। पौधों सहित सभी सजीवों में होने वाली समस्त प्रक्रियाओं में तरलों की परोक्ष भूमिका होती है। अत: तरलों के व्यवहार व गुणों को समझना बहुत महत्त्वपूर्ण है।

तरल ठोसों से कैसे भिन्न हैं? द्रवों तथा गैसों में क्या-क्या समानता है? ठोसों के विपरीत तरल की अपनी कोई निश्चित आकृति नहीं होती। ठोसों एवं द्रवों का निश्चित आयतन होता है जबकि गैस पात्र के कुल आयतन को भर देती है। पिछले अध्याय में हमने पढ़ा है कि प्रतिबल द्वारा ठोसों के आयतन में परिवर्तन किया जा सकता है। ठोस, द्रव अथवा गैस का आयतन इस पर लगने वाले प्रतिबल अथवा दाब पर निर्भर है। जब हम ठोस या द्रव के निश्चित आयतन की बात करते हैं, तब हमारा तात्पर्य वायुमंडलीय दाब के अधीन आयतन से होता है। गैसों की तुलना में बाह्य दाबांतर से ठोस या द्रव के आयतन में परिवर्तन बहुत कम होता है। दूसरे शब्दों में गैसों की अपेक्षा ठोस एवं द्रवों की संपीड्यता काफी कम होती है।

अपरूपण (विरूपण) प्रतिबल ठोस के आयतन में परिवर्तन किए बिना उसकी आकृति बदल सकता है। तरलों का मूल गुण यह है कि वह विरूपण प्रतिबल का बहुत ही न्यून प्रतिरोध करते हैं। फलत: थोड़े से विरूपण प्रतिबल लगाने से भी उनकी आकृति बदल जाती है। ठोसों की अपेक्षा तरलों का अपरूपक प्रतिबल लगभग दस लाखवाँ कम होता है।

9.2 दाब

जब एक नुकीली सुई हमारी त्वचा में दाब लगाकर रखी जाती है, तो वह त्वचा को बेध देती है। परन्तु किसी अधिक संपर्क क्षेत्र की वस्तु (जैसे चम्मच का

© NCERT not to be republished

पिछला भाग) को उतने ही बल से दबाएँ तो हमारी त्वचा अपरिवर्तित रहती है। यदि किसी व्यक्ति की छाती पर कोई हाथी अपना पैर रख दे तो उसकी पसलियाँ टूट जाएँगी। सर्कस में यह करतब दिखाने वाले की छाती पर मजबूत लकड़ी का तख्ता रखा जाता है अत: वह इस दुर्घटना से बच जाता है। दैनिक जीवन के इस प्रकार के अनुभवों से हमें विश्वास हो जाता है कि बल के साथ-साथ जिस क्षेत्र पर वह बल आरोपित किया जाता है उसका क्षेत्रफल भी महत्त्वपूर्ण होता है। वह क्षेत्र जिस पर बल कार्य कर रहा है जितना छोटा होगा उसका प्रतिघात उतना ही अधिक होगा। यह प्रतिघात 'दाब' कहलाता है।

जब कोई पिण्ड किसी शांत तरल में डूबा हुआ है, तो तरल उस पिण्ड पर बल आरोपित करता है। यह बल सदैव पिण्ड के पृष्ठों के अभिलंबवत् होता है। ऐसा इसलिए है कि, यदि बल का अवयव पिण्ड के पृष्ठ के समांतर होता है तो न्यूटन के तृतीय नियमानुसार, पिण्ड भी अपने सतह के समांतर तरल पर बल आरोपित करता है। यह बल तरल को पृष्ठ के समांतर बहने के लिए बाध्य करता है। यह संभव नहीं है, क्योंकि तरल विश्रामावस्था में है। अत: विरामावस्था में तरल द्वारा लगने वाला बल पिण्ड के संपर्क पृष्ठ के अभिलंब ही आरोपित हो सकता है। इसे चित्र 9.1(a) में दर्शाया गया है।

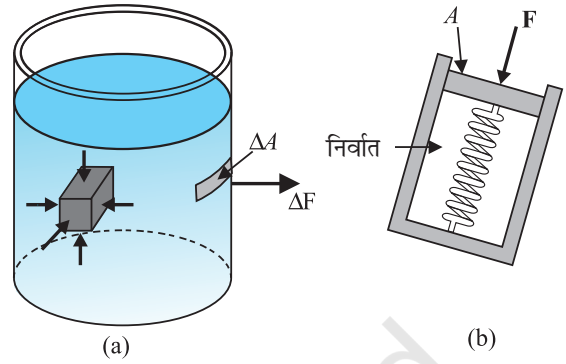
तरल द्वारा किसी बिंदु पर कार्यरत इस अभिलंब बल को मापा जा सकता है। ऐसा ही एक दाब मापक युक्ति के आदर्श रूप को चित्र 9.1(b) में दर्शाया गया है। इस युक्ति में एक निर्वातित चैम्बर होता है, जिससे एक कमानी जुड़ी होती है। इस कमानी का अंशांकन पहले से ही इसके पिस्टन पर लगे बल को मापने के लिए कर लिया जाता है। इस युक्ति को तरल के अंदर के किसी बिंदु पर रखा जाता है। पिस्टन पर तरल द्वारा आरोपित बल को कमानी द्वारा पिस्टन पर आरोपित बल से संतुलित करके तरल द्वारा पिस्टन पर आरोपित बल को माप लेते हैं। यदि तरल द्वारा A क्षेत्रफल के पिस्टन पर आरोपित अभिलंब बल का परिमाण F है, तो **औसत दाब** P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है

अत:

$$P_{av} = \frac{F}{A} \qquad (9.1)$$

सैद्धांतिक रूप में पिस्टन के क्षेत्रफल को मनमाने ढंग से छोटा किया जा सकता है। तब सीमित अर्थों में दाब को इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (9.2)$$



चित्र 9.1 (a) बीकर के द्रव में डूबे पिण्ड अथवा उसकी दीवारों पर द्रव द्वारा आरोपित बल पिण्ड के पृष्ठ के हर बिंदु के लंबवत् कार्य करता है। (b) दाब मापने के लिए युक्ति का आदर्श रूप।

दाब एक अदिश राशि है। यहाँ हम आपको यह याद दिलाना चाहते हैं कि समीकरणों (9.1) तथा (9.2) के अंश में दृष्टिगोचर होने वाली राशि संबंधित क्षेत्र के अभिलंबवत् बल का अवयव है न कि (सदिश) बल। इसकी विमाएँ $[ML^{-1}T^{-2}]$ हैं। दाब का मात्रक N m^{-2} है। फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेजी पास्कल (1623-1662) ने तरल दाब क्षेत्र में पुरोगामी अध्ययन किया। इसलिए उनके सम्मान में दाब के SI मात्रक का नाम पास्कल (pascal, प्रतीक Pa) रखा गया है। दाब का एक अन्य सामान्य मात्रक वायुमण्डल (atmosphere, प्रतीक atm) अर्थात् समुद्र तल पर वायुमंडल द्वारा आरोपित दाब, है (1 atm = 1.013×10^5 Pa)।

तरलों का वर्णन करने के लिए घनत्व (ρ) एक ऐसी भौतिक राशि है जिसके विषय में चर्चा करना अनिवार्य है। V आयतन वाले m संहति के किसी तरल का घनत्व

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (9.3)$$

घनत्व की विमाएँ $[ML^{-3}]$ हैं। इसका SI मात्रक kg m^{-3} है। यह एक धनात्मक अदिश राशि है। द्रव असंपीड्य होते हैं, अत: किसी द्रव का घनत्व सभी दाबों पर लगभग अचर रहता है। इसके विपरित, गैसें दाब में परिवर्तन के साथ घनत्व में अत्यधिक परिवर्तन दर्शाती हैं।

4 °C (277 K) पर जल का घनत्व 1.0×10^3 kg m^{-3} है। किसी पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व (विशिष्ट गुरुत्व) उस

© NCERT not to be republished

पदार्थ के घनत्व तथा जल के 4 °C पर घनत्व का अनुपात होता है। यह विमाहीन धनात्मक अदिश भौतिक राशि है। उदाहरण के लिए ऐलुमिनियम का आपेक्षिक घनत्व 2.7 है। जबकि इसका घनत्व 2.7×10^3 kg m^{-3} है। सारणी 9.1 में कुछ सामान्य तरलों के घनत्व दर्शाए गए हैं।

सारणी 9.1 कुछ सामान्य तरलों के घनत्व मानक ताप तथा वायुमंडलीय दाब (STP) पर*

तरल	घनत्व ρ (kg m^{-3})
जल	1.00×10^3
समुद्र जल	1.03×10^3
पारा	13.6×10^3
ऐथिल एल्कोहॉल	0.806×10^3
संपूर्ण रक्त	1.06×10^3
वायु	1.29
ऑक्सीजन	1.43
हाइड्रोजन	9.0×10^{-2}
अंतरातारकीय आकाश	$\approx 10^{-20}$

उदाहरण 9.1 दो उर्वस्थितियाँ (फीमर) जिनमें प्रत्येक की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 cm^2 है, 40 kg संहति के मानव शरीर के ऊपरी भाग को सँभालती हैं। उर्वस्थितियों द्वारा सहन किए जाने वाले औसत दाब का आकलन कीजिए।

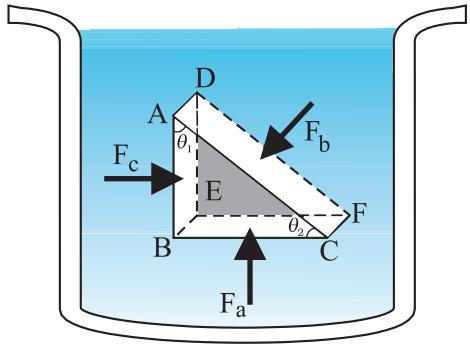
हल उर्वस्थियों की कुल अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = 2 \times 10$ cm^2 $= 20 \times 10^{-4}$ m^2। उर्वस्थियों पर कार्यरत बल F = 40 kg wt = 400 N (g = 10 m s^{-2} लेने पर)। यह बल ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में कार्य करता है, अत: यह उर्वस्थियों पर अभिलंबवत् लगता है। इसीलिए औसत दाब

$$P_{av} = \frac{F}{A} = 2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$ ◀

9.2.1 पास्कल का नियम

फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेज पास्कल ने पाया कि यदि सभी बिंदु एक ही ऊँचाई पर हों तो विराम स्थिति के तरल के सभी बिंदुओं पर दाब समान होगा। इस सत्य को भली भाँति सरल रूप में दर्शाया जा सकता है।

* STP का अर्थ मानक ताप 0 °C तथा दाब 1 atm है।



चित्र 9.2 *पास्कल के नियम का परीक्षण। ABC-DEF विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर का कोई अवयव है। यह अवयव इतना छोटा है कि गुरुत्व के प्रभाव की उपेक्षा की जा सकती है, परन्तु स्पष्टता के लिए इसे प्रवर्धित दर्शाया गया है।*

चित्र 9.2 में विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर में कोई अवयव दर्शाया गया है। यह अवयव ABC-DEF एक समकोण प्रिज़्म के रूप में है। प्रिज़्मीय अवयव आकार में बहुत छोटा है इसलिए इसका प्रत्येक बिंदु तरल के पृष्ठ के समान गहराई पर माना जा सकता है और इसलिए प्रत्येक बिंदु पर गुरुत्व का प्रभाव समान होगा। परन्तु इस सिद्धान्त को स्पष्ट करने के लिए हमने इस अवयव को बड़ा करके दर्शाया है। इस अवयव पर आपतित बल शेष तरल के कारण है और जैसा कि ऊपर दर्शाया गया है तरल के कारण आरोपित बल पृष्ठों के अभिलंब कार्य करते हैं। अत: चित्र में दर्शाये अनुसार तरल द्वारा इस अवयव पर आरोपित दाबों P_a, P_b तथा P_c के तदनरूपी बल F_a, F_b तथा F_c क्रमश: फलकों BEFC, ADFC तथा ADEB पर अभिलंबवत् आपतित होते हैं जैसा कि चित्र 9.2 में दर्शाया गया है। फलकों BEFC, ADFC तथा ADEB को A_a, A_b तथा A_c से क्रमश: व्यक्त करते हैं। तब

$F_b \sin\theta = F_c$, $F_b \cos\theta = F_a$ (साम्यावस्था से)

$A_b \sin\theta = A_c$, $A_b \cos\theta = A_a$ (ज्यामिती से)

इस प्रकार

$$\frac{F_b}{A_b} = \frac{F_c}{A_c} = \frac{F_a}{A_a}; \quad P_b = P_c = P_a \qquad (9.4)$$

अत: विरामावस्था में द्रव के अभ्यन्तर में सभी दिशाओं में दाब समान रूप से कार्य करता है। हमें यह पुन: याद दिलाता है कि अन्य प्रकार के प्रतिबलों की भाँति ही दाब सदिश नहीं है। इसे कोई दिशा नहीं दी जा सकती। विरामावस्था में दाब, तरल के भीतर के किसी क्षेत्रफल (अथवा परिबद्ध तरल) पर अभिलंबवत् होता है चाहे क्षेत्रफल किसी भी अवस्थिति में हो।

© NCERT not to be republished

तरल के एक अवयव की कल्पना करो जो एक समान अनुप्रस्थ काट वाले छड़ के समरूप है। यह छड़ साम्य अवस्था में है। इसके दोनों सिरों पर कार्यरत क्षैतिज बल साम्य अवस्था में होने चाहिए। अर्थात् दोनों सिरों पर समान दाब होना चाहिए। इससे सिद्ध होता है कि साम्य अवस्था में क्षैतिज तल में द्रव के सभी बिंदुओं पर समान दाब है। माना कि द्रव के विभिन्न भागों पर समान दाब नहीं है, तब द्रव पर नेट बल के कारण वह बहेगा। अत: बहाव की अनुपस्थिति में किसी क्षैतिज तल पर तरल में प्रत्येक स्थान पर समान दाब होना चाहिए।

9.2.2 गहराई के साथ दाब में परिवर्तन

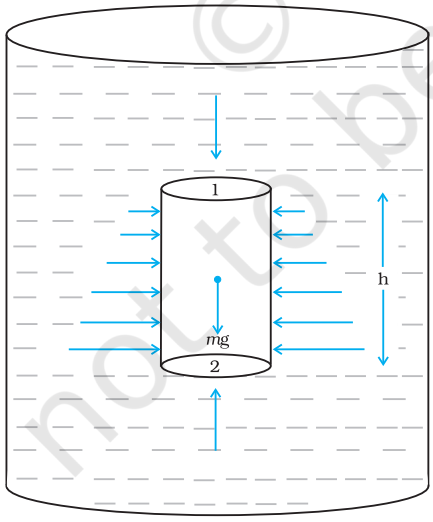
एक पात्र में द्रव की विरामावस्था पर विचार करें। चित्र 9.3 में बिंदु 1 बिंदु 2 से h ऊँचाई पर है। बिंदु 1 व 2 पर दाब क्रमश: P_1 तथा P_2 हैं। A आधार क्षेत्रफल तथा h ऊँचाई के तरल के एक बेलनाकार अवयव को लें। चूँकि तरल विरामावस्था में है अत: परिणामी क्षैतिज बल शून्य होना चाहिए। परिणामी ऊर्ध्वाधर दिशा में कार्यरत बल तरल अवयव के भार के तुल्य होना चाहिए। नीचे की ओर कार्य करने वाला ऊपरी सिरे पर तरल के दाब द्वारा बल (P_1A) तथा पैंदी पर ऊपर की ओर कार्य करने वाला बल (P_2A) है। यदि बेलन में तरल का भार mg है तो

$$(P_2 - P_1)\, A = mg \qquad (9.5)$$

अब यदि ρ तरल का घनत्व है तो उसकी संहति

$m = \rho V = \rho hA$ होगी, इसलिए

$$P_2 - P_1 = \rho gh \qquad (9.6)$$



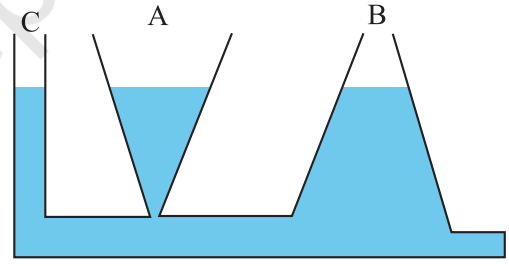
चित्र 9.3 *तरल के ऊर्ध्वाधर बेलनी स्तंभ पर दाब के द्वारा गुरुत्व का प्रभाव दिखाया गया है।*

बिन्दु 1 व 2 में दाबांतर उनके बीच ऊर्ध्वाधर दूरी h, तरल के घनत्व ρ तथा गुरुत्वीय जनित त्वरण g पर निर्भर है। यदि विचारणीय बिंदु 1 को तरल (माना पानी) के शीर्ष फलक पर स्थानांतरित कर दिया जाए जो वायुमण्डल के लिए खुला है तो P_1 को वायुमंडलीय दाब (P_a) द्वारा तथा P_2 को P से प्रतिस्थापित किया जा सकता है। तब समीकरण (9.6) से

$$P = P_a + \rho gh \qquad (9.7)$$

इस प्रकार, वायुमण्डल के लिए खुले पृष्ठ के नीचे दाब P वायुमण्डलीय दाब की अपेक्षा ρgh परिमाण से अधिक होगा। h गहराई पर स्थित किसी बिंदु पर अतिरिक्त दाब $P - P_a$ उस बिंदु पर **गेज दाब** कहलाता है।

निरपेक्ष (परम) दाब के समीकरण (9.7) में बेलन का क्षेत्रफल नहीं आ रहा। अत:, दाब परिकलन के लिए तरल के स्तंभ की ऊँचाई महत्त्वपूर्ण है न कि पात्र की आकृति, आधार या अनुप्रस्थ काट। समान क्षैतिज तल (समान गहराई) के सभी बिंदुओं पर द्रव का दाब समान होता है। **द्रवस्थैतिक विरोधोक्ति** के उदाहरण से इस परिणाम को भलीभांति समझा जा सकता है। A, B तथा C विभिन्न आकृतियों के पात्र लें (चित्र 9.4)। पैंदी में एक क्षैतिज पाइप द्वारा इनको जोड़ा जाता है। पानी भरने पर इन तीनों पात्रों में उसका तल समान रहता है यद्यपि इनमें पानी भिन्न-भिन्न मात्रा में होता है। यह इसलिए है कि इनकी तली पर दाब समान रहता है।



चित्र 9.4 *द्रवस्थैतिक विरोधोक्ति की व्याख्या। तीन पात्रों A, B और C में समान ऊँचाई तक जल भरा है परन्तु सभी में जल का परिमाण भिन्न-भिन्न है।*

उदाहरण 9.2 किसी झील के पृष्ठ से 10 m गहराई पर किसी तैराक पर दाब ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $h = 10$ m तथा $\rho = 1000$ kg m^{-3}

$g = 10$ m s^{-2} लें

समीकरण *(9.7)* से,

$$P = P_a + \rho gh$$

$$= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 10 \text{ m s}^{-2} \times 10 \text{ m}$$

$$= 2.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$

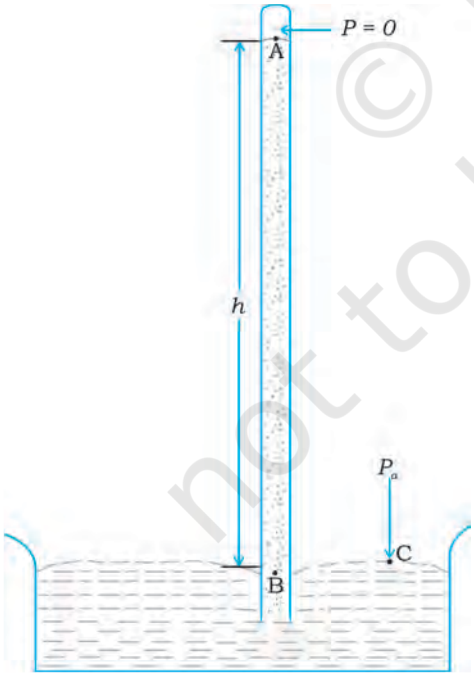
$$\approx 2 \text{ atm}$$

© NCERT not to be republished

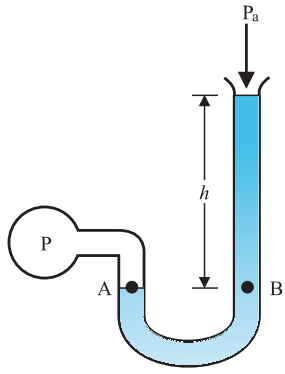
यह दाब खुले पृष्ठ के दाब की तुलना में 100% अधिक है। 1 km गहराई पर दाब में वृद्धि 100 atm होती है। पनडुब्बियों की संरचना इतने अधिक दाबों को सह सकने की क्षमता को ध्यान में रखकर की जाती है। ◀

9.2.3 वायुमण्डलीय दाब तथा गेज दाब

किसी बिंदु पर वायुमण्डलीय दाब उस बिंदु के एकांक अनुप्रस्थ काट वाले क्षेत्रफल पर उस बिंदु से वायुमण्डल के शीर्ष तक की वायु के स्तंभ के भार के बराबर होता है। समुद्र तल पर यह 1.013×10^5 Pa है (1 atm)। वायुमण्डलीय दाब की यथार्थ माप के लिए सर्वप्रथम इटली के वैज्ञानिक इवेंगलिस्टा टॉरिसेली (1608-1647) ने एक युक्ति की रचना की तथा वायुमण्डल दाब को मापा। जैसा कि चित्र 9.5 (a) में दर्शाया गया है, एक सिरे से बंद लंबी काँच की नली लेकर उसमें पारा भरा गया और फिर उसे पारे से आंशिक भरे पात्र में ऊर्ध्वाधर उलटा खड़ा किया गया। इस युक्ति को पारे का बैरोमीटर कहते हैं। नली में पारे से ऊपर का स्थान पारे की वाष्प जिसका दाब P बहुत अल्प होता है, भरा रहता है, यह दाब इतना कम होता है कि इसे नगण्य मान सकते हैं। अत: बिन्दु A पर दाब शून्य होगा। स्तंभ के अन्दर बिंदु B पर दाब समान तल वाले बिंदु C पर दाब के तुल्य होना चाहिए $(P_B = P_a)$।



(a) पारद वायुदाब मापी



(b) खुली-नली मैनोमीटर (दाबांतर मापी)

चित्र 9.5 *दाब मापने की दो युक्तियाँ।*

B पर दाब = वायुमण्डल दाब P_a

$$P_a = \rho g h \qquad (9.8)$$

जहाँ ρ पारे का घनत्व तथा h नली में पारे के स्तंभ की ऊँचाई है।

प्रयोग में पाया गया कि समुद्र तल पर बैरोमीटर में पारे के स्तंभ की ऊँचाई 76 cm के लगभग होती है जो एक वायुमण्डलीय दाब (1 atm) के तुल्य है। समीकरण (9.8) में ρ का मान भरकर भी इसे प्राप्त किया जा सकता है। सामान्यत: दाब का वर्णन cm अथवा mm (पारा स्तंभ) के पदों में किया जाता है। 1 mm (Hg) दाब का तुल्यांकी दाब 1 टॉर (torr) कहलाता है (टॉरिसेली के सम्मान में)।

1 torr = 133 Pa

औषध विज्ञान तथा शरीर क्रिया विज्ञान (फ़िजिओलॉजी) में दाब के मात्रक के रूप में mm (Hg) तथा टॉर (torr) का उपयोग किया जाता है। मौसम विज्ञान में दाब का सामान्य मात्रक बार (bar) तथा मिलिबार (millibar) लिया जाता है।

1 bar = 10^5 Pa

दाबांतर को मापने के लिए खुली-नली मैनोमीटर एक लाभप्रद उपकरण है। इस युक्ति में एक U आकार की नली होती है जिसमें उपयुक्त द्रव भरा होता है अर्थात् कम दाबांतर मापने के लिए कम घनत्व का द्रव (जैसे तेल) तथा अधिक दाबांतर के लिए अधिक घनत्व का द्रव (जैसे पारा) भरा जाता है। नली का एक सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया जाता है तथा दूसरा सिरा जिस निकाय का दाब ज्ञात करना है, उससे जोड़ दिया जाता है। [देखिए चित्र 9.5 (b)]। बिंदु A पर दाब बिंदु B पर दाब के बराबर है। जिस दाब को हम सामान्यत: मापते हैं वह वास्तव में प्रमापी अथवा गेज़ दाब होता है। यह $P - P_a$ के बराबर होता है जो समीकरण (9.8) द्वारा दिया जाता है तथा मैनोमीटर की ऊँचाई h के अनुपाती होता है।

© NCERT not to be republished

U नली में भरे द्रव के तलों में दोनों ओर समान दाब होता है। दाब तथा ताप के विस्तृत परिसर में द्रव के घनत्व में बहुत कम परिवर्तन होता है। हम प्रस्तुत विवेचन के लिए इसे स्थिर मान सकते हैं। दूसरी ओर दाब तथा ताप परिवर्तन के साथ गैसों के घनत्व में बहुत अधिक परिवर्तन परिलक्षित होता है। अत: गैसों की तुलना में विपरीत द्रवों को अधिकांश रूप से असंपीड्य माना जाता है।

उदाहरण 9.3 समुद्र तल पर वायुमंडल का घनत्व 1.29 kg/m^3 है। यह मानते हुए कि ऊँचाई के साथ घनत्व में कोई परिवर्तन नहीं होता, ज्ञात कीजिए कि वायुमंडल का विस्तार कितनी ऊँचाई तक है?

हल : हम समीकरण (9.8) का उपयोग करते हैं

$\rho gh = 1.29\ \text{kg m}^{-3} \times 9.8\ \text{m s}^{-2} \times h\ \text{m} = 1.01 \times 10^5\ \text{Pa}$

$h = 7989\ \text{m} \approx 8\ \text{km}$

वास्तव में, ऊँचाई के साथ वायु के घनत्व में कमी होती जाती है। ऐसा ही गुरुत्वीय त्वरण g के साथ भी होता है। वायुमण्डलीय आवरण का विस्तार घटते दाब के साथ लगभग 100 km ऊँचाई तक है। हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि समुद्र तल पर वायुमंडलीय दाब सदैव ही 760 mm (Hg) नहीं होता। इसमें 10 mm (Hg) अथवा अधिक की कमी तूफान के आने की सूचक होती है।

उदाहरण 9.4 समुद्र के नीचे 1000 m गहराई पर (a) परम दाब कितना है? (b) गेज़ दाब कितना है? (c) इस गहराई पर पनडुब्बी की 20 cm × 20 cm क्षेत्रफल वाली खिड़की (जिसके आंतरिक भाग का दाब समुद्र तल पर वायुमण्डलीय दाब के बराबर रखा गया है) पर आरोपित बल का आकलन कीजिए। (समुद्र जल का घनत्व $1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}$, $g = 10\ \text{m s}^{-2}$)

हल : यहाँ $h = 1000\ \text{m}$ तथा $\rho = 1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}$

(a) समीकरण (9.7) से परम दाब

$P = P_a + \rho gh$

$= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} + 1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 10\ \text{m s}^{-2} \times 1000\ \text{m}$

$= 104.01 \times 10^5\ \text{Pa}$

$\approx 104\ \text{atm}$

(b) गेज़ दाब $= P - P_a = \rho gh \approx P_g$

$P_g = 1.03 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 10\ \text{m s}^{-2} \times 1000\ \text{m}$

$= 103 \times 10^5\ \text{Pa}$

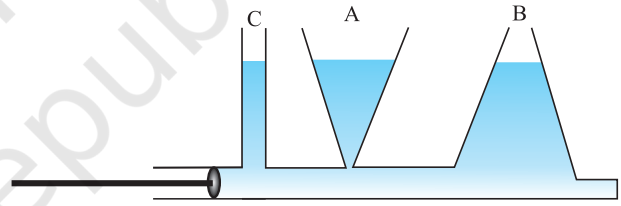
$\approx 103\ \text{atm}$

(c) पनडुब्बी के बाहर दाब $P = P_a + \rho gh$ और अंदर दाब P_a है। इसलिए खिड़की पर आपतित कुल दाब गेज़ दाब $P_g = \rho gh$ है। चूँकि खिड़की का क्षेत्रफल $A = 0.04\ \text{m}^2$ है अत: आपतित बल

$F = P_g A = 103 \times 10^5\ \text{Pa} \times 0.04\ \text{m}^2 = 4.12 \times 10^5\ \text{N}$ ◀

9.2.4 द्रव चालित मशीन

आइये अब हम देखते हैं कि पात्र में रखे तरल पर जब दाब परिवर्तन करते हैं तो क्या होता है? एक क्षैतिज बेलन पर विचार करें जिसमें पिस्टन लगा है तथा उसके विभिन्न बिंदुओं पर तीन ऊर्ध्व ट्यूब लगी हैं [चित्र 9.6(a)] ऊर्ध्व ट्यूब में द्रव स्तंभ की ऊँचाई क्षैतिज बेलन में तरल का दाब दर्शाती है। यह सभी ऊर्ध्व ट्यूबों में अनिवार्यत: समान होती है। यदि पिस्टन को ध केलते हैं तो सभी ट्यूबों में तरल का स्तर उठ जाता है, तथा पुन: यह सभी में समान हो जाता है।



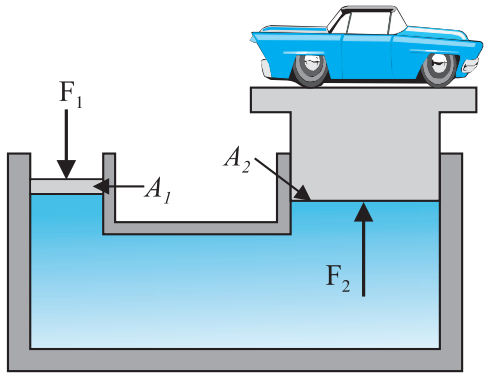
चित्र 9.6 (a) पात्र में रखे तरल के किसी भाग पर जब बाहय दाब आपतित होता है, तो यह सभी दिशाओं में समान रूप से संचरित हो जाता है।

यह दर्शाता है कि जब बेलन पर दाब बढ़ाया जाता है तो यह पूर्ण तरल से समान रूप में वितरित हो जाता है। हम कह सकते हैं कि ***पात्र में रखे तरल के किसी भाग पर जब बाह्य दाब आपतित होता है, तो यह बिना ह्रास के सभी दिशाओं में समान रूप से संचरित हो जाता है।*** यह **"पास्कल के नियम का अन्य रूप"** है तथा दैनिक जीवन में इसके कई उपयोग हैं।

कई युक्तियाँ जैसे **द्रव चालित उत्थापक** और **द्रव चालित ब्रेक** इस नियम पर आधारित हैं। इन युक्तियों में दाब संचरण के लिए तरलों का उपयोग किया जाता है। चित्र 9.6 (b) के अनुसार द्रव चालित उत्थापक में तरल द्वारा भरे स्थान से विलगित दो पिस्टन हैं। अनुप्रस्थ काट A_1 का छोटा पिस्टन द्रव

© NCERT not to be republished

पर सीधा बल F_1 आरोपित करता है। $P = \frac{F_1}{A_1}$ दाब पूर्ण द्रव में संचरित होता है तथा अनुप्रस्थ काट A_2 के बड़े बेलन जिसमें पिस्टन लगा है पर ऊर्ध्वमुखी बल $P \times A_2$ के रूप में प्राप्त होता है। अतएव, पिस्टन अधिक बल को संतुलित (जैसे प्लेटफॉर्म पर रखे कार या ट्रक के अधिक भार) कर सकता है $F_2 = PA_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1}$। A_1 पर बल बदलकर प्लेटफॉर्म को ऊपर या नीचे लाया जा सकता है। इस प्रकार प्रयुक्त बल $\frac{A_2}{A_1}$ गुणक से बढ़ जाता है। यह गुणक युक्ति का **यांत्रिक लाभ** कहलाता है। निम्न उदाहरण इसे स्पष्ट करता है।



(b)

चित्र 9.6 (b) *द्रव चालित उत्थापक, भारी बोझ उठाने की एक युक्ति के कार्य करने के सिद्धांत की व्याख्या का योजनाबद्ध आरेख।*

उदाहरण 9.5 भिन्न-भिन्न अनुप्रस्थ काट वाली दो पिचकारियों में (बिना सुई के) पानी भरा है और इन्हें पानी से भरी रबर नली से कसकर जोड़ दिया गया है। छोटे तथा बड़े पिस्टन के व्यास क्रमशः 1 cm तथा 3 cm हैं। (a) जब छोटे पिस्टन पर 10 N का बल लगाया जाता है तो बड़े पिस्टन पर लगे बल का आकलन कीजिए। (b) यदि छोटे पिस्टन को 6 cm अंदर धक्का दिया जाता है तो बड़ा पिस्टन कितना बाहर चलेगा?

हल : (a) चूँकि बिना ह्रास के दाब संपूर्ण द्रव में संचरित होता है,

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 = \frac{\pi (3/2 \times 10^{-2}\,\text{m})^2}{\pi (1/2 \times 10^{-2}\,\text{m})^2} \times 10\,\text{N}$$

$$= 90\,\text{N}$$

(b) पानी पूरा असंपीड्य माना जाता है। छोटे पिस्टन के अन्दर चलने से तुल्य आयतन बड़े पिस्टन द्वारा बाहर की ओर चलने को बाध्य करता है।

$$L_1 A_1 = L_2 A_2$$

$$L_2 = \frac{A_1}{A_2} L_1 = \frac{\pi (1/2 \times 10^{-2}\,\text{m})^2}{\pi (3/2 \times 10^{-2}\,\text{m})^2} \times 6 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

$$\cong 0.67 \times 10^{-2}\,\text{m} = 0.67\,\text{cm}$$

नोट : दोनों पिस्टनों के लिए वायुमण्डलीय दाब उभयनिष्ठ है अतः इसे छोड़ दिया गया है। ◀

उदाहरण 9.6 एक कार उत्थापक में छोटे पिस्टन जिसकी त्रिज्या 5 cm है पर F_1 बल संपीड्य वायु लगाती है। यह दाब 15 cm त्रिज्या वाले दूसरे पिस्टन पर संचरित होता है (चित्र 9.6)। यदि उठाई जाने वाली कार की संहति 1350 kg हो तो F_1 का आकलन कीजिए। इस कार्य को संपन्न करने के लिए आवश्यक दाब क्या है? ($g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$)

हल : क्योंकि संपूर्ण तरल में दाब बिना ह्रास के संचरित होता है।

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{\pi (5 \times 10^{-2}\,\text{m})^2}{\pi (15 \times 10^{-2}\,\text{m})^2} (1350\,\text{kg} \times 9.8\,\text{m s}^{-2})$$

$$= 1470\,\text{N}$$

$$\approx 1.5 \times 10^3\,\text{N}$$

इस बल के संगत वायु दाब

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.5 \times 10^3\,\text{N}}{\pi (5 \times 10^{-2})^2\,\text{m}} = 1.9 \times 10^5\,\text{Pa}$$

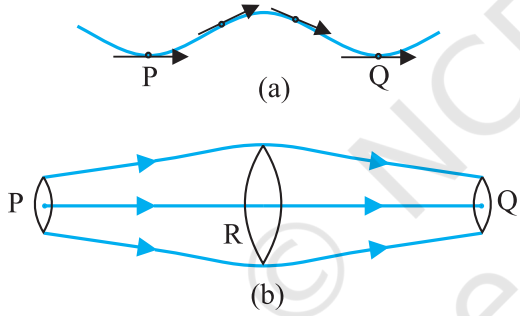
यह वायुमण्डलीय दाब का लगभग दुगुना है। ◀

मोटर कार में द्रव चालित ब्रेक भी इसी सिद्धांत पर कार्य करते हैं। जब हम अपने पैर से थोड़ा सा बल पैडल पर लगाते हैं तो पिस्टन मास्टर बेलन के अंदर जाता है और उत्पन्न दाब ब्रेक तेल द्वारा पिस्टन के बड़े क्षेत्रफल पर संचरित होता है। पिस्टन पर एक बड़ा बल कार्य करता है। इसके नीचे की ओर ढकेले जाने पर ब्रेक शू फैल कर ब्रेक लाइन को दबाता है। इस प्रकार पैडल पर थोड़ा सा बल पहिए पर अधिक बल मंदन उत्पन्न करता है। इस निकाय का एक प्रमुख लाभ यह है कि पैडल को दबाने से उत्पन्न दाब चारों पहियों से संलग्न बेलनों में समान रूप से संचरित होता है जिससे ब्रेकों का प्रभाव सभी पहियों पर बराबर पड़ता है।

© NCERT not to be republished

9.3 धारारेखी प्रभाव

अब तक हमने विराम तरलों के बारे में अध्ययन किया। तरल प्रवाह के अध्ययन को तरल गतिकी कहते हैं। जब हम पानी की टोटी को धीरे से खोलते हैं तो आरंभ में पानी उर्मिहीन गति से बहता है। लेकिन जब पानी की गति बढ़ती है तो वह अपनी उर्मिहीन गति को छोड़ देता है। तरलों की गति का अध्ययन करने में हम अपना ध्यान केंद्रित करेंगे कि किसी स्थान पर किसी क्षण विशेष पर, तरल के विभिन्न कणों पर क्या हो रहा है। किसी तरल का प्रवाह **अपरिवर्ती** प्रवाह कहलाता है, यदि किसी स्थान से गुज़रने वाले तरल के प्रत्येक कण का वेग समय में अचर रहता है। इसका अर्थ यह नहीं है कि स्थान के विभिन्न बिंदुओं पर वेग समान है। जैसे-जैसे कोई विशिष्ट कण एक बिंदु से दूसरे बिंदु की ओर अग्रसर होता है, इसका वेग बदल सकता है, अर्थात् किसी दूसरे बिंदु पर कण का वेग भिन्न हो सकता है। परन्तु दूसरे बिंदु से गुज़रने पर कण ठीक वैसा ही व्यवहार करता है जैसा कि वहाँ से ठीक पहले गुजरने वाले कण ने किया। प्रत्येक कण निष्कोण पथ पर चलता है और कणों के पथ एक दूसरे को नहीं काटते।



चित्र 9.7 धारारेखाओं का अर्थ (a) किसी तरल का प्ररूपी प्रपथ (b) धारारेखी प्रभाव का क्षेत्र।

किसी तरल अपरिवर्ती प्रवाह में जिस पथ पर कण गमन करता है उसे **धारारेखा** कहते हैं। किसी बिंदु पर तरल कण का वेग सदैव ही धारारेखा के उसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है जो धारारेखा प्रवाह को परिभाषित करता है। जैसा कि चित्र 9.7 (a) में दर्शाया गया है, किसी कण के पथ को लेते है। वक्र यह दर्शाता है कि तरल का कण समय के साथ किस प्रकार गति करता है। वक्र PQ तरल प्रवाह का स्थायी प्रतिचित्र है जो यह दर्शाता है कि तरल किस प्रकार धारारेखा में प्रवाहित होता है। कोई भी दो धारारेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटतीं यदि वह ऐसा करती हैं (अर्थात् काटती हैं) तो किसी बिंदु पर तरल का प्रवाह स्थिर नहीं होता तथा एक तरल कण किसी भी दिशा में गति करने लगेगा और प्रवाह अपरिवर्ती नहीं रहेगा। इसलिए अपरिवर्ती प्रवाह में प्रवाह का मानचित्र समय में स्थिर रहता है। हम निकटवर्ती धारारेखाओं को कैसे खींचते हैं? यदि हम प्रत्येक प्रभावित कण की धारारेखा को प्रदर्शित करने की इच्छा रखते हैं तो हम रेखाओं के सांतत्य में सिमट जाएँगे। तरल प्रवाह की दिशा में लंबवत समतलों पर विचार कीजिए अर्थात चित्र 9.7 (b) में तीन बिंदु P, R तथा Q पर। इन समतल खंडों का चुनाव इस प्रकार किया जाता है कि इनकी सीमाएँ धारारेखाओं के समान समूह द्वारा निर्धारित हो जाएँ। इसका अर्थ है कि P, R तथा Q पर दर्शाये गये लंबवत समतल पृष्ठों से प्रवाहित होने वाले तरल कणों की संख्या समान है। इस प्रकार यदि P, R, तथा Q पर तरल कणों के वेग परिमाण क्रमशः v_P, v_R तथा v_Q हैं तथा इन तलों के क्षेत्रफल क्रमशः A_P, A_R और A_Q हैं तो छोटे से समय अंतराल Δt में A_p से गुज़रने वाले तरल की संहति $\rho_P A_P v_P \Delta t$ है। इसी प्रकार A_R से होकर प्रवाहित तरल की संहति $\Delta m_R = \rho_R A_R v_R \Delta t$ और $\Delta m_Q = \rho_Q A_Q v_Q \Delta t$ होगी। सभी मामलों में तरल के बाहर निकलने की संहति उस स्थान में आने वाले तरल की संहति के बराबर होगी।

अतएव,

$$\rho_P A_P v_P \Delta t = \rho_R A_R v_R \Delta t = \rho_Q A_Q v_Q \Delta t \qquad (9.9)$$

असंपीड्य तरल के प्रवाह के लिए

$\rho_P = \rho_R = \rho_Q$

तब समीकरण (9.9)

$$A_P v_P = A_R v_R = A_Q v_Q \qquad (9.10)$$

में बदल जाता है। जिसे **सांतत्य-समीकरण** कहते हैं तथा असंपीड्य तरल प्रभाव में यह संहति संरक्षण का कथन है।

सामान्यतः Av = स्थिरांक (9.11)

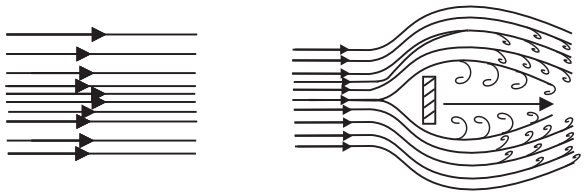
Av आयतन अभिवाह या प्रवाह दर देता है। यह नली प्रवाह में सर्वत्र स्थिर रहता है अतः संकरे स्थानों पर जहाँ धारा रेखाएँ पास-पास हैं वहाँ वेग बढ़ जाता है तथा इसका विलोमतः चित्र 9.7b से स्पष्ट है कि $A_R > A_Q$ या $v_R < v_Q$ R से Q को प्रवाहित तरल त्वरित होता है। क्षैतिज पाइप में यह तरल दाब में परिवर्तन से संबद्ध है।

तरल के कम वेग से धारा प्रवाह प्राप्त होता है। एक सीमांत मान के पश्चात जिसे क्रांतिक वेग कहते हैं, यह धारा प्रवाह **प्रक्षुब्ध प्रवाह** में बदल जाता है। जब एक तेज़ प्रवाही धारा चट्टान से टकराती है तो हम देख सकते हैं कि कैसे छोटे-छोटे फेन (foam) भँवर जैसे बनते हैं जिन्हें दूध-धारा (white water rapids) कहते हैं।

चित्र 9.8 कुछ प्ररूपी प्रवाह की धारारेखाएँ दर्शायी गई हैं। उदाहरण के लिए चित्र 9.8(a) में स्तरीय प्रवाह दर्शाया

© NCERT not to be republished

गया है जहाँ तरल के विभिन्न बिंदुओं पर वेगों के परिमाण भिन्न-भिन्न हो सकते हैं, परन्तु उनकी दिशाएँ एक दूसरे से समानांतर हैं। चित्र 9.8 (b) में प्रक्षुब्ध प्रवाह आलेखित किया गया है।



(a) (b)

चित्र 9.8 (a) तरल प्रवाह की कुछ धारारेखाएँ (b) प्रवाह के लंबवत् रखी चपटी प्लेट से टकराता वायु जेट। यह प्रक्षुब्ध प्रवाह का एक उदाहरण है।

9.4 बर्नूली का सिद्धांत

तरल प्रवाह एक जटिल परिघटना है। परन्तु ऊर्जा संरक्षण का उपयोग करते हुए हम अपरिवर्ती अथवा धारा-प्रवाह के कुछ विशिष्ट गुणों को प्राप्त कर सकते हैं।

परिवर्ती अनुप्रस्थ काट के पाइप में तरल प्रवाह पर विचार कीजिए। माना कि पाइप परिवर्ती ऊँचाइयों पर है जैसा कि चित्र 9.9 में दर्शाया गया है। अब माना कि पाइप में एक असंपीड्य तरल अपरिवर्ती प्रवाह से प्रवाहित है। सांतत्य समीकरण के अनुसार इसके वेग में परिवर्तन होना चाहिए। त्वरण उत्पन्न करने के लिए एक बल की आवश्यकता है जो इसे घेरे हुए तरल से उत्पन्न होता है। भिन्न-भिन्न भागों में दाब भिन्न होना चाहिए। पाइप के दो बिंदुओं के बीच दाबांतर का संबंध वेग परिवर्तन (गति ऊर्जा परिवर्तन) तथा उन्नयन (ऊँचाई) में परिवर्तन (स्थिति ऊर्जा में परिवर्तन) दोनों में प्रदर्शित करने वाला सामान्य व्यंजक, बर्नूली का समीकरण है। इस संबंध को स्विस भौतिकविद् डेनियल बर्नूली ने विकसित किया था।

दो क्षेत्रों 1 (अर्थात् BC) तथा 2 (अर्थात् DE) क्षेत्रों में प्रवाह को लें। आरंभ में B तथा D के बीच तरल को लें। अत्यंत अल्प अंतराल Δt में यह तरल प्रवाहित होगा। माना कि B पर चाल v_1 तथा D पर v_2 हैं। तब B पर तरल $v_1\Delta t$, C की ओर प्रवाहित होगा ($v_1\Delta t$ इतना छोटा है कि हम BC का समान अनुप्रस्थ काट ले सकते हैं)। इसी समय अंतराल Δt में तरल जो आरंभ में D पर है E की ओर प्रवाहित होगा तथा $v_2\Delta t$ दूरी तय करेगा। दो क्षेत्रों के बाँधने वाले A_1, A_2 क्षेत्रफल वाले समतल फलकों पर, जैसा दिखाया गया है, दाब P_1, P_2 कार्य करते हैं। बाएँ सिरे (BC) पर तरल पर किया गया कार्य $W_1 = P_1A_1(v_1\Delta t) = P_1\Delta V$ है। क्योंकि दोनों क्षेत्रों से समान आयतन का तरल प्रवाहित होता है (सांतत्य समीकरण से) दूसरे सिरे (DE) पर तरल द्वारा किया गया कार्य $W_2 = P_2A_2(v_2\Delta t) = P_2\Delta V$ है। अथवा तरल पर किया गया कार्य $-P_2\Delta V$ है। अत: द्रव पर किया गया कुल कार्य

$$W_1 - W_2 = (P_1 - P_2)\,\Delta V \text{ है।}$$

इस कार्य का कुछ भाग तरल की गतिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है, तथा शेष भाग तरल की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है। यदि पाइप प्रवाहित तरल का घनत्व ρ तथा $\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho\Delta V$ की संहति Δt समय में पाइप से प्रवाहित है तो गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta U = \rho g\Delta V\,(h_2 - h_1)$$

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2)$$

तरल के इस आयतन पर हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय (अध्याय 6) का उपयोग कर सकते हैं जिससे हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है।

$$(P_1 - P_2)\,\Delta V = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\Delta V\,(h_2 - h_1)$$

प्रत्येक पद को ΔV से विभाजित करने पर

$$(P_1 - P_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\,(h_2 - h_1)$$

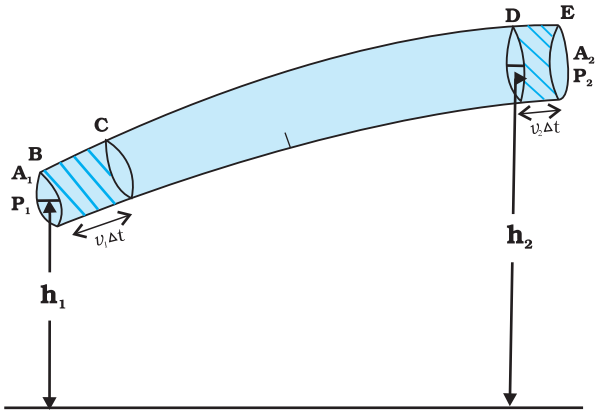
उपरोक्त पदों को पुन: व्यवस्थित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$P_1 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v_2^2 + \rho g h_2 \qquad (9.12)$$

यह **बर्नूली समीकरण** है। चूंकि पाइपलाइन की लंबाई में 1 व 2 किन्हीं दो स्थितियों को दर्शाते हैं अत: हम सामान्य रूप में व्यक्त कर सकते हैं कि

$$P + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v^2 + \rho g h = \text{स्थिरांक} \qquad (9.13)$$

© NCERT not to be republished



चित्र 9.9 *परिवर्ती अनुप्रस्थकाट के किसी पाइप में किसी आदर्श तरल का प्रवाह, $v_1\Delta t$ लंबाई के खंड में भरा तरल समय Δt में $v_2\Delta t$ लंबाई के खंड तक गति कर लेता है।*

दूसरे शब्दों में, बर्नूली के कथन को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं: "जब हम किसी धारा रेखा के अनुदिश गति करते हैं, तो दाब P प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा $\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)$ तथा प्रति एकांक आयतन गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (ρgh) का योग अचर रहता है।"

नोट करें कि ऊर्जा संरक्षण के नियम का उपयोग करते समय यह माना गया है कि घर्षण के कारण कोई ऊर्जा क्षति नहीं होती। परन्तु वास्तव में, जब तरल प्रवाह होता है, तो आंतरिक घर्षण के कारण कुछ ऊर्जा की हानि हो जाती है। इसकी व्युत्पत्ति तरल की विभिन्न सतहों के भिन्न-भिन्न वेगों से प्रवाह के कारण होती है। यह सतहें एक दूसरे पर घर्षण बल लगाती हैं और परिणामस्वरूप ऊर्जा का ह्रास होता है। तरलों के इस गुण को श्यानता कहते हैं जिसकी विस्तार से व्याख्या बाद के खंड में की गई है। तरल की क्षय गतिज ऊर्जा ऊष्मा ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। अतः बर्नूली का समीकरण शून्य श्यानता अथवा असान्य तरलों पर लागू होता है। बर्नूली प्रमेय पर एक और प्रतिबंध है कि यह असंपीड्य तरलों पर ही लागू होता है, क्योंकि तरलों की प्रत्यास्थ ऊर्जा को नहीं लिया गया है। वास्तव में इसके कई उपयोग हैं जो कम श्यानता तथा असंपीड्य तरलों की बहुत सी घटनाओं की व्याख्या कर सकते हैं। अस्थिर अथवा विक्षोभ प्रवाह में भी बर्नूली समीकरण काम नहीं आता क्योंकि इसमें वेग तथा दाब समय में लगातार अस्थिर रहते हैं।

जब तरल विरामावस्था में होता है अर्थात् प्रत्येक स्थान पर इसके कणों का वेग शून्य है, बर्नूली समीकरण निम्न प्रकार हो जाता है:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$
$$(P_1 - P_2) = \rho g (h_2 - h_1)$$

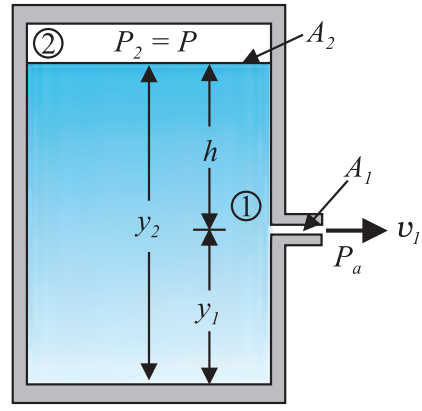
जो समीकरण (9.6) के ही समान है।

9.4.1 चाल का बहिर्वाह : टोरिसेली का नियम

बहिर्वाह शब्द का अर्थ है तरल का बहिर्गमन। टोरिसेली ने यह पता लगाया कि किसी खुली टंकी से तरल के बहिर्वाह की चाल को मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल के सूत्र के समरूप सूत्र द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। ρ घनत्व के द्रव से भरी किसी ऐसी टंकी पर विचार कीजिए जिसमें टंकी की तली से y_1 ऊँचाई पर एक छोटा छिद्र है (देखिए चित्र 9.10)। द्रव के ऊपर, जिसका पृष्ठ y_2 ऊँचाई पर है, वायु है जिसका दाब P है। सांतत्य समीकरण (समीकरण 9.9) से

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$
$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

यदि टंकी की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A_2 छिद्र की अनुप्रस्थ का क्षेत्रफल A_1 की तुलना में काफी अधिक है ($A_2 >> A_1$), तब हम शीर्ष भाग पर तरल को सन्निकटतः विराम में मान सकते हैं, अर्थात् $v_2 = 0$। तब बिंदु 1 तथा 2 पर बर्नूली का समीकरण लागू करते हुए तथा यह लेते हुए कि छिद्र पर दाब P_1 वायुमण्डलीय दाब के बराबर है, अर्थात् $P_1 = P_a$, समीकरण (9.12) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है।



चित्र 9.10 *टॉरिसेली नियम। पात्र के पार्श्व से बहिर्वाह की चाल v_1 बर्नूली समीकरण द्वारा प्राप्त होती है। यदि पात्र का शीर्ष भाग खुला है तथा वायुमण्डल के संपर्क में है तब $v_1 = \sqrt{2gh}$*

© NCERT not to be republished

$$P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

$y_2 - y_1 = h$ लेने पर

$$v_1 = \sqrt{2g\,h + \frac{2(P - P_a)}{\rho}} \qquad (9.14)$$

जब $P >> P_a$ है तथा $2\,g\,h$ की उपेक्षा की जा सकती है, तब बहिर्वाह की चाल का निर्धारण पात्र-दाब द्वारा किया जाता है। ऐसी ही स्थिति रॉकेट-नोदन में होती है। इसके विपरीत यदि टंकी का ऊपरी भाग खुला होने के कारण वायुमण्डल के संपर्क में है तो $P = P_a$ तब

$$v_1 = \sqrt{2gh} \qquad (9.15)$$

यह किसी मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल है। समीकरण (9.14) **टॉरिसेली के सिद्धांत** को इंगित करता है।

9.4.2 गतिक उत्थापक (लिफ्ट)

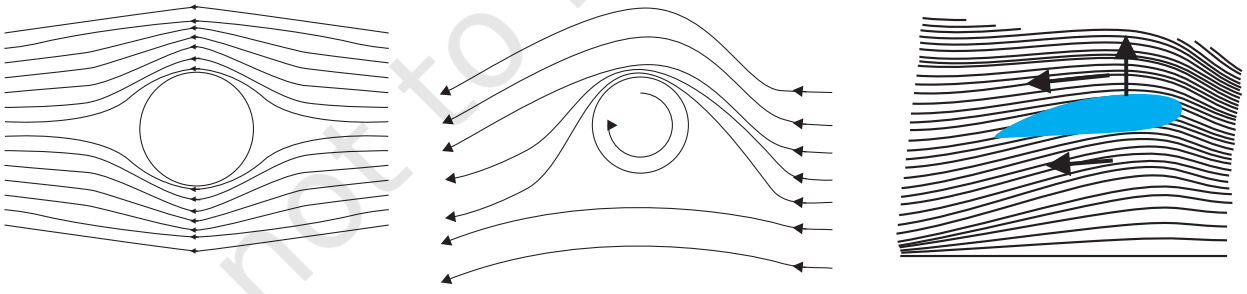
किसी पिण्ड पर गतिक उत्थापक एक बल है। जैसे निम्न के तरल में गति के कारण वायुयान के पंख पर, जलपर्णी या एक घूमती गेंद पर। कई खेल जैसे क्रिकेट, टेनिस, बेसबॉल या गोलक में हम देखते हैं कि वायु में जाती हुई बॉल अपने परवलीय पथ से हट जाती है। इस हटाव को आंशिक रूप से बर्नूली सिद्धांत से समझाया जा सकता है।

(i) **बिना घूमे गेंद का चलना** : तरल के सापेक्ष बिना घूमती गतिमान गेंद के चारों ओर चित्र 9.11(a) में धारारेखाएँ प्रदर्शित हैं। धारारेखाओं की सममिती से यह स्पष्ट है कि तरल में गेंद के ऊपर तथा नीचे संगत बिंदुओं पर उसका वेग समान है, जिससे दाबांतर शून्य होता है। अतः गेंद पर वायु कोई ऊर्ध्वमुखी अथवा अधोमुखी बल नहीं लगाती।

(ii) **घूमती हुई गेंद की चाल** : चक्रण करती हुई गेंद अपने साथ वायु को घसीटती है। यदि फलक खुरदुरा हो तो अधिक वायु घसीटी जाएगी। किसी घूमती हुई गतिमान गेंद की धारारेखाएँ [चित्र 9.11(b)] दर्शायी गई हैं। गेंद आगे की ओर चलती है तथा इसके सापेक्ष वायु पीछे की ओर चलती है। इसलिए, गेंद के ऊपर वायु का वेग बढ़ जाता है और नीचे घट जाता है (खण्ड 9.3 देखें)। धारा रेखायें ऊपर की ओर संघन हो जाती हैं और नीचे की ओर विरल हो जाती हैं।

वेगों में अंतर के कारण ऊपरी तथा निचले पृष्ठों पर दाबांतर उत्पन्न हो जाते हैं जिससे गेंद पर एक नेट ऊर्ध्वमुखी बल कार्य करता है। प्रचक्रण के कारण उत्पन्न इस गतिक उत्थापक को **मेगनस प्रभाव** (Magnus Effect) कहते हैं।

वायुयान के पंख या ऐयरोफॉयल पर उत्थापक : जब ऐयरोफॉयल वायु में क्षैतिज दिशा में चलता है तो चित्र 9.11 (c) में दिखाए अनुसार विशिष्ट आकार के ठोस ऐयरोफॉयल पर गतिक उत्थापक ऊपर की ओर लगता है। चित्र 9.11 (c) के अनुसार वायुयान के पंख की अनुप्रस्थ काट ऐयरोफॉयल जैसी प्रतीत होती है जिसके परितः धारारेखाएँ प्रदर्शित हैं। जब ऐयरोफॉइल हवा के विपरीत चलता है तब पंखों का तरल प्रवाह के सापेक्ष दिक्विन्यास धारारेखाओं को पंख के ऊपर-नीचे की अपेक्षा समीप कर देता है। प्रवाह की गति शीर्ष पर अधिक और नीचे कम होती है। इसके कारण ऊर्ध्वमुखी बल से पंख पर गतिक उत्थापक उत्पन्न होता है और यह वायुयान के भार को संतुलित करता है। निम्न उदाहरण इसे दर्शाता है।



(a) (b) (c)

चित्र 9.11 (a) अघूर्णी गतिमान गोले के समीप तरल (b) एक घूमते गतिमान गोले के निकट से गुज़रने वाले तरल का धाराप्रवाह (c) ऐयरोफॉयल के समीप से गुज़रने वाली वायु में धारारेखाएँ।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 9.7 किसी पूर्णतः भारित बोइंग विमान की संहति 3.3×10^5 kg है। इसका कुल पंख क्षेत्रफल 500 m^2। यह एक निश्चित ऊँचाई पर 960 km/h की चाल से उड़ रहा है। (a) पंख के ऊपरी तथा निचले पृष्ठों के बीच दाबांतर आकलित कीजिए। (b) निचले पृष्ठ की तुलना में ऊपरी पृष्ठ पर वायु की चाल में आंशिक वृद्धि आकलित कीजिए। [वायु का घनत्व $\rho = 1.2$ kg m^{-3}]

हल (a) दाबान्तर से ऊर्ध्वमुखी बल से संतुलित बोइंग विमान का भार है

$$\Delta P \times A = 3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8$$

$$\Delta P = (3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}) / 500 \text{ m}^2$$

$$= 6.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$$

(b) समीकरण (9.12) में हम वायुयान के ऊपरी पृष्ठ तथा निचले पृष्ठ की ऊँचाइयों के थोड़े अंतर की उपेक्षा कर देते हैं। तब इनके बीच दाबांतर

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

यहाँ v_2 वायु की ऊपरी पृष्ठ के ऊपर चाल तथा v_1 वायु की निचले पृष्ठ के नीचे चाल है।

$$(v_2 - v_1) = \frac{2\Delta P}{\rho(v_2 + v_1)}$$

औसत चाल

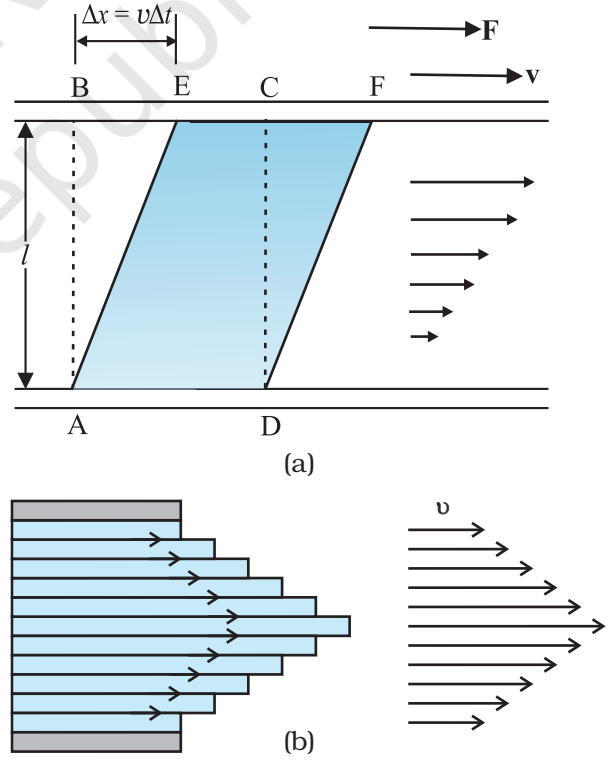
$v_{av} = (v_2 + v_1)/2 = 960$ km/h $= 267$ m s^{-1} लेने पर

$$(v_2 - v_1)/v_{av} = \frac{\Delta P}{\rho v_{av}^2} \approx 0.08$$

पंखों के ऊपर वायु की चाल पंखों के नीचे वायु की चाल की तुलना में केवल 8 % अधिक होनी चाहिए। ◀

9.5 श्यानता

सभी तरल आदर्श तरल नहीं होते तथा वह गति में कुछ प्रतिरोध डालते हैं। तरल गति में इस प्रतिरोध को आंतरिक घर्षण के रूप में देखा जा सकता है जो ठोसों में पृष्ठ पर गति से उत्पन्न घर्षण जैसा होता है। इसे श्यानता कहते हैं। जब द्रव की सतहों में सापेक्ष गति होती है तब यह बल उपस्थित होता है। चित्र 9.12 (a) में दर्शाये अनुसार यदि काँच की दो प्लेटों के बीच एक द्रव जैसे तेल को लेते हैं, निचली प्लेट को स्थिर रखा जाए जबकि ऊपरी प्लेट को समान गति से निचली प्लेट की अपेक्षा चलाते हैं। यदि तेल को शहद से विस्थापित कर दें तो उसी वेग से प्लेट को चलाने के लिए अधिक बल की आवश्यकता होगी। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि तेल की तुलना में शहद की श्यानता अधिक है। पृष्ठ के संपर्क में तरल का वेग पृष्ठ के वेग के समान होता है। अतः, द्रव की ऊपरी सतह के संपर्क में द्रव **v** वेग से चलता है और निचली स्थिर सतह के संपर्क में तरल की सतह स्थिर होगी। निचली स्थिर सतह से (शून्य वेग) जैसे-जैसे ऊपर जाते हैं सतहों का वेग समान रूप से बढ़ता जाता है तथा सबसे ऊपरी सतह का वेग **v** होता है। किसी भी द्रव सतह के लिए, इससे ऊपर की सतह इसे आगे की ओर खींचती है जबकि नीचे की सतह पीछे की ओर खींचती है। इसके कारण सतहों के बीच में बल उत्पन्न हो जाता है। इस प्रकार के प्रवाह को परत प्रवाह कहते हैं। जैसे मेज़ पर रखी चपटी किताब पर क्षैतिज बल लगाने पर उसके पन्ने फिसलते हैं इसी प्रकार द्रव की परतें एक दूसरे पर फिसलती हैं। किसी पाइप या ट्यूब में जब एक तरल बहता है तो ट्यूब के अक्ष के अनुदिश द्रव की परत का



चित्र 9.12 *(a) दो समांतर काँच की प्लेटों के बीच रखे द्रव की एक परत जिसमें काँच की निचली प्लेट स्थिर है तथा ऊपरी प्लेट* **v** *वेग से दाहिनी ओर गतिमान है। (b) पाइप में श्यान प्रवाह के लिए वेग वितरण।*

© NCERT not to be republished

वेग अधिकतम होता है और शनैः शनैः जैसे हम दीवारों की ओर चलते हैं यह कम होता जाता है और अंत में शून्य हो जाता है [चित्र 9.12 (b)]। एक ट्यूब में बेलनाकार पृष्ठ पर वेग स्थिर रहता है।

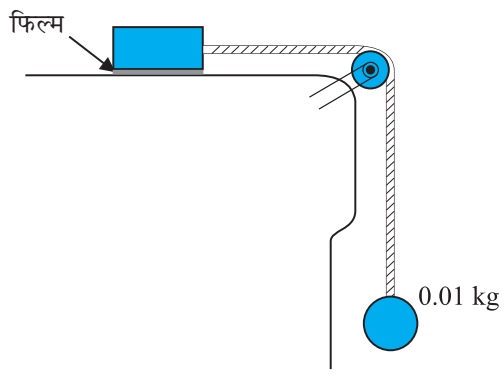
इस गति के कारण द्रव के एक भाग जो किसी समय ABCD के रूप में था कुछ समय अंतराल (Δt) में AEFD का स्वरूप ले लेता है। इस समय अंतराल में द्रव में एक अवरूपण विकृति $\Delta x/l$ उत्पन्न हो जाती है। चूंकि प्रवाहित द्रव में समय के बढ़ने के अनुसार विकृति बढ़ती जाती है। ठोसों के विपरीत प्रयोगों द्वारा पाया गया है कि प्रतिबल विकृति की अपेक्षा 'विकृति परिवर्तन की दर' या 'विकृति दर' अर्थात् $\Delta x/(l\,\Delta t)$ या v/l द्वारा प्रतिबल को प्राप्त किया जाता है। श्यानता गुणांक (उच्चारण 'इटा') की परिभाषा अवरूपण प्रतिबल तथा विकृतिदर के रूप में की जाती है,

$$\eta = \frac{F/A}{v/l} = \frac{Fl}{vA} \qquad (9.16)$$

श्यानता का SI मात्र प्वाज (Pl) है। इसके दूसरे मात्रक N s m^{-2} या Pa s हैं। श्यानता की विमाएँ [$ML^{-1}T^{-1}$] हैं। आमतौर पर पतले द्रवों जैसे पानी, एल्कोहल आदि गाढ़े तरलों जैसे कोलतार, रक्त, ग्लिसरीन आदि की अपेक्षा कम श्यान होते हैं। कुछ सामान्य तरलों के श्यानता गुणांक सारणी 9.2 में सूचीबद्ध हैं। हम रक्त तथा जल के विषय में दो तथ्यों को बताते हैं, जो आपके लिए रोचक हो सकते हैं। सारणी 9.2 में इंगित सूचना के आधार पर जल की तुलना में रक्त अधिक गाढ़ा (अधिक श्यान) है। साथ ही रक्त की आपेक्षिक श्यानता ($\eta/\eta_{\text{जल}}$) ताप-परिसर 0 °C से 37 °C के बीच अचर रहती है।

द्रव की श्यानता ताप बढ़ने पर घटती है, जबकि गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर बढ़ती है।

उदाहरण 9.8 0.10 m^2 क्षेत्रफल की कोई धातु की प्लेट किसी डोरी की सहायता से जो एक आदर्श घिरनी (जिसे संहति रहित, तथा घर्षण रहित माना गया है) के ऊपर से होकर जाती है, 0.010 kg संहति से चित्र 9.15 की भांति जुड़ी है। कोई द्रव जिसकी फिल्म 0.30 mm मोटाई की है, मेज़ तथा प्लेट के बीच रखी हुई है। मुक्त किए जाने पर प्लेट 0.085 m s^{-1} की अचर चाल से दाईं ओर गति करने लगती है। द्रव का श्यानता गुणांक ज्ञात कीजिए।



चित्र 9.13 द्रव के श्यानता गुणांक का मापन।

हल डोरी में तनाव के कारण धातु की प्लेट दाईं ओर गति करती है। डोरी में यह तनाव T परिमाण में डोरी से निलम्बित पिण्ड के भार mg के बराबर है। अतः अवरूपण

$$F = T = mg = 0.010\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m s}^{-2} = 9.8 \times 10^{-2}\ \text{N}$$

$$\text{द्रव पर अवरूपण प्रतिबल} = F/A = \frac{9.8\times10^{-2}}{0.10}\ \text{N.m}^{-2}$$

$$\text{विकृति दर} = \frac{v}{l} = \frac{0.085}{0.30\times10^{-3}}$$

$$\eta = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति दर}}$$

$$= \frac{(9.8\times10^{-2}\,\text{N})(0.30\times10^{-3}\,\text{m})}{(0.085\,\text{m s}^{-1})(0.10\,\text{m}^2)}$$

$$= 3.46\times10^{-3}\ \text{Pa s}$$ ◀

सारणी 9.2 कुछ तरलों की श्यानता

तरल	T(°C)	श्यानता (mPl)
जल	20	1.0
	100	0.3
रक्त	37	2.7
मशीन का तेल	16	113
	38	34
ग्लिसरीन	20	830
शहद		200
वायु	0	0.017
	40	0.019

© NCERT not to be republished

9.5.1 स्टोक का नियम

सामान्यत: जब एक पिण्ड किसी तरल से गिरता है तो वह अपने संपर्क में तरल की परतों को भी खींचता है। तरल की विभिन्न परतों में आपेक्ष गति उत्पन्न हो जाती है और परिणामस्वरूप पिण्ड एक परिणामी मंदक बल अनुभव करता है। स्वतंत्रतापूर्वक गिरती हुई पानी की बूंदें तथा दोलन गति करता हुआ लोलक ऐसी गति के कुछ सामान्य उदाहरण हैं। यह देखा गया है कि श्यानता बल पिण्ड की गति के अनुपाती तथा उसकी दिशा के विपरीत कार्य करता है। दूसरी अन्य राशियाँ जिस पर बल F निर्भर है तरल की श्यानता η तथा गोल की त्रिज्या a है। एक अंग्रेज़ी वैज्ञानिक सर जॉर्ज जी. स्टोक्स (1819-1903) ने श्यान कर्षण बल F निम्न संबंध द्वारा निरूपित किया है:

$$F = 6\pi\eta a v \qquad (9.17)$$

इसे स्टोक का नियम कहते हैं। हम स्टोक के नियम की व्युत्पत्ति नहीं करेंगे।

अवमंदन बल का यह नियम एक रोचक उदाहरण है जो वेग के अनुपाती है। किसी श्यान माध्यम में गिरते पिण्ड का अध्ययन करके हम इसका महत्त्व ज्ञात कर सकते हैं। हम वायु में गिरती एक वर्षा की बूँद पर ध्यान केंद्रित करते हैं। आरंभ में यह गुरुत्व बल के कारण त्वरित होती है। जैसे-जैसे इसका वेग बढ़ता जाता है, मंदक श्यान बल भी बढ़ता जाता है। अंत में जब इस पर कार्यरत श्यान बल तथा उत्प्लावन बल, गुरुत्व बल के तुल्य हो जाता है, तो नेट बल तथा त्वरण शून्य हो जाता है। तब वर्षा की बूँद अचर वेग से नीचे की ओर गिरती है। साम्य अवस्था में **सीमांत वेग** v_t निम्न द्वारा दिया जाता है :

$$6\pi\eta a v_t = (4\pi/3)\, a^3 (\rho-\sigma) g$$

जहाँ ρ तथा σ बूँद तथा तरल के क्रमश: संहति घनत्व हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$v_t = 2a^2 (\rho-\sigma) g / (9\eta) \qquad (9.18)$$

अत: सीमांत वेग v_t गोले के आकार के वर्ग के ऊपर निर्भर करता है तथा माध्यम के श्यानता के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

इस संदर्भ में आप उदाहरण 5.2 पर पुन: ध्यान दे सकते हैं।

उदाहरण 9.9 2.0 mm त्रिज्या वाली एक ताँबे की गेंद 20°C पर 6.5 cm s^{-1} सीमांत वेग से तेल के टेंक में गिर रही है। 20°C पर तेल की श्यानता का आकलन कीजिए। तेल का घनत्व 1.5×10^3 kg m^{-3} तथा ताँबे का घनत्व 8.9×10^3 kg m^{-3} है।

हल यहाँ $v_t = 6.5 \times 10^{-2}$ m s^{-1}, $a = 2 \times 10^{-3}$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\rho = 8.9 \times 10^3$ kg m^{-3}, $\sigma = 1.5 \times 10^3$ kg m^{-3}। समीकरण (9.20) से

$$\eta = \frac{2}{9} \times \frac{(2\times10^{-3})^2\ \text{m}^2 \times 9.8\ \text{m s}^{-2}}{6.5\times10^{-2}\ \text{m s}^{-1}} \times 7.4\times10^3\ \text{kg m}^{-3}$$

$$= 9.9 \times 10^{-1}\ \text{kg m}^{-1}\ \text{s}^{-1}$$

9.6 पृष्ठ तनाव

आपने देखा होगा कि तेल तथा जल आपस में नहीं मिलते; जल आपको और मुझे गीला कर देता है परन्तु बतख को नहीं; पारा काँच से नहीं चिपकता किन्तु जल चिपक जाता है; गुरुत्व बल की उपस्थिति में भी तेल रुई की बत्ती से ऊपर चढ़ जाता है। रस तथा पानी पेड़ के शीर्ष की पत्तियों तक ऊपर उठ जाता है, रंग के ब्रुश के बाल सूखे होने पर और पानी में डुबोने पर भी एक दूसरे से नहीं चिपकते लेकिन जब उसके बाहर होते हैं तो एक उत्तम नोक बनाते हैं। ये और ऐसे ही अनेक अनुभव द्रवों की स्वतंत्र सतहों से संबंधित हैं। द्रवों की कोई निश्चित आकृति नहीं होती, परन्तु उनका अपना एक निश्चित आयतन होता है। जब उन्हें किसी पात्र में उड़ेलते हैं तो उनका एक स्वतंत्र पृष्ठ होगा। इन पृष्ठों की कुछ अतिरिक्त ऊर्जा होती है। इस परिघटना को पृष्ठ तनाव कहते हैं। यह केवल द्रवों में हो सकती है क्योंकि गैसों के कोई स्वतंत्र पृष्ठ नहीं होते। अब हम इस परिघटना को समझने का प्रयत्न करते हैं।

© NCERT not to be republished

9.6.1 पृष्ठीय ऊर्जा

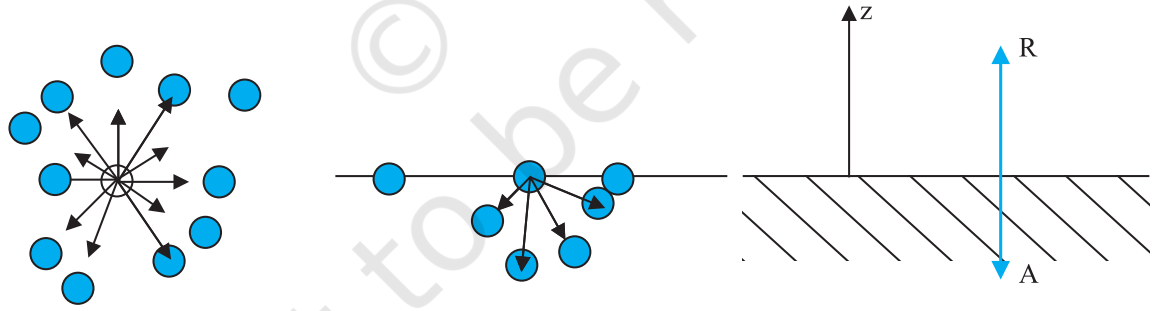
कोई द्रव अपने अणुओं के बीच आकर्षण के कारण स्थायी है। द्रव के भीतर एक अणु लीजिए। अंतरापरमाणुक दूरियाँ इस प्रकार की होती हैं कि यह अपने घेरने वाले सभी परमाणुओं की ओर आकर्षित होता है [चित्र 9.14(a)]। इस आकर्षण के परिणामस्वरूप अणुओं के लिए ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा उत्पन्न होती है। स्थितिज ऊर्जा का परिमाण इस बात पर निर्भर है कि इस चुने हुए अणु के चारों ओर अणु विन्यास किस प्रकार वितरित है तथा उनकी संख्या क्या है। परन्तु सभी अणुओं की औसत स्थितिज ऊर्जा समान होती है। यह इस तथ्य से स्पष्ट है कि इस प्रकार के अणुओं के किसी संचयन (द्रव) को लेने की अपेक्षा उन्हें एक दूसरे से दूर बिखेरने (वाष्पन या वाष्पीकृत करने) के लिए ऊर्जा की आवश्यकता होती है। यह वाष्पन ऊर्जा काफी अधिक होती है। पानी के लिए यह ऊर्जा 40 kJ/mol के आसपास होती है।

अब द्रव के पृष्ठ के समीप किसी अणु पर हम विचार करते हैं [चित्र 9.14(b)]। द्रव के भीतर के अणु की तुलना में द्रव के आधे अणु ही इस अणु को घेरते हैं। इन अणुओं के कारण कुछ ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा होती है। परन्तु स्पष्ट रूप से यह द्रव के भीतर के अणु से अपेक्षाकृत कम होती है अर्थात् जो पूर्णरूप से अंदर है। यह लगभग बाद वाले के अपेक्षा आधी होती है। इस प्रकार किसी द्रव के पृष्ठ के अणु की ऊर्जा द्रव के भीतरी अणुओं की ऊर्जा से कुछ अधिक होती है। अत: कोई द्रव बाह्य स्थितियों के अनुसार, कम से कम अनुमत पृष्ठ क्षेत्रफल करने का प्रयास करता है। पृष्ठ के क्षेत्रफल में वृद्धि करने के लिए ऊर्जा खर्च करनी पड़ती है। अधिकांश पृष्ठीय परिघटनाओं को हम इसी तथ्य के पदों में समझ सकते हैं। किसी अणु को पृष्ठ पर रखने में कितनी ऊर्जा आवश्यक होती है? जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है यह लगभग अणु को पूर्ण रूप से द्रव से बाहर निकालने की ऊर्जा के आधी होती है अर्थात् वाष्पन की ऊष्मा की आधी ऊर्जा चाहिए।

अंत में देखें पृष्ठ क्या है? चूँकि द्रव अनियमित गतिशील अणुओं से बना है अत: पूर्ण रूप से स्पष्ट पृष्ठ नहीं हो सकता। [चित्र 9.14(c)] द्रव अणुओं का घनत्व $z = 0$ पर कुछ ही अणु आकार की दूरी पर तेज़ी से घटकर शून्य हो जाता है।

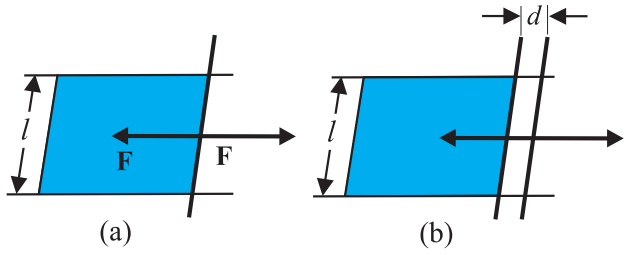
9.6.2 पृष्ठीय ऊर्जा तथा पृष्ठ तनाव

अन्य सभी कारकों, जैसे आयतन आदि को स्थिर रखते हुए जैसा हमने पहले विचार किया है कि द्रव के पृष्ठ के साथ ऊर्जा संबद्ध होती है और अधिक पृष्ठ उत्पन्न करना चाहें तो हमें और अधिक ऊर्जा खर्च करनी होगी। इस तथ्य को ठीक प्रकार समझने के लिए द्रव की एक ऐसी क्षैतिज फिल्म पर विचार कीजिए जो किसी ऐसी छड़ पर समाप्त होती है जो समांतर निर्देशकों पर सरकने के लिए स्वतंत्र है [चित्र (9.15)]।



चित्र 9.14 किसी द्रव में पृष्ठ पर अणुओं का व्यवस्था आरेख तथा बलों का संतुलन (a) किसी द्रव के भीतर अणु। अणु पर अन्य अणुओं के कारण बलों को दर्शाया गया है। तीरों की दिशाएँ आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण को दर्शाती हैं। (b) यही घटनाएँ द्रव के पृष्ठ के लिए। (c) आकर्षी (A) तथा प्रतिकर्षी (R) बलों की संतुलन।

© NCERT not to be republished



चित्र 9.15 किसी फिल्म को तानना। (a) संतुलन में कोई फिल्म (b) किसी अतिरिक्त दूरी तक तानित फिल्म।

मान लीजिए साम्यावस्था में हम चित्र में दर्शाये अनुसार छड़ को किसी छोटी दूरी d तक हटाते हैं। चूंकि फिल्म का क्षेत्रफल (अथवा पृष्ठ का क्षेत्रफल) बढ़ गया है अत: अब निकाय में अधिक ऊर्जा होगी। इसका अर्थ है कि आंतरिक बल के विपरीत कार्य किया गया है। माना यह आंतरिक बल **F** है तो आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य $\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = Fd$ है। ऊर्जा संरक्षण के अनुसार यह अब फिल्म में संचित अतिरिक्त आंतरिक ऊर्जा है। माना कि फिल्म की प्रति एकांक क्षेत्रफल पृष्ठ ऊर्जा S है, और अतिरिक्त क्षेत्रफल $2dl$ है। किसी फिल्म के दो पार्श्व होते हैं जिनके बीच में द्रव होता है अत: फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं। अत: अतिरिक्त ऊर्जा

$$S(2dl) = Fd \qquad (9.19)$$

अथवा $$S = Fd/2dl = F/2l \qquad (9.20)$$

राशि S पृष्ठ तनाव का परिमाण है। यह द्रव के प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा है। यह चालित छड़ की प्रति एकांक लंबाई पर तरल द्वारा आरोपित बल है।

अभी तक हमने केवल एक द्रव के पृष्ठ की चर्चा की है। अधिक सामान्य रूप से हमें तरल के द्रवों या ठोस पृष्ठों पर विचार करना चाहिए। इन स्थितियों में पृष्ठीय ऊर्जा पृष्ठ के दोनों ओर के पदार्थों पर निर्भर होती है। उदाहरणस्वरूप यदि पदार्थों के अणु आपस में एक दूसरे को आकर्षित करते हैं तो पृष्ठीय ऊर्जा कम हो जाएगी परन्तु यदि वह एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं तो पृष्ठीय ऊर्जा बढ़ जाएगी। इस प्रकार और अधिक उपयुक्त रूप से हम कह सकते हैं कि पृष्ठीय ऊर्जा दोनों पदार्थों के मध्य अंतरापृष्ठ की ऊर्जा है तथा यह दोनों पर ही निर्भर है।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं :

(i) पृष्ठ तनाव द्रव तथा अन्य किसी पदार्थ के बीच अंतरापृष्ठ के तल में प्रति एकांक लंबाई पर कार्यरत बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा) है। यह द्रव के भीतर के अणुओं की तुलना में अंतरापृष्ठ के अणुओं की अतिरिक्त ऊर्जा है।

(ii) अंतरापृष्ठ के किसी भी बिंदु पर हम पृष्ठ तल (सीमा के अतिरिक्त) में एक रेखा खींच सकते हैं तथा इस रेखा की प्रति एकांक लंबाई पर रेखा के लंबवत् परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत पृष्ठ तनाव बलों S की कल्पना कर सकते हैं। यह रेखा साम्यावस्था में है और अधिक स्पष्टता के लिए पृष्ठ पर परमाणुओं अथवा अणुओं की एक रेखा की कल्पना कीजिए। इस रेखा के बाईं ओर परमाणु रेखा को अपनी ओर खींचते हैं तथा जो इस रेखा के दाईं ओर हैं वह इसे अपनी ओर खींचते हैं। तनाव की स्थिति में यह परमाणुओं की रेखा साम्यावस्था में होती है। यदि वास्तव में, रेखा अंतरापृष्ठ की सीमांत रेखा को निर्दिष्ट करती है जैसा कि चित्र 9.14 (a) तथा (b) में दर्शाया गया है तो केवल अंदर की ओर प्रति एकांक लंबाई में लगने वाला बल S है।

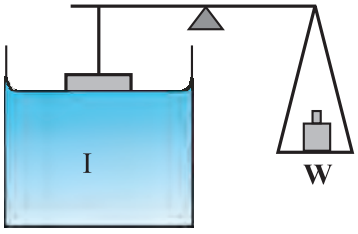
सारणी 9.3 में विभिन्न द्रवों के लिए पृष्ठ तनाव के मान दिए गए हैं। पृष्ठ तनाव का मान ताप पर निर्भर करता है। श्यानता के समान पृष्ठ तनाव का मान तापवृद्धि के साथ कम होता जाता है।

सारणी 9.3 दिए गए तापों पर कुछ द्रवों के पृष्ठ तनाव तथा वाष्पन ऊष्मा

द्रव	ताप (°C)	पृष्ठ तनाव (N/m)	वाष्पन ऊर्जा (kJ/mol)
हीलियम	-270	0.000239	0.115
ऑक्सीजन	-183	0.0132	7.1
एथानॉल	20	0.0227	40.6
जल	20	0.0727	44.16
पारा	20	0.4355	63.2

© NCERT not to be republished

यदि ठोस-वायु तथा तरल-वायु पृष्ठीय ऊर्जाओं के योग से तरल तथा ठोस की पृष्ठीय ऊर्जा कम है तो तरल ठोस से चिपकेगा। ठोस तथा द्रव पृष्ठों में आर्कषण बल होता है। चित्र 9.16 में उपकरण के आरेख के अनुसार हम इसे सीधे ही माप सकते हैं। एक चपटी क्षैतिज काँच की प्लेट जिसके नीचे किसी पात्र में द्रव भरा है, तुला की एक भुजा कार्य करती है। प्लेट के क्षैतिज निचले किनारे को पानी से थोड़ा ऊपर रखकर, तुला के दूसरी ओर बाट रखकर संतुलित कर लेते हैं। द्रव से भरे पात्र को थोड़ा ऊपर उठाते हैं ताकि यह काँच की प्लेट के क्षैतिज किनारों को छूने भर लगे और पृष्ठ तनाव के कारण प्लेट को नीचे की ओर खींचने लगे। अब दूसरी ओर कुछ बाट रखते हैं जब तक कि प्लेट द्रव से कुछ अलग न हो जाए।



चित्र 9.16 पृष्ठ तनाव मापना।

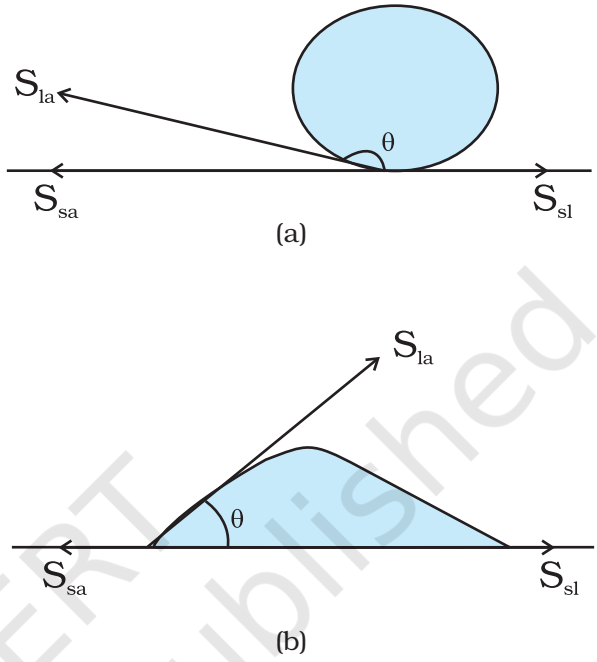
मान लीजिए आवश्यक अतिरिक्त भार W है। तब समीकरण 9.20 तथा वहाँ की गई चर्चा से, द्रव-वायु अंतरापृष्ठ का पृष्ठ तनाव

$$S_{la} = (W/2l) = (mg/2l) \qquad (9.21)$$

जहाँ m अतिरिक्त संहति तथा l काँच की प्लेट के निचले किनारे की लंबाई है, पादाक्षर (la) इस तथ्य को स्पष्ट करता है कि यहाँ द्रव-वायु अंतरापृष्ठ तनाव सम्मिलित है।

9.6.3 संपर्क कोण

किसी अन्य माध्यम के संपर्क तल के निकट द्रव का पृष्ठ, आमतौर पर वक्रीय होता है। संपर्क बिंदु पर द्रव पृष्ठ पर स्पर्शज्या तथा द्रव के अंदर ठोस पृष्ठ पर स्पर्शज्या के बीच कोण को संपर्क कोण कहते हैं। इसे θ से प्रदर्शित करते हैं। द्रवों तथा ठोसों के विभिन्न युग्मों के अंतरापृष्ठों पर यह भिन्न-भिन्न होता है। संपर्क कोण का मान यह दर्शाता है कि कोई द्रव किसी ठोस के पृष्ठ पर फैलेगा अथवा इस पर बूंदें बनाएगा। उदाहरणस्वरूप जैसा चित्र 9.17 (a) में दर्शाया गया है, कमल के पत्ते पर पानी की बूंदें बनती हैं परन्तु स्वच्छ प्लास्टिक प्लेट पर यह फैल जाती है [चित्र 9.17(b)]।



चित्र 9.17 अंतरापृष्ठों में तनाव के साथ पानी की बूँदों के विभिन्न आकार (a) कमल के एक पत्ते पर (b) एक स्वच्छ प्लास्टिक प्लेट पर।

अब हम तीन अंतरापृष्ठीय तनावों का तीन अंतरापृष्ठों पर विचार करते हैं। जैसा कि चित्र 9.17(a) तथा (b) में दर्शाया गया है कि हम द्रव-वायु, ठोस-वायु तथा ठोस-द्रव के पृष्ठ तनाव S_{la}, S_{sa}, S_{sl} से दर्शाते हैं। तीनों माध्यमों के पृष्ठों पर लगे बल संपर्क रेखा पर साम्यावस्था में होने चाहिए। चित्र 9.17 (b) से हम निम्न संबंध व्युत्पन्न कर सकते हैं

$$S_{la} \cos\theta + S_{sl} = S_{sa} \qquad (9.22)$$

यदि $S_{sl} > S_{la}$ तो संपर्क कोण बृहद कोण होगा जैसा कि पानी तथा पत्ते का अंतरापृष्ठ। जब θ बृहद कोण है तो द्रव के अणु एक दूसरे की ओर मजबूती से आकर्षित होते हैं तथा ठोस के अणुओं के साथ दुर्बल रूप से। द्रव-ठोस अंतरापृष्ठ को बनाने में बहुत ऊर्जा व्यय होती है, और तब द्रव ठोस को नहीं भिगोता। ऐसा मोम या तेल लगे पृष्ठ पर पानी के साथ होता है

© NCERT not to be republished

एवं पारे के साथ किसी भी तल पर। दूसरी ओर, यदि द्रव के अणु ठोस के अणुओं की ओर अधिक शक्ति से आकर्षित होते हैं, तो यह S_{sl} को कम कर देगा। इसलिए, $\cos\theta$ बढ़ सकता है या θ कम हो सकता है। तब θ न्यूनकोण होगा, ऐसा पानी के काँच या प्लास्टिक पर होने से होता है या मिट्टी के तेल का किसी भी वस्तु पर (यह केवल फैल जाता है)। साबुन, अपमार्जक तथा रँगने वाली वस्तुएँ, गीले कर्मक हैं। जब इन्हें मिलाया जाता है तो संपर्क कोण छोटा हो जाता है जिससे यह भलीभांति अंदर घुसकर प्रभावी हो जाते हैं। पानी तथा रेशों के बीच संपर्क कोण बड़ा करने के लिए पानी में जल सहकारक को मिलाया जाता है।

9.6.4 बूँद तथा बुलबुले

पृष्ठ तनाव का एक महत्त्व यह भी है कि यदि गुरुत्व बल के प्रभाव की उपेक्षा की जा सके तो द्रव की मुक्त बूँदें तथा बुलबुले गोलाकार होते हैं। आपने इस तथ्य को अवश्य देखा होगा: विशेषकर स्पष्ट रूप से उच्च वेग वाले स्प्रे अथवा जेट से द्रुत बनने वाली छोटी बूँदों में, अथवा अपने बचपन के समय बनाए साबुन के बुलबुलों में। बूँदें तथा बुलबुले गोल ही क्यों होते हैं? साबुन के बुलबुले किस कारण स्थायी हैं? जैसा कि हम बार-बार चर्चा कर रहे हैं कि किसी द्रव-वायु अंतरापृष्ठ में ऊर्जा होती है। अत: किसी दिए गए आयतन के लिए सर्वाधिक स्थायी पृष्ठ वही है जिसका पृष्ठ क्षेत्रफल सबसे कम हो। गोले में यह गुण होता है। हम इस तथ्य को इस पुस्तक में सत्यापित नहीं कर सकते परन्तु आप स्वयं यह जाँच कर सकते हैं कि इस संदर्भ में गोला कम से कम एक घन की तुलना में बेहतर है। अत: यदि गुरुत्व बल तथा अन्य बल (उदाहरणार्थ वायु-प्रतिरोध) निष्प्रभावी हों तो द्रव की बूँदें गोल होती हैं।

पृष्ठ तनाव का एक अन्य रोचक परिणाम यह है कि बूँद के भीतर का दाब बूँद के बाहर के दाब से अधिक होता है। [चित्र 9.18(a)]। मान लीजिए r त्रिज्या की कोई गोल बूँद साम्यावस्था में है। यदि इस बूँद की त्रिज्या में Δr की वृद्धि की जाए, तो बूँद में अतिरिक्त ऊर्जा होगी,

$$[4\pi(r+\Delta r)^2 - 4\pi r^2]\, S_{la} = 8\pi r\, \Delta r\, S_{la} \qquad (9.23)$$

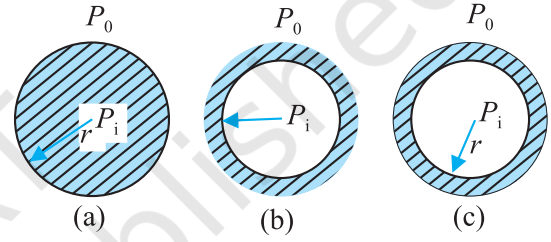
यदि बूँद साम्यावस्था में है तो खर्च की गई यह ऊर्जा बूँद के भीतर तथा बाहर के दाबांतर $(P_i - P_o)$ के प्रभाव में प्रसार के कारण बूँद द्वारा प्राप्त की गई ऊर्जा से संतुलित होती है। यहाँ कृत कार्य

$$W = (P_i - P_o)\, 4\pi r^2 \Delta r \qquad (9.24)$$

जिससे

$$(P_i - P_o) = (2\, S_{la} / r) \qquad (9.25)$$

व्यापक रूप में, किसी द्रव-गैस अंतरापृष्ठ के लिए, उत्तल पार्श्व की ओर दाब का मान अवतल पार्श्व की ओर के दाब के मान से अधिक होता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी द्रव के भीतर कोई वायु का बुलबुला है, तो यह वायु का बुलबुला अधिक दाब पर होगा [चित्र 9.18 (b)]।



चित्र 9.18 r त्रिज्या की बूँद, गुहिका तथा बुलबुला।

किसी बुलबुले [चित्र 9.18 (c)] की बनावट किसी बूँद अथवा किसी गुहिका से भिन्न होती है। बुलबुले में दो अंतरापृष्ठ होते हैं। उपरोक्त तर्क के आधार पर किसी बुलबुले के लिए

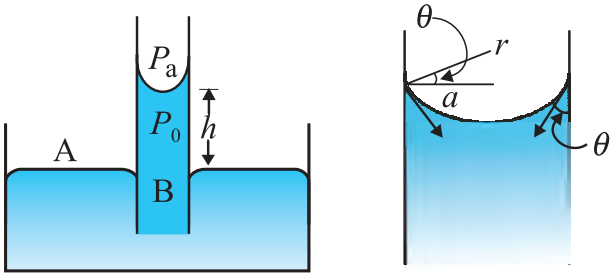
$$(P_i - P_o) = (4\, S_{la} / r) \qquad (9.26)$$

कदाचित् इसी कारण साबुन का बुलबुला बनाने के लिए आपको कुछ तेज़ी से फूँकना पड़ता है, परन्तु बहुत अधिक नहीं। अंदर थोड़ा अधिक दाब आवश्यक है।

9.6.5 केशिकीय उन्नयन

एक सुप्रसिद्ध प्रभाव किसी पतली नली में गुरुत्व के विरुद्ध जल का ऊपर उठना (उन्नयन) किसी वक्रित द्रव-वायु अंतरापृष्ठ के दोनों ओर दाब में अंतर होने के परिणामस्वरूप है। लैटिन भाषा में शब्द Capilla का अर्थ है केश अर्थात् बाल। यदि कोई नली केश की भाँति पतली हो तो उस नली में उन्नयन बहुत अधिक होगा। इसी तथ्य को देखने के लिए किसी ऐसी वृत्ताकार

© NCERT not to be republished



(a) (b)

चित्र 9.19 *केशिकीय उन्नयन (a) जल से भरे खुले बर्तन में डूबी किसी पतली नली का व्यवस्था आरेख। (b) अंतरापृष्ठ के निकट का आवर्धित आरेख।*

अनुप्रस्थ काट (त्रिज्या a) की ऊर्ध्वाधर केशनली पर विचार करते हैं जिसका एक सिरा जल से भरे किसी खुले बर्तन में डूबा है (चित्र 9.19)। पानी तथा काँच में संपर्क कोण न्यून होता है। इस प्रकार केशिका में पानी का पृष्ठ अवतल होता है। इसका अर्थ है कि शीर्ष पृष्ठ के दोनों ओर दाबांतर है।

$$(P_i - P_o) = (2S/r) = 2S/(a \sec\theta)$$

$$= (2S/a)\cos\theta \qquad (9.27)$$

इस प्रकार, ***नली के भीतर नवचंद्रक (वायु-जल अंतरापृष्ठ) पर जल का दाब वायुमण्डलीय दाब से कम है। चित्र 9.19(a) में दो बिंदुओं A तथा B पर ध्यान केंद्रित कीजिए, इन दोनों पर समान दाब होना चाहिए, अर्थात्***

$$P_0 + h\rho g = P_i = P_A \qquad (9.28)$$

जहाँ ρ जल का घनत्व तथा h को केशिकीय उन्नयन कहते हैं [चित्र 9.19(a)]। समीकरण (9.27) तथा (9.28) का उपयोग करके हम प्राप्त करते हैं

$$h\rho g = (P_i - P_0) = (2S\cos\theta)/a \qquad (9.29)$$

यहाँ की गई इस विवेचना तथा समीकरण (9.24) एवं (9.25) से यह स्पष्ट हो जाता है कि केशिकीय उन्नयन का कारण पृष्ठ तनाव ही है। a के लघुमानों के लिए यह अधिक होगा। बारीक या अत्यधिक पतली केशिका में प्रतिरूपी तौर से यह कुछ cm की कोटि का होता है। उदाहरण के लिए यदि $a = 0.05$ cm है तो पानी के पृष्ठ तनाव (सारणी 9.3) का उपयोग करके हम पाते हैं

$$h = 2S/(\rho g a)$$

$$= \frac{2\times(0.073\ \text{N m}^{-1})}{(10^3\ \text{kg m}^{-3})(9.8\ \text{m s}^{-2})(5\times10^{-4}\ \text{m})}$$

$$= 2.98\times10^{-2}\ \text{m} = 2.98\ \text{cm}$$

ध्यान दीजिए, यदि द्रव-नवचंद्रक (मेनिस्कस) उत्तल है जैसा कि पारे में होता है अर्थात् $\cos\theta$ ऋणात्मक है तो समीकरण (9.28) से यह स्पष्ट है कि केशनली में द्रव का तल नीचे गिर जाता है अर्थात् केशिकीय अपनयन होता है।

उदाहरण 9.10 2.00 mm व्यास की किसी केशनली का निचला सिरा बीकर में भरे जल के पृष्ठ से 8.00 cm नीचे तक डुबोया जाता है। नली के जल में डूबे सिरे पर अर्धगोलीय बुलबुला फुलाने के लिए नली के भीतर आवश्यक दाब ज्ञात कीजिए। प्रयोग के ताप पर जल का पृष्ठ तनाव 7.30×10^{-2} Nm^{-1} है। जल का घनत्व = 1000 kg/m^3, वायुमण्डलीय दाब = 1.01×10^5 Pa तथा g = 9.80 m s^{-2}। दाब आधिक्य भी परिकलित कीजिए।

हल किसी तरल के भीतर गैस के बुलबुले के अंदर दाब आधिक्य = $2S/r$, यहाँ S द्रव-गैस अंतरापृष्ठ का पृष्ठतनाव तथा r बुलबुले की त्रिज्या है। यहाँ ध्यान दीजिए, इसमें केवल एक ही द्रव पृष्ठ है। (किसी गैस में द्रव की बूँद के लिए दो द्रव अंतरापृष्ठ होते हैं, अतः उस प्रकरण में दाब आधिक्य = $4S/r$ लागू होता है)। बुलबुले के बाहर दाब P_o = वायुमण्डलीय दाब + 8 cm जल स्तंभ का दाब। अर्थात्

$$P_o = (1.01\times10^5\ \text{Pa} + 0.08\ \text{m}\times1000\ \text{kg m}^{-3}\times9.80\ \text{m s}^{-2})$$

$$= 1.01784\times10^5\ \text{Pa}$$

अतः बुलबुले के भीतर दाब

$$P_i = P_o + 2S/r$$

$$= 1.01784\times10^5\ \text{Pa} + (2\times7.3\times10^{-2}\ \text{Pa m}/10^{-3}\ \text{m})$$

$$= (1.01784 + 0.00146)\times10^5\ \text{Pa}$$

$$= 1.02\times10^5\ \text{Pa}$$

चूँकि बुलबुला अर्धगोलीय है, अतः यहाँ केशनली की त्रिज्या को ही बुलबुले की त्रिज्या माना गया है। (उत्तर का निकटन तीन सार्थक अंकों तक किया गया है।) बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य 146 Pa है। ◀

© NCERT not to be republished

सारांश

1. तरलों का मूलभूत गुण यह है कि वह प्रवाहित होते (बहते) हैं। अपनी आकृति में परिवर्तन के प्रति तरलों में कोई प्रतिरोध नहीं होता। अत: पात्र की आकृति तरल की आकृति को निर्धारित करती है।
2. द्रव असंपीड्य होता है तथा इसका अपना स्वतंत्र पृष्ठ होता है। गैस संपीड्य होती है तथा यह फैलकर समस्त उपलब्ध आयतन (स्थान) को भर देती है।
3. यदि किसी तरल द्वारा किसी क्षेत्रफल A पर आरोपित अभिलंब बल F है तो औसत दाब P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

   $$P_{av} = \frac{F}{A}$$

4. दाब का मात्रक पास्कल (Pa) है। यह वास्तव में $N\ m^{-2}$ ही है। दाब के अन्य सामान्य मात्रक इस प्रकार हैं :

   $1\ atm = 1.01 \times 10^5\ Pa$

   $1\ bar = 10^5\ Pa$

   $1\ torr = 133\ Pa = 0.133\ kPa$

   $1\ mm\ of\ Hg = 1\ torr = 133\ Pa$

5. *पास्कल का नियम :* इसके अनुसार विरामावस्था में तरल का दाब उन सभी बिंदुओं पर जो समान ऊँचाई पर स्थित हैं, समान होता है। किसी परिबद्ध तरल पर आरोपित दाब बिना घटे उस तरल के सभी बिंदुओं तथा पात्र की दीवारों पर संचरित हो जाता है।
6. किसी तरल के भीतर दाब गहराई h के साथ इस व्यंजक के अनुसार परिवर्तित होता है

   $$P = P_a + \rho g h$$

   यहाँ ρ तरल का घनत्व है जिसे एकसमान माना गया है।
7. किसी असमान अनुप्रस्थ काट वाले पाइप में अपरिवर्ती प्रवाहरत, असंपीड्य तरल के प्रत्येक बिंदु से एक सेकंड में प्रवाहित होने वाले आयतन का परिमाण समान रहता है।

   $v A$ = नियतांक (v वेग तथा A अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल)

   असंपीड्य तरलों के बहाव में यह समीकरण संहति संरक्षण के नियम के कारण है।
8. *बर्नूली का सिद्धांत :* इस सिद्धांत के अनुसार जब हम किसी धारा रेखा के अनुदिश गमन करते हैं, तो दाब (P), प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा ($\rho v^2/2$), तथा प्रति एकांक आयतन स्थितिज ऊर्जा ($\rho g y$) का योग अचर रहता है

   $$P + \rho v^2/2 + \rho g y = \text{नियतांक}$$

   यह समीकरण, मूलत: अपरिवर्ती प्रवाहरत, शून्य श्यानता वाले तरल के लिए लागू होने वाला ऊर्जा संरक्षण नियम है। शून्य श्यानता का कोई द्रव नहीं होता अत: उपरोक्त कथन लगभग सत्य है। श्यानता घर्षण की भांति होती है और वह गतिज ऊर्जा को ऊष्मा ऊर्जा में बदल देती है।
9. यद्यपि तरल में अपरूपण विकृति के लिए अपरूपक प्रतिबल की आवश्यकता नहीं होती, परन्तु जब किसी तरल पर अपरूपण प्रतिबल लगाया जाता है तो उसमें गति आ जाती है, जिसके कारण इसमें एक अपरूपण विकृति उत्पन्न हो जाती है जो समय के बढ़ने के साथ बढ़ती है। अपरूपण प्रतिबल एवं अपरूपण विकृति की समय दर के अनुपात को श्यानता गुणांक η कहते हैं।

© NCERT not to be republished

यहाँ प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं जो पाठ्य सामग्री में दिए गए हैं।

10. *स्टोक का नियम :* इस नियम के अनुसार a त्रिज्या का गोला, जो श्यानता η के तरल में, $\mathbf{v}$ वेग से गतिमान है, द्रव की श्यानता के कारण एक श्यान कर्षण बल $\mathbf{F}$ अनुभव करता है जो $\mathbf{F} = 6\pi\eta a\mathbf{v}$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

11. किसी द्रव का पृष्ठ तनाव प्रति एकांक लंबाई पर आरोपित बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा होता है), जो द्रव तथा सीमांत पृष्ठ के बीच अंतरापृष्ठ के तल में कार्य करता है। यह वह अतिरिक्त ऊर्जा है जो द्रव के अभ्यंतर (आंतरिक) के अणुओं की अपेक्षा इसके अंतरापृष्ठ के अणुओं में होती है।

विचारणीय विषय

1. दाब एक *अदिश राशि* है। दाब की परिभाषा "प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल" से हमारे मन में ऐसी धारणा बनती है कि दाब सदिश राशि है जो कि वास्तव में असत्य है। परिभाषा के अंश में जिस 'बल' का प्रयोग किया गया है वह वास्तव में बल का एक घटक है जो पृष्ठ के क्षेत्रफल पर अभिलंबवत् आरोपित होता है। तरलों का वर्णन करते समय कण तथा दृढ़ पिण्ड यांत्रिकी की तुलना में संकल्पनात्मक बदलाव की आवश्यकता होती है। यहाँ हमारी रुचि तरल के उन-उन धर्मों में है जो तरल के एक बिंदु से दूसरे बिंदु में परिवर्तित हो जाते हैं।
2. हमें यह कदापि नहीं सोचना चाहिए कि तरल केवल ठोसों, जैसे किसी पात्र की दीवारें अथवा तरल में डूबा ठोस पदार्थ, पर ही दाब डालते हैं। वास्तव में तरल में हर बिंदु पर दाब होता है। तरल का कोई अवयव (जैसा कि चित्र 9.2 (a)] में दर्शाया गया है, उसके विभिन्न फलकों पर सामान्य दाब आरोपित होने के कारण साम्यावस्था में होता है।
3. दाब के लिए व्यंजक

   $P = P_a + \rho gh$

   तभी सत्य होता है, जब तरल असंपीड्य हो। व्यावहारिक रूप से कहें तो यह द्रवों पर जो अधिकतर असंपीड्य हैं, लागू होता है और इसीलिए एक नियत ऊँचाई के लिए अपरिवर्तनीय रहता है।
4. गेज़ दाब (या प्रमापी दाब) वास्तविक दाब तथा वायुमण्डलीय दाब का अंतर होता है।

   $P - P_a = P_g$

   बहुत सी दाब मापक युक्तियाँ गेज़ दाब ही मापती हैं। इनमें टायरों के दाब गेज़ तथा रक्तचाप गेज़ (स्फाइग्मौमैनोमीटर) सम्मिलित हैं।
5. धारारेखा किसी तरल प्रवाह का मानचित्र होती है। स्थायी प्रवाह में दो धारारेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटतीं। यदि ऐसा होता, तो जिस बिंदु पर दो धारारेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं वहाँ तरल कण के दो संभव वेग होते।
6. जिन तरलों में श्यान कर्षण होता है उन पर बर्नूली-सिद्धांत लागू नहीं होता। इस प्रकरण में क्षयकारी श्यान बल द्वारा किया गया कार्य भी गणना में लेना चाहिए तथा P_2 [चित्र 9.9] का मान समीकरण (9.12) में दिए गए मान से कम होगा।
7. ताप बढ़ने पर द्रव के परमाणु और अधिक गतिशील हो जाते हैं तथा श्यानता गुणांक η का मान घट जाता है। किसी गैस में ताप बढ़ने पर उसके परमाणुओं की यादृच्छिक गति बढ़ जाती है और η भी बढ़ जाता है।
8. पृष्ठ पर अणुओं की स्थितिज ऊर्जा अभ्यंतर के अणुओं की स्थितिज ऊर्जा की अपेक्षा अधिक होने के कारण पृष्ठ तनाव होता है। दो पदार्थों जिनमें कम से कम एक तरल है, के अंतरापृष्ठ पर (जो दोनों को पृथक करता है) पृष्ठ ऊर्जा होती है। यह केवल एक तरल का ही गुण नहीं है।

© NCERT not to be republished

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
दाब	P	$[M\ L^{-1}\ T^{-2}]$	पास्कल (Pa)	1 atm = 1.013×10^5 Pa, अदिश
घनत्व	ρ	$[M\ L^{-3}]$	kg m^{-3}	अदिश
आपेक्षिक घनत्व		–	–	$\frac{\rho \text{ पदार्थ}}{\rho \text{ जल}}$, अदिश
श्यानता गुणांक	η	$[M\ L^{-1}\ T^{-1}]$	Pa s or पोयसुले (Pl)	अदिश
पृष्ठ तनाव	S	$[M\ T^{-2}]$	N m^{-1}	अदिश

अभ्यास

9.1 स्पष्ट कीजिए क्यों

(a) मस्तिष्क की अपेक्षा मानव का पैरों पर रक्त चाप अधिक होता है।

(b) 6 km ऊँचाई पर वायुमण्डलीय दाब समुद्र तल पर वायुमण्डलीय दाब का लगभग आधा हो जाता है, यद्यपि वायुमण्डल का विस्तार 100 km से भी अधिक ऊँचाई तक है।

(c) यद्यपि दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल होता है तथापि द्रवस्थैतिक दाब एक अदिश राशि है।

9.2 स्पष्ट कीजिए क्यों

(a) पारे का काँच के साथ स्पर्श कोण अधिक कोण होता है जबकि जल का काँच के साथ स्पर्श कोण न्यून कोण होता है।

(b) काँच के स्वच्छ समतल पृष्ठ पर जल फैलने का प्रयास करता है जबकि पारा उसी पृष्ठ पर बूँदें बनाने का प्रयास करता है। (दूसरे शब्दों में जल काँच को गीला कर देता है जबकि पारा ऐसा नहीं करता है।)

(c) किसी द्रव का पृष्ठ तनाव पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

(d) जल में घुले अपमार्जकों के स्पर्श कोणों का मान कम होना चाहिए।

(e) यदि किसी बाह्य बल का प्रभाव न हो, तो द्रव बूँद की आकृति सदैव गोलाकार होती है।

9.3 प्रत्येक प्रकथन के साथ संलग्न सूची में से उपयुक्त शब्द छाँटकर उस प्रकथन के रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

(a) व्यापक रूप में द्रवों का पृष्ठ तनाव ताप बढ़ने पर ..... है। (बढ़ता/घटता)

(b) गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर ..... है, जबकि द्रवों की श्यानता ताप बढ़ने पर ..... है। (बढ़ती/घटती)

(c) दृढ़ता प्रत्यास्थता गुणांक वाले ठोसों के लिए अपरूपण प्रतिबल....., के अनुक्रमानुपाती होता है, जबकि द्रवों के लिए वह ..... के अनुक्रमानुपाती होता है। (अपरूपण विकृति/अपरूपण विकृति की दर)

(d) किसी तरल के अपरिवर्ती प्रवाह में आए किसी संकीर्णन पर प्रवाह की चाल में वृद्धि में ..... का अनुसरण होता है। (संहति का संरक्षण/बर्नूली सिद्धांत)

(e) किसी वायु सुरंग में किसी वायुयान के मॉडल में प्रक्षोभ की चाल वास्तविक वायुयान के प्रक्षोभ के लिए क्रांतिक चाल की तुलना में..... होती है। (अधिक/कम)

9.4 निम्नलिखित के कारण स्पष्ट कीजिए :

(a) किसी कागज़ की पट्टी को क्षैतिज रखने के लिए आपको उस कागज़ पर ऊपर की ओर हवा फूँकनी चाहिए, नीचे की ओर नहीं।

© NCERT not to be republished

(b) जब हम किसी जल टोंटी को अपनी उँगलियों द्वारा बंद करने का प्रयास करते हैं, तो उँगलियों के बीच की खाली जगह से तीव्र जल धाराएँ फूट निकलती हैं।

(c) इंजक्शन लगाते समय डॉक्टर के अँगूठे द्वारा आरोपित दाब की अपेक्षा सुई का आकार दवाई की बहि:प्रवाही धारा को अधिक अच्छा नियंत्रित करता है।

(d) किसी पात्र के बारीक छिद्र से निकलने वाला तरल उस पर पीछे की ओर प्रणोद आरोपित करता है।

(e) कोई प्रचक्रमान क्रिकेट की गेंद वायु में परवलीय प्रपथ का अनुसरण नहीं करती।

9.5 ऊँची एड़ी के जूते पहने 50 kg संहति की कोई बालिका अपने शरीर को 1.0 cm व्यास की एक ही वृत्ताकार एड़ी पर संतुलित किए हुए है। क्षैतिज फर्श पर एड़ी द्वारा आरोपित दाब ज्ञात कीजिए।

9.6 टॉरिसिली के वायुदाब मापी में पारे का उपयोग किया गया था। पास्कल ने ऐसा ही वायुदाब मापी 984 kg m^{-3} घनत्व की फ्रेंच शराब का उपयोग करके बनाया। सामान्य वायुमंडलीय दाब के लिए शराब-स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9.7 समुद्र तट से दूर कोई ऊर्ध्वाधर संरचना 10^9 Pa के अधिकतम प्रतिबल को सहन करने के लिए बनाई गई है। क्या यह संरचना किसी महासागर के भीतर किसी तेल कूप के शिखर पर रखे जाने के लिए उपयुक्त है ? महासागर की गहराई लगभग 3 km है। समुद्री धाराओं की उपेक्षा कीजिए।

9.8 किसी द्रवचालित आटोमोबाइल लिफ्ट की संरचना अधिकतम 3000 kg संहति की कारों को उठाने के लिए की गई है। बोझ को उठाने वाले पिस्टन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 425 cm^2 है। छोटे पिस्टन को कितना अधिकतम दाब सहन करना होगा ?

9.9 किसी U-नली की दोनों भुजाओं में भरे जल तथा मेथेलेटिड स्पिरिट को पारा एक-दूसरे से पृथक् करता है। जब जल तथा पारे के स्तंभ क्रमश: 10 cm तथा 12.5 cm ऊँचे हैं, तो दोनों भुजाओं में पारे का स्तर समान है। स्पिरिट का आपेक्षिक घनत्व ज्ञात कीजिए।

9.10 यदि प्रश्न 9.9 की समस्या में, U-नली की दोनों भुजाओं में इन्हीं दोनों द्रवों को और उड़ेल कर दोनों द्रवों के स्तंभों की ऊँचाई 15 cm और बढ़ा दी जाएँ, तो दोनों भुजाओं में पारे के स्तरों में क्या अंतर होगा। (पारे का आपेक्षिक घनत्व = 13.6)।

9.11 क्या बर्नूली समीकरण का उपयोग किसी नदी की किसी क्षिप्रिका के जल-प्रवाह का विवरण देने के लिए किया जा सकता है ? स्पष्ट कीजिए।

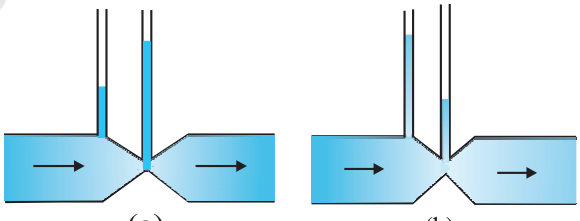
9.12 बर्नूली समीकरण के अनुप्रयोग में यदि निरपेक्ष दाब के स्थान पर प्रमापी दाब (गेज़ दाब) का प्रयोग करें तो क्या इससे कोई अंतर पड़ेगा ? स्पष्ट कीजिए।

9.13 किसी 1.5 m लंबी 1.0 cm त्रिज्या की क्षैतिज नली से ग्लिसरीन का अपरिवर्ती प्रवाह हो रहा है। यदि नली के एक सिरे पर प्रति सेकंड एकत्र होने वाली ग्लिसरीन का परिमाण 4.0×10^{-3} kg s^{-1} है, तो नली के दोनों सिरों के बीच दाबांतर ज्ञात कीजिए। (ग्लिसरीन का घनत्व = 1.3×10^3 kg m^{-3} तथा ग्लिसरीन की श्यानता = 0.83 Pa s)

[आप यह भी जाँच करना चाहेंगे कि क्या इस नली में स्तरीय प्रवाह की परिकल्पना सही है।]

9.14 किसी आदर्श वायुयान के परीक्षण प्रयोग में वायु-सुरंग के भीतर पंखों के ऊपर और नीचे के पृष्ठों पर वायु-प्रवाह की गतियाँ क्रमश: 70 m s^{-1} तथा 63 m s^{-1} हैं। यदि पंख का क्षेत्रफल 2.5 m^2 है, तो उस पर आरोपित उत्थापक बल परिकलित कीजिए। वायु का घनत्व 1.3 kg m^{-3} लीजिए।

9.15 चित्र 9.20(a) तथा (b) किसी द्रव (श्यानताहीन) का अपरिवर्ती प्रवाह दर्शाते हैं। इन दोनों चित्रों में से कौन सही नहीं है ? कारण स्पष्ट कीजिए।



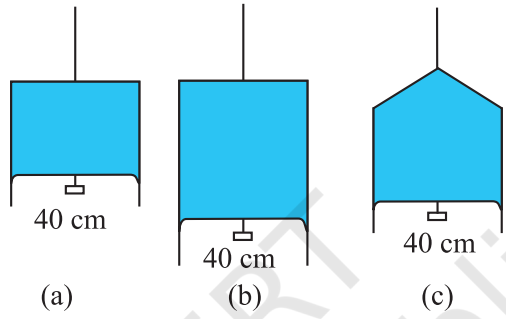
चित्र 9.20

© NCERT not to be republished

9.16 किसी स्प्रे पंप की बेलनाकार नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 8.0 cm^2 है। इस नली के एक सिरे पर 1.0 mm व्यास के 40 सूक्ष्म छिद्र हैं। यदि इस नली के भीतर द्रव के प्रवाहित होने की दर 1.5 m min^{-1} है, तो छिद्रों से होकर जाने वाले द्रव की निष्कासन-चाल ज्ञात कीजिए।

9.17 U-आकार के किसी तार को साबुन के विलयन में डुबो कर बाहर निकाला गया जिससे उस पर एक पतली साबुन की फिल्म बन गई। इस तार के दूसरे सिरे पर फिल्म के संपर्क में एक फिसलने वाला हलका तार लगा है जो 1.5×10^{-2} N भार (जिसमें इसका अपना भार भी सम्मिलित है) को सँभालता है। फिसलने वाले तार की लंबाई 30 cm है। साबुन की फिल्म का पृष्ठ तनाव कितना है ?

9.18 निम्नांकित चित्र 9.21(a) में किसी पतली द्रव-फिल्म को 4.5×10^{-2} N का छोटा भार सँभाले दर्शाया गया है। चित्र (b) तथा (c) में बनी इसी द्रव की फिल्में इसी ताप पर कितना भार सँभाल सकती हैं ? अपने उत्तर को प्राकृतिक नियमों के अनुसार स्पष्ट कीजिए।



चित्र 9.21

9.19 3.00 mm त्रिज्या की किसी पारे की बूँद के भीतर कमरे के ताप पर दाब क्या है? 20 °C ताप पर पारे का पृष्ठ तनाव 4.65×10^{-1} N m^{-1} है। यदि वायुमंडलीय दाब 1.01×10^5 Pa है, तो पारे की बूँद के भीतर दाब-अधिक्य भी ज्ञात कीजिए।

9.20 5.00 mm त्रिज्या के किसी साबुन के विलयन के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य क्या है? 20 °C ताप पर साबुन के विलयन का पृष्ठ तनाव 2.50×10^{-2} N m^{-1} है। यदि इसी विमा का कोई वायु का बुलबुला 1.20 आपेक्षिक घनत्व के साबुन के विलयन से भरे किसी पात्र में 40.0 cm गहराई पर बनता, तो इस बुलबुले के भीतर क्या दाब होता, ज्ञात कीजिए। (1 वायुमंडलीय दाब = 1.01×10^5 Pa)।

© NCERT not to be republished

अध्याय 10

11089CH11

द्रव्य के तापीय गुण

10.1 भूमिका
10.2 ताप तथा ऊष्मा
10.3 ताप मापन
10.4 आदर्श गैस समीकरण तथा परम ताप
10.5 तापीय प्रसार
10.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता
10.7 ऊष्मामिति
10.8 अवस्था परिवर्तन
10.9 ऊष्मा स्थानांतरण
10.10 न्यूटन का शीतलन नियम

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

10.1 भूमिका

हम सभी में ताप तथा ऊष्मा की सहज बोध धारणा होती है। ताप किसी वस्तु की तप्तता (ऊष्णता) की माप होती है। उबलते जल से भरी केतली बर्फ से भरे बॉक्स से अधिक तप्त होती है। भौतिकी में हमें ऊष्मा, ताप, आदि धारणाओं को अधिक सावधानीपूर्वक परिभाषित करने की आवश्यकता होती है। इस अध्याय में आप यह जानेंगे कि ऊष्मा क्या है और इसे कैसे मापते हैं, तथा एक वस्तु से दूसरी वस्तु में ऊष्मा प्रवाह की विभिन्न प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे। अध्ययन करते आप यह भी ज्ञात करेंगे कि किसी घोड़ागाड़ी के लकड़ी के पहिए की नेमि पर लोहे की रिंग चढ़ाने से पहले लोहार इसे तप्त क्यों करते हैं, तथा सूर्य छिपने के पश्चात् समुद्र तटों पर पवन प्रायः अपनी दिशा उत्क्रमित क्यों कर लेती हैं? आप यह भी जानेंगे कि क्या होता है जब जल उबलता अथवा जमता है तथा इन प्रक्रियाओं की अवधि में इसके ताप में परिवर्तन नहीं होता, यद्यपि काफी मात्रा में ऊष्मा इनके भीतर/इनसे बाहर प्रवाहित होती है।

10.2 ताप तथा ऊष्मा

हम द्रव्य के तापीय गुणों के अध्ययन का आरंभ ताप तथा ऊष्मा की परिभाषा से कर सकते हैं। ताप तप्तता अथवा शीतलता की आपेक्षिक माप अथवा सूचन होता है। किसी तप्त बर्तन के ताप को उच्च ताप तथा बर्फ के घन के ताप को निम्न ताप कहते हैं। एक पिण्ड जिसका ताप दूसरे पिण्ड की अपेक्षा अधिक है, अपेक्षाकृत अधिक तप्त कहा जाता है। ध्यान दीजिए, कि लंबे और ठिगने की भांति तप्त तथा शीत भी आपेक्षिक पद हैं। हम स्पर्श द्वारा ताप का अनुभव कर सकते हैं। परन्तु यह ताप बोध कुछ-कुछ अविश्वसनीय होता है तथा इसका परिसर इतना सीमित है कि किसी वैज्ञानिक कार्यों के लिए इसका कोई उपयोग नहीं किया जा सकता।

अपने अनुभवों से हम यह जानते हैं कि किसी तप्त गर्मी के दिन एक मेज पर रखा बर्फ के शीतल जल से भरा गिलास अंततोगत्वा गर्म हो जाता है जबकि तप्त चाय से भरा प्याला उसी मेज पर ठंडा हो जाता है। इसका अर्थ यह हुआ कि जब भी किसी वस्तु (निकाय), इस प्रकरण में बर्फ का शीतल जल अथवा

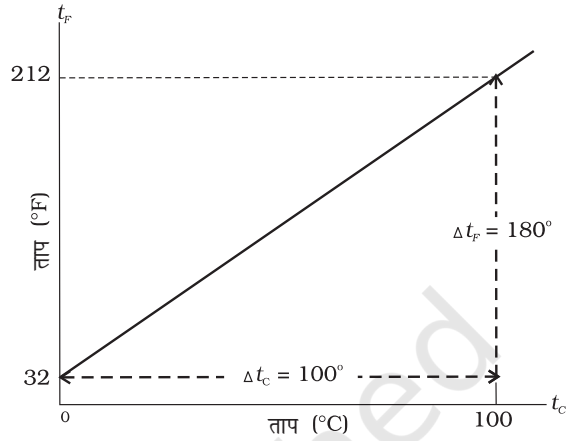
© NCERT not to be republished

गर्म चाय, तथा उसके परिवेशी माध्यम के तापों में अंतर होगा तो वस्तु तथा उसके परिवेशी माध्यम के बीच उस समय तक ऊष्मा स्थानांतरण होता है जब तक वस्तु तथा इसका परिवेशी माध्यम समान ताप पर नहीं आ जाते। हम यह भी जानते हैं कि गिलास में भरे शीतल जल के प्रकरण में ऊष्मा पर्यावरण से गिलास में प्रवाहित होती है, जबकि गर्म चाय के प्रकरण में ऊष्मा गर्म चाय के प्याले से पर्यावरण में प्रवाहित होती है। अत: हम यह कह सकते हैं कि **ऊष्मा ऊर्जा का एक रूप है जिसका स्थानांतरण दो (अथवा अधिक) निकायों के बीच अथवा किसी निकाय तथा उसके परिवेश के बीच ताप में अंतर के कारण होता है।** स्थानांतरित ऊष्मा ऊर्जा के SI मात्रक को जूल (J) में व्यक्त किया जाता है जबकि ताप का SI मात्रक केल्विन (K) है तथा °C सामान्य उपयोग में आने वाला ताप का मात्रक है। जब किसी वस्तु को गर्म करते हैं तो उसमें बहुत से परिवर्तन हो सकते हैं। इसके ताप में वृद्धि हो सकती है, इसमें प्रसार हो सकता है अथवा अवस्था परिवर्तन हो सकता है। अनुवर्ती अनुभागों में हम विभिन्न वस्तुओं पर ऊष्मा के प्रभाव का अध्ययन करेंगे।

10.3 ताप मापन

तापमापी (थर्मामीटर) का उपयोग करके ताप की एक माप प्राप्त होती है। पदार्थों के बहुत से भौतिक गुणों में ताप के साथ पर्याप्त परिवर्तन होते हैं। ऐसे कुछ गुणों को तापमापी की रचना का आधार मानकर उपयोग किया जाता है। सामान्य उपयोग में आने वाला गुण "ताप के साथ किसी द्रव के आयतन में परिवर्तन" होता है। उदाहरण के लिए, सामान्य काँच-में-द्रव प्रकार के तापमापियों में पारा, ऐल्कोहॉल आदि का उपयोग किया जाता है, जिनका एक बड़े परिसर में आयतन तापीय प्रसार रेखीय होता है। जिससे आप परिचित हैं। पारा तथा एल्कोहॉल ऐसे द्रव हैं जिनका उपयोग अधिकांश काँच-में-द्रव तापमापियों में किया जाता है।

तापमापियों का अंशांकन इस प्रकार किया जाता है कि किसी दिए गए ताप को कोई संख्यात्मक मान किसी उपयुक्त मापक्रम पर निर्धारित किया जा सके। किसी भी मानक मापक्रम के लिए दो नियत संदर्भ बिंदुओं की आवश्यकता होती है। चूंकि ताप के साथ सभी पदार्थों की विमाएँ परिवर्तित होती हैं अत: प्रसार के लिए कोई निरपेक्ष संदर्भ उपलब्ध नहीं है। तथापि आवश्यक नियत बिंदु को सदैव समान ताप पर होने वाली भौतिक परिघटनाओं से संबंधित किया जा सकता है। जल का हिमांक तथा भाप-बिंदु दो सुविधाजनक नियत बिंदु हैं, जिन्हें हिमांक तथा क्वथनांक कहते हैं। ये दो नियत बिंदु वह ताप हैं जिन पर शुद्ध जल मानक दाब के अधीन जमता तथा उबलता है। फारेनहाइट ताप मापक्रम तथा सेल्सियस ताप मापक्रम, दो सुपरिचित ताप मापक्रम हैं। फारेनहाइट मापक्रम पर हिमांक तथा भाप-बिंदु के मान क्रमश: 32°F तथा 212°F हैं जबकि सेल्सियस मापक्रम पर इनके मान क्रमश: 0°C तथा 100°C हैं। फारेनहाइट मापक्रम पर दो संदर्भ बिंदुओं के बीच 180 समान अंतराल हैं तथा सेल्सियस मापक्रम पर ये अंतराल 100 हैं।



चित्र 10.1 फारेनहाइट ताप (t_F) प्रति सेल्सियस ताप (t_c) का आलेखन।

दो मापक्रमों में रूपांतरण के लिए आवश्यक संबंध को फारेनहाइट ताप (t_F) तथा सेल्सियस ताप (t_C) के बीच ग्राफ से प्राप्त किया जा सकता है। यह एक सरल रेखा (चित्र 10.1) है जिसका समीकरण इस प्रकार है :

$$\frac{t_F - 32}{180} = \frac{t_C}{100} \qquad (10.1)$$

10.4 आदर्श-गैस समीकरण तथा परम ताप

काँच-में-द्रव तापमापी, प्रसार गुणों में अंतर के कारण नियत बिंदुओं से अन्य तापों के भिन्न पाठ्यांक दर्शाते हैं। परन्तु ऐसे तापमापी जिनमें गैस का उपयोग होता है, चाहे उनमें किसी भी गैस का उपयोग किया जाए, सदैव एक ही पाठ्यांक प्रदर्शित करते हैं। प्रयोग यह दर्शाते हैं कि सभी गैसें कम घनत्व होने पर समान प्रसार-आचरण दर्शाती हैं। वे चर राशियाँ, जो किसी दी गई मात्रा (द्रव्यमान) की गैस के आचरण की व्याख्या करते हैं, दाब, आयतन तथा ताप (P, V, तथा T) (यहाँ $T = t + 273.15$; t सेल्सियस मापक्रम °C में ताप है)। जब ताप को नियत रखा जाता है, तो किसी गैस की निश्चित मात्रा का दाब तथा आयतन PV = नियतांक के रूप में संबंधित होते हैं। इस संबंध को, एक अंग्रेज रसायनज्ञ रॉबर्ट बॉयल (1627-1691) जिन्होंने इस संबंध की खोज की थी, के नाम पर बॉयल-नियम कहते हैं। जब दाब को नियत रखते हैं, तो किसी निश्चित परिमाण की गैस का आयतन उसके ताप से इस प्रकार संबंधित है :

© NCERT not to be republished

V/T = नियतांक। यह संबंध फ्रेंच वैज्ञानिक जैक्स चार्ल्स (1747–1823) के नाम पर चार्ल्स के नियम से जाना जाता है। कम घनत्व पर गैसें इन नियमों का पालन करती हैं जिन्हें एकल संबंध में समायोजित किया जा सकता है। ध्यान दीजिये कि चूंकि गैस की दी हुई मात्रा के लिए PV = नियतांक तथा V/T = नियतांक, इसलिए PV/T भी एक नियतांक होना चाहिए। इस संबंध को आदर्श गैस नियम कहते हैं। इसे और अधिक व्यापक रूप में लिखा जा सकता है जिसका अनुप्रयोग केवल किसी एकल गैस की दी गई मात्रा पर ही नहीं होता, वरन् किसी भी कम घनत्व की गैस की किसी मात्रा के लिए किया जा सकता है। इस संबंध को **आदर्श गैस समीकरण** कहते हैं।

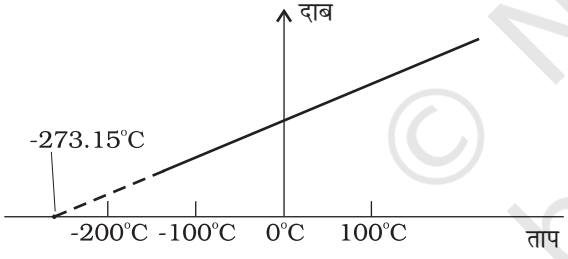
$$\frac{PV}{T} = \mu R$$

अथवा $$PV = \mu RT \qquad (10.2)$$

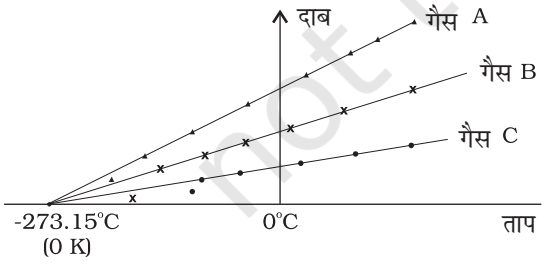
यहाँ, μ गैस के प्रतिदर्श में मोल की संख्या है तथा R को सार्वत्रिक गैस नियतांक कहते हैं :

$R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

समीकरण 10.2 से हमने जाना है कि दाब तथा आयतन (का गुणनफल) ताप के अनुक्रमानुपाती है : $PV \alpha T$। यह संबंध किसी नियत आयतन गैस तापमापी में ताप मापन के लिए गैस के उपयोग को स्वीकार करते हैं। किसी गैस का आयतन नियत रखने पर, $P \alpha T$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, किसी नियत आयतन गैस तापमापी में ताप को दाब के पदों में मापा जाता है।



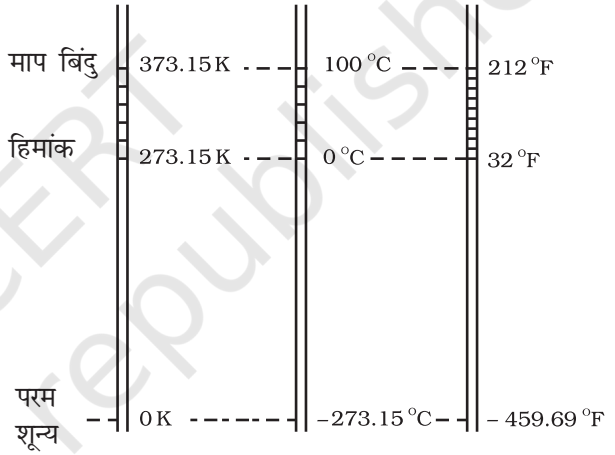
चित्र 10.2 नियत आयतन पर रखी किसी कम घनत्व की गैस के दाब तथा आयतन के बीच ग्राफ।



चित्र 10.3 दाब तथा ताप के बीच ग्राफ का आलेखन तथा कम घनत्व की गैसों के लिए रेखाओं का बहिर्वेशन समान परम शून्य ताप को संकेत करता है।

चित्र 10.2 में दर्शाए अनुसार, इस प्रकरण में, दाब तथा ताप के बीच ग्राफ एक सरल रेखा होता है।

तथापि, निम्न ताप पर वास्तविक गैसों पर ली गई मापों तथा आदर्श गैस नियम द्वारा प्रागुक्त मानों में अंतर पाया गया है। परन्तु एक विस्तृत ताप परिसर में यह संबंध रैखिक है तथा ऐसा प्रतीत होता है कि यदि गैस गैसीय अवस्था में ही बनी रहे तो ताप घटाने पर दाब शून्य हो जाएगा। चित्र 10.3 में दर्शाए अनुसार, सरल रेखा को बहिर्वेशित करके किसी आदर्श गैस के लिए परम निम्निष्ठ ताप प्राप्त किया जा सकता है। इस ताप का मान – 273.15°C पाया गया तथा इसे **परम शून्य** कहा जाता है। परम शून्य ब्रिटिश वैज्ञानिक लॉर्ड केल्विन के नाम पर केल्विन ताप मापक्रम अथवा परम ताप मापक्रम का आधार है। इस मापक्रम पर – 273.15°C को शून्य बिंदु के रूप में, अर्थात् 0 K लिया जाता है (चित्र 10.4)।



चित्र 10.4 केल्विन, सेल्सियस तथा फारेनहाइट ताप मापक्रमों में तुलना।

केल्विन तथा सेल्सियस मापक्रमों के लिए मात्रक की आमाप अंश समान होते हैं, अतः इन मापक्रमों के तापों में संबंध इस प्रकार है :

$$T = t_C + 273.15 \qquad (10.3)$$

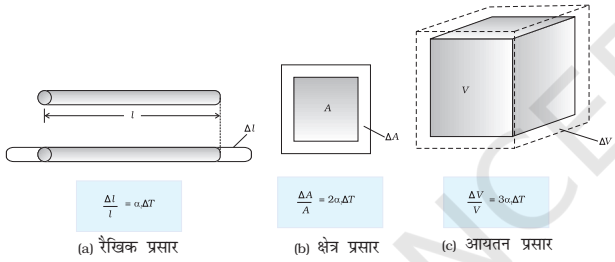
10.5 तापीय प्रसार

आपने यह देखा होगा कि कभी-कभी धातुओं के ढक्कन वाली बंद बोतलों के चूड़ीदार ढक्कनों को इतना कसकर बंद कर दिया जाता है कि ढक्कनों को खोलने के लिए उन्हें कुछ देर तक गर्म जल में डालना होता है। ऐसा करने पर ढक्कन में प्रसार होकर वह ढीला हो जाता है और उसकी चूड़ियाँ आसानी से खुल जाती हैं। द्रवों के प्रकरण में आपने यह देखा होगा कि जब किसी तापमापी

© NCERT not to be republished

को हलके उष्ण जल में रखते हैं, तो उस तापमापी में पारा कुछ ऊपर चढ़ जाता है। यदि हम तापमापी को उष्ण जल से बाहर निकाल लेते हैं तो तापमापी में पारे का तल नीचे गिर जाता है। इसी प्रकार, गैसों के प्रकरण में, ठंडे कमरे में आंशिक रूप से फूला कोई गुब्बारा, उष्ण जल में रखे जाने पर अपनी पूरी आमाप तक फूल सकता है। इसके विपरीत, जब किसी पूर्णतः फूले किसी गुब्बारे को शीतल जल में डुबाते हैं तो वह भीतर की वायु के सिकुड़ने के कारण सिकुड़ना आरंभ कर देता है।

यह हमारा सामान्य अनुभव है कि अधिकांश पदार्थ तप्त होने पर प्रसारित होते हैं तथा शीतलन पर सिकुड़ते हैं। किसी वस्तु के ताप में परिवर्तन होने पर उसकी विमाओं में अंतर हो जाता है। किसी वस्तु के ताप में वृद्धि होने पर उसकी विमाओं में वृद्धि होने को तापीय प्रसार कहते हैं। लंबाई में प्रसार को **रैखिक प्रसार** कहते हैं। क्षेत्रफल में प्रसार को **क्षेत्र प्रसार** कहते हैं। आयतन में प्रसार को **आयतन प्रसार** कहते हैं (चित्र 10.5)।



चित्र 10.5 तापीय प्रसार।

यदि पदार्थ किसी लंबी छड़ के रूप में है, तो ताप में अल्प परिवर्तन, ΔT, के लिए लंबाई में भिन्नात्मक परिवर्तन, $\Delta l/l$, ΔT के अनुक्रमानुपाती होता है।

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \, \Delta T \qquad (10.4)$$

जहाँ α_l को **रैखिक प्रसार गुणांक (अथवा रैखिक प्रसारता)** कहते हैं तथा यह छड़ के पदार्थ का अभिलक्षण होता है। सारणी 10.1 में ताप परिसर 0 °C से 100 °C में कुछ पदार्थों के रैखिक प्रसार गुणांकों के प्रतिरूपी माध्य मान दिए गए हैं। इस सारणी से काँच तथा ताँबे के लिए α_l के मानों की तुलना कीजिए। हम यह पाते हैं कि समान ताप वृद्धि के लिए ताँबे में काँच की तुलना में पाँच गुना अधिक प्रसार होता है। सामान्यतः, धातुओं में अधिक प्रसार होता है तथा इनके लिए α_l के मान अपेक्षाकृत अधिक होते हैं।

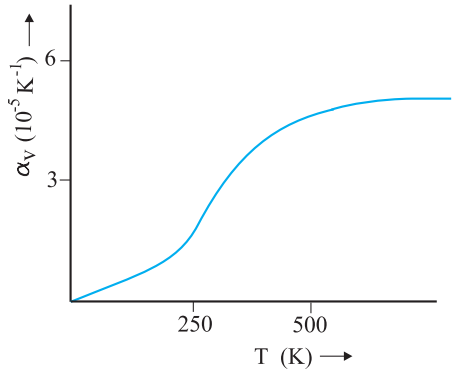
सारणी 10.1 कुछ पदार्थों के लिए रैखिक प्रसार गुणांकों के मान

पदार्थ	α_l (10^{-5} K^{-1})
एलुमिनियम	2.5
पीतल	1.8
लोहा	1.2
ताँबा	1.7
चाँदी	1.9
सोना	1.4
काँच (पायरेक्स)	0.32
लैड	0.29

इसी प्रकार, हम किसी ताप परिवर्तन, ΔT के लिए किसी पदार्थ के भिन्नात्मक आयतन परिवर्तन, $\frac{\Delta V}{V}$, पर विचार करते हैं तथा **आयतन प्रसार गुणांक (अथवा आयतन प्रसारता)**, α_V को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\alpha_V = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)\frac{1}{\Delta T} \qquad (10.5)$$

यहाँ भी α_V पदार्थ का अभिलक्षण है, परन्तु सही अर्थ में यह नियतांक नहीं है। व्यापक रूप में यह ताप पर निर्भर करता है (चित्र 10.6)। यह पाया गया है कि केवल उच्च ताप पर α_V नियतांक बन जाता है।



चित्र 10.6 ताप के फलन के रूप में ताँबे का आयतन प्रसार गुणांक।

सारणी 10.2 में 0-100 °C ताप परिसर में कुछ सामान्य पदार्थों के आयतन प्रसार गुणांकों के मान दिए गए हैं। आप यह देख सकते हैं कि इन पदार्थों (ठोस तथा द्रव) के तापीय प्रसार कम हैं, तथा पायरेक्स काँच तथा इनवार (लोहे तथा निकेल की

© NCERT not to be republished

विशिष्ट मिश्र धातु) जैसे पदार्थों के α_V के मान विशेषकर निम्न हैं। इस सारणी से हम यह पाते हैं कि एल्कोहॉल (ऐथिल) के लिए α_v का मान पारे की तुलना में अधिक है, तथा समान ताप वृद्धि के लिए इसमें पारे की तुलना में अधिक वृद्धि होती है।

सारणी 10.2 कुछ पदार्थों के आयतन प्रसार गुणांक के मान

पदार्थ	α_v (K^{-1})
एलुमिनियम	7×10^{-5}
पीतल	6×10^{-5}
लोहा	3.55×10^{-5}
पैराफीन	58.8×10^{-5}
काँच (सामान्य)	2.5×10^{-5}
काँच (पायरेक्स)	1×10^{-5}
कठोर रबड़	2.4×10^{-4}
इनवार	2×10^{-6}
पारा	18.2×10^{-5}
जल	20.7×10^{-5}
एल्कोहॉल (इथैनॉल)	110×10^{-5}

जल असंगत व्यवहार प्रदर्शित करता है; यह 0°C से 4°C के बीच गर्म किए जाने पर सिकुड़ता है। किसी दिए गए परिमाण के जल का आयतन, कक्ष ताप से 4°C तक ठंडा किए जाने पर, घटता है [चित्र 10.7(a)]। 4°C से कम ताप पर आयतन बढ़ता है अत: घनत्व घटता है [चित्र 10.7(b)]।

इसका अर्थ यह हुआ कि जल का घनत्व 4°C पर अधिकतम होता है। जल के इस गुण का एक महत्त्वपूर्ण पर्यावरणीय प्रभाव है : तालाबों तथा झीलों जैसे जलाशयों का शीर्ष भाग पहले जमता है। जैसे-जैसे झील 4°C तक ठंडी होती जाती है, पृष्ठ के समीप का जल अपनी ऊर्जा वातावरण को देता जाता है और संघनित होकर डूबता जाता है। तली का उष्ण, अपेक्षाकृत कम संघनित जल ऊपर उठता है। परन्तु, एक बार शीर्षभाग के ठंडे जल का ताप 4°C से नीचे पहुँच जाता है, यह जल कम संघनित बन जाता है, और पृष्ठ पर ही रहता है, जहाँ यह जम जाता है। यदि जल में यह गुण न होता, तो झील तथा तालाब तली से ऊपर की ओर जमते जिससे उसका अधिकांश जलीय जीवन (जल जीव-जन्तु तथा पौधे) नष्ट हो जाता।

सामान्य ताप पर ठोसों तथा द्रवों की अपेक्षा गैसों में अपेक्षाकृत अधिक प्रसार होता है। द्रवों के लिए, आयतन प्रसार गुणांक अपेक्षाकृत ताप पर निर्भर नहीं करता। परन्तु गैसों के लिए यह ताप पर निर्भर करता है। किसी आदर्श गैस के लिए किसी नियत दाब पर आयतन प्रसार गुणांक का मान आदर्श गैस समीकरण से प्राप्त किया जा सकता है :

$$PV = \mu RT$$

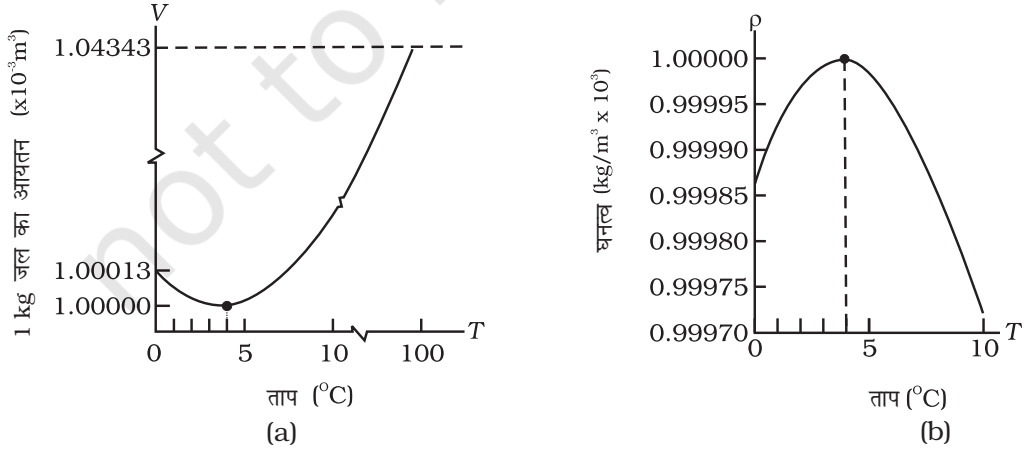
नियत ताप पर

$$P\Delta V = \mu R\Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

अर्थात् $\alpha_v = \frac{1}{T}$ आदर्श गैस के लिए (10.6)

0°C, $\alpha_v = 3.7 \times 10^{-3}\ K^{-1}$, जो ठोसों तथा द्रवों की अपेक्षा अत्यधिक बड़ा है। समीकरण (10.6) α_v की ताप पर निर्भरता को दर्शाती है। इसका मान ताप में वृद्धि के साथ कम हो जाता है। नियत दाब तथा कक्ष ताप पर किसी गैस के लिए α_v का मान लगभग $3300 \times 10^{-6} K^{-1}$ है, जो कि प्रतिरूपी द्रवों के आयतन प्रसार गुणांक की तुलना में कई कोटि गुना बड़ा है।



चित्र 10.7 जल का तापीय प्रसार।

© NCERT not to be republished

आयतन प्रसार गुणांक (α_v) तथा रैखिक प्रसार गुणांक (α_l) में एक सरल संबंध है। लंबाई l के किसी ऐसे घन की कल्पना कीजिए जिसमें ताप में ΔT की वृद्धि होने पर सभी दिशाओं में समान रूप से वृद्धि होती है। तब

$$\Delta l = \alpha_l \, l \, \Delta T$$

इसीलिए, $\Delta V = (l+\Delta l)^3 - l^3 \quad 3l^2 \, \Delta l$ (10.7)

समीकरण 10.7 में हमने (Δl) को l की तुलना में छोटा होने के कारण $(\Delta l)^2$ तथा $(\Delta l)^3$ के पदों को उपेक्षणीय मान लिया है। अत:

$$\Delta V = \frac{3V \, \Delta l}{l} = 3V\alpha_l \, \Delta T \qquad (10.8)$$

इससे हमें प्राप्त होता है

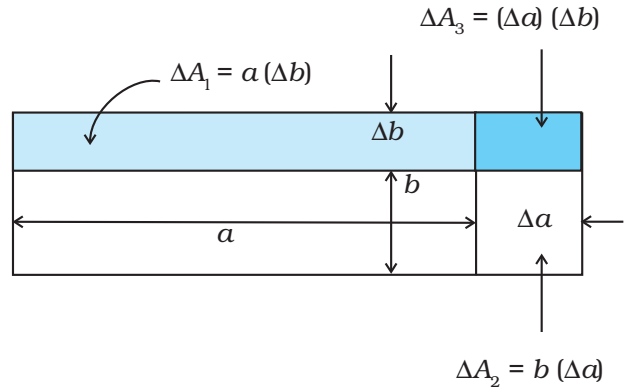
$$\alpha_v = 3\alpha_l \qquad (10.9)$$

क्या होता है, जब किसी छड़ के दोनों सिरों को दृढ़ता से जड़कर इसके तापीय प्रसार को रोका जाता है। स्पष्ट है कि सिरों के दृढ़ अवलंबों द्वारा प्रदत्त बाह्य बलों के कारण छड़ में संपीडन विकृति उत्पन्न हो जाती है जिसके तदनुरूपी छड़ में एक प्रतिबल उत्पन्न होता है जिसे **तापीय प्रतिबल** कहते हैं। उदाहरण के लिए 40 cm^2 अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल की 5m लंबी स्टील की ऐसी छड़ के बारे में विचार कीजिए जिसके तापीय प्रसार को रोका जाता है, जबकि उसके ताप में 10°C की वृद्धि की गई है। स्टील का रैखिक प्रसार गुणांक $\alpha_{l(\text{स्टील})} = 1.2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ है। अत: यहाँ संपीडन विकृति $\frac{\Delta l}{l} = \alpha_{l(\text{स्टील})} \, \Delta T = 1.2\times10^{-5}\times10 = 1.2\times10^{-4}$। स्टील के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y_{(\text{स्टील})} = 2\times10^{11} \text{ N m}^{-2}$। अत: छड़ में उत्पन्न तापीय प्रतिबल $\frac{\Delta F}{A} = Y_{\text{स्टील}} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4\times10^{7} \text{ N m}^{-2}$, इसके तदनुरूपी बाह्य बल

$$\Delta F = AY_{\text{स्टील}} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4\times10^{7}\times40\times10^{-4} \simeq 10^5 \text{ N}$$

यदि बाह्य सिरों पर आबद्ध इस प्रकार की स्टील की दो पटरियों के भीतरी सिरे संपर्क में हैं तो इस परिमाण के बल पटरियों को सरलता से मोड़ सकते हैं।

उदाहरण 10.1 यह दर्शाइए कि किसी ठोस की आयताकार शीट का क्षेत्र प्रसार गुणांक, $(\Delta A/A)/\Delta T$, इसके रैखिक प्रसार गुणांक α_l का दो गुना होता है।



चित्र 10.8

हल किसी ठोस पदार्थ की आयताकार शीट जिसकी लंबाई a तथा चौड़ाई b (चित्र 10.8) है, पर विचार कीजिए। जब ताप में ΔT की वृद्धि की जाती है तो a में $\Delta a = \alpha_l a \Delta T$ तथा b में $\Delta b = \alpha_l b \, \Delta T$ की वृद्धि होती है। चित्र 10.8 के अनुसार क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$$
$$\Delta A = a\,\Delta b + b\Delta a + (\Delta a)\,(\Delta b)$$
$$= a\alpha_l b \, \Delta T + b\alpha_l \, a \, \Delta T + (\alpha_l)^2 \, ab \, (\Delta T)^2$$
$$= \alpha_l \, ab \, \Delta T \, (2 + \alpha_l \, \Delta T) = \alpha_l \, A \, \Delta T \, (2 + \alpha_l \, \Delta T)$$

चूंकि $\alpha_l \quad 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, तब सारणी 10.1 के अनुसार 2 की तुलना में गुणनफल, $\alpha_l \, \Delta T$ का मान बहुत छोटा है, अत: इसे उपेक्षणीय माना जा सकता है। अत:

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)\frac{1}{\Delta T} \simeq 2\alpha_l$$ ◀

उदाहरण 10.2 कोई लोहार किसी घोड़ागाड़ी के लकड़ी के पहिए की नेमी पर लोहे की रिंग जड़ता है। 27°C पर नेमी तथा लोहे की रिंग के व्यास क्रमश: 5.243m तथा 5.231 m हैं। लोहे की रिंग को किस ताप तक तप्त किया जाए कि वह पहिए की नेमी पर ठीक बैठ जाए।

हल

दिया गया है कि, $T_1 = 27°\text{C}$

$L_{T1} = 5.231 \text{ m}$

$L_{T2} = 5.243 \text{ m}$

अत:

$$L_{T2} = L_{T1} \, [1+\alpha_l \, (T_2 - T_1)]$$
$$5.243\text{m} = 5.231\text{m} \, [1 + 1.20\times10^{-5} \text{ K}^{-1} \, (T_2 - 27°\text{C}]$$

अथवा $T_2 = 218°\text{C}$ ◀

© NCERT not to be republished

10.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

किसी बर्तन में जल लेकर उसे किसी बर्नर पर गर्म करना आरंभ कीजिए। शीघ्र ही आप जल में बुलबुले ऊपर उठते देखेंगे। जैसे ही ताप में वृद्धि की जाती है, तो जल के कणों की गति में विक्षोभ होने तक वृद्धि होती जाती है और जल उबलने लगता है। वे कौन से कारक हैं जिन पर किसी पदार्थ का ताप बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा निर्भर करती है? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए प्रथम चरण में, जल की कुछ मात्रा को गर्म करके उसके ताप में कुछ वृद्धि, जैसे 20°C कीजिए और उसमें लगा समय नोट कीजिए। पुनः इतना ही जल लेकर अब इसके ताप में ऊष्मा के उसी स्रोत द्वारा 40°C की ताप वृद्धि कीजिए और विराम घड़ी से समय नोट कीजिए। आप यह पाएंगे कि इस बार लगभग दो गुना समय लगता है। अतः समान मात्रा के जल के ताप में दो गुनी वृद्धि करने के लिए दो गुनी ऊष्मा की मात्रा की आवश्यकता होती है।

दूसरे चरण में, अब मान लीजिए आप दो गुना जल लेकर इसे गर्म करने के लिए उसी स्रोत का उपयोग करके इसके ताप में 20°C की ताप-वृद्धि करते हैं। आप यह पाएँगे कि इस बार फिर गर्म करने में पहले चरण की अपेक्षा लगभग दो गुना समय लगा है।

तीसरे चरण में, जल के स्थान पर, अब किसी तेल, जैसे सरसों का तेल, की समान मात्रा लेकर इसके ताप में भी 20°C की वृद्धि कीजिए। अब उसी विराम घड़ी द्वारा समय नोट कीजिए। आप यह पाएँगे कि इस बार पहले की अपेक्षा कम समय लगा है। अतः आवश्यक ऊष्मा की मात्रा समान मात्रा के जल के ताप में समान वृद्धि के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा से कम है।

उपरोक्त प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि किसी दिए गए पदार्थ को उष्ण करने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा इसके द्रव्यमान m, ताप में परिवर्तन ΔT, तथा पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है। किसी पदार्थ के ताप में परिवर्तन, जबकि ऊष्मा की एक दी गई मात्रा को वह पदार्थ अवशोषित करता है अथवा बहिष्कृत करता है, एक राशि, जिसे उस पदार्थ की **ऊष्मा धारिता** कहते हैं, द्वारा अभिलक्षित की जाती है। किसी पदार्थ की ऊष्मा धारिता S को हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{10.10}$$

यहाँ ΔQ पदार्थ के ताप में T से $T + \Delta T$ तक परिवर्तन करने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा है।

आपने यह प्रेक्षण किया है कि जब विभिन्न पदार्थों के समान द्रव्यमानों को समान मात्रा में ऊष्मा प्रदान की जाती है, तो उनमें होने वाले परिणामी ताप परिवर्तन समान नहीं होते। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान में एकांक ताप-परिवर्तन के लिए वह पदार्थ ऊष्मा की एक निश्चित व अनन्य मात्रा का अवशोषण अथवा बहिष्करण करता है, इस मात्रा को पदार्थ की **विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं।

यदि m द्रव्यमान के किसी पदार्थ द्वारा ΔT ताप परिवर्तन के लिए ΔQ ऊष्मा की मात्रा अवशोषित अथवा बहिष्कृत करनी होती है तो उस पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता s को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{10.11}$$

विशिष्ट ऊष्मा धारिता किसी पदार्थ का वह गुण होता है जो इस पदार्थ द्वारा एक दिए गए परिमाण की ऊष्मा को अवशोषित (अथवा बहिष्कृत) करने पर (यदि प्रावस्था परिवर्तन नहीं है) उस पदार्थ के ताप में होने वाले परिवर्तन को निर्धारित करता है। इसे "ऊष्मा की वह मात्रा जो किसी पदार्थ का एकांक द्रव्यमान अपने ताप में एकांक परिवर्तन के लिए अवशोषित अथवा बहिष्कृत करता है" के रूप में परिभाषित किया जाता है। विशिष्ट ऊष्मा धारिता का SI मात्रक $\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ है।

यदि पदार्थ की मात्रा का उल्लेख "द्रव्यमान m किलोग्रामों" में न करके मोल μ के पदों में किया जाता है तो हम किसी पदार्थ की ऊष्मा धारिता प्रति मोल को इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$s = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{10.12}$$

जहाँ C **मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहलाती है। S की भांति C भी पदार्थ की प्रकृति तथा इसके ताप पर निर्भर करता है। मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता का SI मात्रक $\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ है।

परन्तु, गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के संबंध में C को परिभाषित करने के लिए अतिरिक्त प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है। इस प्रकरण में दाब अथवा आयतन को नियत रखकर भी ऊष्मा स्थानांतर किया जा सकता है। यदि ऊष्मा स्थानांतरण के समय गैस का दाब नियत रखा जाता है, तो इसे **नियत दाब पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं और इसे C_p द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। इसके विपरीत, यदि ऊष्मा स्थानांतरण के समय गैस का आयतन नियत रखते हैं, तो इसे **नियत आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं और इसे C_v द्वारा निर्दिष्ट करते हैं। इसके विस्तृत वर्णन के लिए

© NCERT not to be republished

सारणी 10.3 वायुमण्डलीय दाब तथा कक्ष ताप पर कुछ पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)	पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ kg^{-1}\ K^{-1}$)
एलुमिनियम	900.0	बर्फ	2060
कार्बन	506.5	काँच	840
ताँबा	386.4	आयरन	450
लैड	127.7	कैरोसीन	2118
चाँदी	236.1	खाद्य तेल	1965
टंग्सटन	134.1	पारा	140
जल	4186.0		

अध्याय 11 देखिए। सारणी 10.3 में वायुमण्डलीय दाब तथा कक्ष ताप पर कुछ पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के मापे हुए मानों की सूची दी गई है जबकि सारणी 10.4 में कुछ गैसों की

सारणी 10.4 कुछ गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

गैस	C_p ($J\ mol^{-1}K^{-1}$)	C_v ($J\ mol^{-1}K^{-1}$)
He	20.8	12.5
H_2	28.8	20.4
N_2	29.1	20.8
O_2	29.4	21.1
CO_2	37.0	28.5

मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता की सूची दी गई है। सारणी 10.3 से आप यह ध्यान में रख सकते हैं कि अन्य पदार्थों की तुलना में जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता उच्चतम होती है। यही कारण है कि स्वचालित वाहनों के रैडिएटरों में जल का उपयोग शीतलक के रूप में किया जाता है तथा सिकाई के लिए उपयोग होने वाली तप्त जल थैलियों में जल का उपयोग तापक के रूप में किया जाता है। उच्च विशिष्ट ऊष्मा धारिता होने के कारण गर्मियों में थल की अपेक्षा जल बहुत धीमी गति से गर्म होता है फलस्वरूप समुद्र की ओर से आने वाली पवनें शीतल होती हैं। अब आप यह बता सकते हैं कि मरुक्षेत्रों में पृथ्वी का पृष्ठ दिन के समय शीघ्र उष्ण तथा रात्रि के समय शीघ्र शीतल क्यों हो जाता है।

10.7 ऊष्मामिति

किसी निकाय को वियुक्त निकाय तब कहा जाता है जब उस निकाय तथा उसके परिवेश के बीच कोई ऊष्मा विनिमय अथवा ऊष्मा स्थानांतर नहीं होता। जब किसी वियुक्त निकाय के विभिन्न भाग भिन्न-भिन्न ताप पर होते हैं, तब ऊष्मा की कुछ मात्रा उच्च ताप के भाग से निम्न ताप वाले भाग को स्थानांतरित हो जाती है। उच्च ताप के भाग द्वारा लुप्त ऊष्मा निम्न ताप के भाग द्वारा ऊष्मा लब्धि के बराबर होती है।

ऊष्मामिति का अर्थ ऊष्मा मापन है। जब कोई उच्च ताप की वस्तु किसी निम्न ताप की वस्तु के संपर्क में लाई जाती है, तो उच्च ताप की वस्तु द्वारा लुप्त ऊष्मा निम्न ताप की वस्तु द्वारा ऊष्मा लब्धि के बराबर होती है, बशर्ते कि निकाय से ऊष्मा का कोई भाग भी परिवेश में पलायन न करे। ऐसी युक्ति जिसमें ऊष्मा मापन किया जा सके उसे **ऊष्मामापी** कहते हैं (चित्र 10.20)। यह धातु के एक बर्तन तथा उसी पदार्थ जैसे ताँबा अथवा एल्युमिनियम के विडोलक से मिलकर बना होता है। इस बर्तन को एक लकड़ी के आवरण के भीतर, जिसमें ऊष्मारोधी पदार्थ जैसे काँच तंतु भरा होता है, रखा जाता है। बाहरी आवरण ऊष्मा कवच की भांति कार्य करता है तथा यह भीतरी बर्तन से ऊष्मा-हानि को कम कर देता है। बाहरी आवरण में एक छिद्र बनाया जाता है जिससे होते हुए पारे का तापमापी बर्तन के भीतर पहुँचता है। निम्नलिखित उदाहरण द्वारा आपको किसी दिए गए ठोस पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात करने की ऐसी विधि मिल जाएगी जिसमें लुप्त ऊष्मा = ऊष्मा लब्धि के सिद्धांत का उपयोग किया जाता है।

▶ ***उदाहरण 10.3*** 0.047 kg द्रव्यमान के किसी ऐलुमिनियम के गोले को काफी समय के लिए उबलते जल से भरे बर्तन में रखा गया है ताकि गोले का ताप 100°C हो जाए। इसके पश्चात् गोले को तुरन्त 0.14 kg द्रव्यमान के ताँबे के ऊष्मामापी, जिसमें 20°C का 0.25 kg जल भरा है, में स्थानांतरित किया जाता है। जल के ताप में वृद्धि होती है तथा यह 23°C पर स्थायी अवस्था ग्रहण कर लेता है। ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता परिकलित कीजिए।

© NCERT not to be republished

हल इस उदाहरण को हल करते समय हम इस तथ्य का उपयोग करेंगे कि स्थायी अवस्था में ऐलुमिनियम के गोले द्वारा दी गई ऊष्मा जल तथा ऊष्मामापी द्वारा अवशोषित ऊष्मा के बराबर होती है।

ऐलुमिनियम के गोले का द्रव्यमान (m_1) = 0.047 kg

ऐलुमिनियम के गोले का आरंभिक ताप = 100°C

अंतिम ताप = 23°C

ताप में परिवर्तन (ΔT) = (100°C - 23°C) = 77°C

मान लीजिए, ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = s_{Al}

ऐलुमिनियम के गोले द्वारा लुप्त ऊष्मा की मात्रा =

$$m_1 s_{Al} \Delta T = 0.047 \text{kg} \times s_{Al} \times 77^\circ \text{C}$$

जल का द्रव्यमान (m_2) = 0.25 kg

ऊष्मामापी का द्रव्यमान (m_3) = 0.14 kg

जल तथा ऊष्मामापी का आरंभिक ताप = 20°C

मिश्रण का अंतिम ताप = 23°C

ताप में परिवर्तन (ΔT_2) = 23°C–20°C = 3°C

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता (s_w)

= 4.18×10^3 J kg^{-1} $°C^{-1}$

ताँबे के ऊष्मामापी की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

= 0.386×10^3 J kg^{-1} $°C^{-1}$

जल तथा ऊष्मामापी द्वारा ऊष्मालब्धि की मात्रा

$= m_2 s_w \Delta T_2 + m_3 s_{cu} \Delta T_2$

$= (m_2 s_w + m_3 s_{cu}) (\Delta T_2)$

= 0.25 kg ×4.18 × 10^3 J kg^{-1} $°C^{-1}$ + 0.14 kg × 0.386 × 10^3 J kg^{-1} $°C^{-1}$) (23°C – 20°C)

स्थायी अवस्था में ऐलुमिनियम के गोले द्वारा लुप्त ऊष्मा = जल द्वारा ऊष्मा लब्धि + ऊष्मामापी द्वारा ऊष्मा लब्धि

0.047 kg × s_{Al} × 77°C

= (0.25 kg × 4.18 × 10^3 J kg^{-1} $°C^{-1}$ + 0.14 kg × 0.386 × 10^3 J kg^{-1} $°C^{-1}$)(3°C)

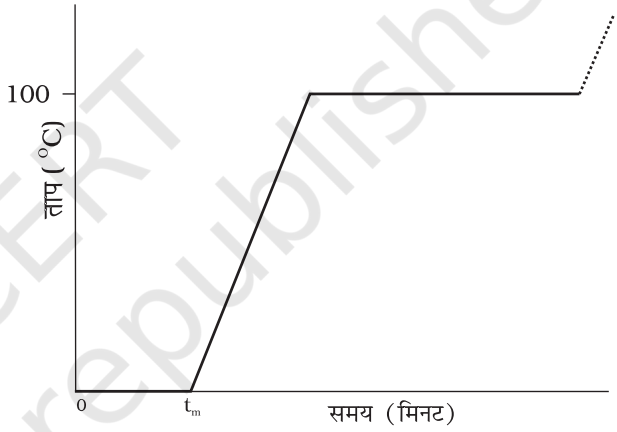
s_{Al} = 0.911 kJ kg^{-1} $°C^{-1}$ ◀

10.8 अवस्था परिवर्तन

सामान्य रूप में द्रव्य की तीन अवस्थाएँ हैं : ठोस, द्रव तथा गैस। इन अवस्थाओं में से किसी एक अवस्था से दूसरी अवस्था में संक्रमण को अवस्था परिवर्तन कहते हैं। दो सामान्य अवस्था परिवर्तन ठोस से द्रव तथा द्रव से गैस (तथा विलोमत:) हैं। ये परिवर्तन तब ही हो सकते हैं जबकि पदार्थ तथा उसके परिवेश के बीच ऊष्मा का विनिमय होता है। तापन अथवा शीतलन पर अवस्था परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं।

क्रियाकलाप 10.1

एक बीकर में कुछ हिम क्यूब लीजिए। हिम का ताप नोट कीजिए। इसे धीरे-धीरे किसी अचल ऊष्मा स्रोत पर गर्म करना आरंभ कीजिए। हर एक मिनट के पश्चात् ताप नोट कीजिए। जल तथा हिम के मिश्रण को निरंतर विडोलित करते रहिए। समय और ताप के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए (चित्र 10.9)। आप यह पाएँगे कि जब तक बीकर में हिम उपस्थित है तब तक ताप में कोई परिवर्तन नहीं होता। उपरोक्त प्रक्रिया में, निकाय को ऊष्मा की सतत आपूर्ति होने पर भी उसके ताप में कोई परिवर्तन नहीं होता। यहाँ संभरण की जा रही ऊष्मा का उपयोग ठोस (हिम) से द्रव (जल) में अवस्था परिवर्तन किए जाने में हो रहा है।



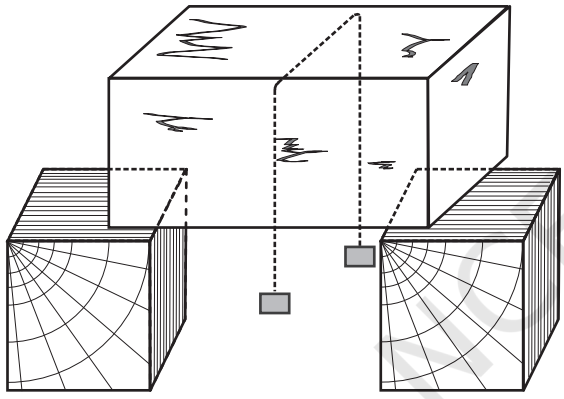
चित्र 10.9 हिम को गर्म करने पर अवस्था में हुए परिवर्तनों को ताप और समय के बीच ग्राफ आलेखित करके दर्शाना (पैमाने के अनुसार नहीं)।

ठोस से द्रव में अवस्था परिवर्तन को **गलन** (अथवा पिघलना) तथा द्रव से ठोस में अवस्था परिवर्तन को **हिमीकरण** कहते हैं। यह पाया गया है कि ठोस पदार्थ की समस्त मात्रा के पिघलने तक ताप नियत रहता है अर्थात् **ठोस से द्रव में अवस्था परिवर्तन की अवधि में पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ ठोस तथा द्रव तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं।** वह ताप जिस पर किसी पदार्थ की ठोस तथा द्रव अवस्थाएँ परस्पर तापीय साम्य में होती हैं उसे उस पदार्थ का **गलनांक** कहते हैं। यह किसी पदार्थ का अभिलक्षण होता है। यह दाब पर भी निर्भर करता है। मानक वायुमण्डलीय दाब पर किसी पदार्थ के गलनांक को **प्रसामान्य गलनांक** कहते हैं। हिम के गलने की प्रक्रिया को समझने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

© NCERT not to be republished

क्रियाकलाप 10.2

एक हिम शिला लीजिए। एक धातु का तार लेकर उसके दोनों सिरों से समान भार जैसे 5 kg के बाट बाँधिए। चित्र 10.10 में दर्शाए अनुसार इस तार को हिम शिला के ऊपर रखिए। आप यह देखेंगे कि तार हिमशिला में से पार हो जाता है। ऐसा होने का कारण यह है कि तार के ठीक नीचे दाब में वृद्धि के कारण हिम निम्न ताप पर पिघल जाता है। जब तार वहाँ से गुजर जाता है, तो तार के ऊपर का जल पुनः हिमीभूत हो जाता है। इस प्रकार तार हिम शिला से पार हो जाता है तथा शिला विभक्त नहीं होती। पुनर्हिमीभवन की इस परिघटना को **पुनर्हिमायन** कहते हैं। हिम पर 'स्केट' के नीचे जल बनने के कारण ही 'स्केटिंग' करना संभव हो पाता है। दाब में वृद्धि के कारण जल बनता है जो स्नेहक की भांति कार्य करता है।



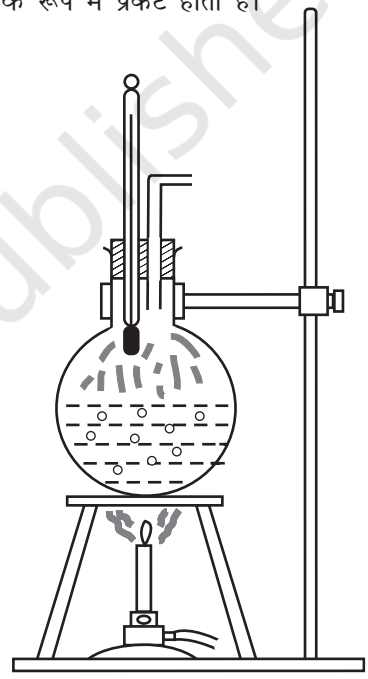
चित्र 10.10

जब समस्त हिम जल में रूपांतरित हो जाता है और इसके पश्चात् जैसे ही हम और आगे गर्म करना चालू रखते हैं तो हम यह पाते हैं कि ताप में वृद्धि होनी आरंभ हो जाती है चित्र 10.9। ताप में यह वृद्धि निरंतर लगभग 100 °C तक होती है और यहाँ फिर ताप स्थिर हो जाता है। अब फिर जल को आपूर्त ऊष्मा का उपयोग जल को द्रव अवस्था से वाष्प अथवा गैसीय अवस्था में रूपांतरित करने में होता है।

द्रव से वाष्प (अथवा गैस) में अवस्था परिवर्तन को **वाष्पन** कहते हैं। यह पाया गया है कि समस्त द्रव के वाष्प में रूपांतरित होने तक ताप नियत रहता है। अर्थात्, ठोस से वाष्प में अवस्था परिवर्तन की अवधि में पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ द्रव तथा गैस तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं। वह ताप जिस पर किसी पदार्थ की द्रव तथा वाष्प दोनों अवस्थाएँ तापीय साम्य में परस्पर सहवर्ती होती हैं उसे उस पदार्थ का **क्वथनांक** कहते हैं। जल के क्वथन की प्रक्रिया को समझने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 10.3

आधे से अधिक जल से भरा एक गोल पेंदी का फ्लास्क लीजिए। चित्र 10.11 में दर्शाए अनुसार फ्लास्क के मुख पर लगी कार्क के वेधों से होकर भीतर जाते हुए एक तापमापी तथा एक भाप निकास कार्क में लगाइए और फ्लास्क को बर्नर के ऊपर रखिए। जैसे ही जल गर्म होता है, तो पहले यह देखिए कि वह वायु, जो जल में विलीन थी, छोटे-छोटे बुलबुलों के रूप में बाहर आएगी। तत्पश्चात् भाप के बुलबुले फ्लास्क की तली में बनेंगे, परन्तु जैसे ही वे शीर्षभाग के पास के शीतल जल की ओर ऊपर उठते हैं, संघनित होकर अदृश्य हो जाते हैं। अंततः जैसे ही समस्त जल का ताप 100°C पर पहुँचता है, भाप के बुलबुले पृष्ठ पर पहुँचते हैं और **क्वथन** होने लगता है। फ्लास्क के भीतर भाप दिखाई नहीं देती, परन्तु जैसे ही फ्लास्क से बाहर निकलती है, यह जल की अत्यंत छोटी बूँदों के रूप में संघनित होकर धुंध के रूप में प्रकट होती है।



चित्र 10.11 क्वथन प्रक्रिया।

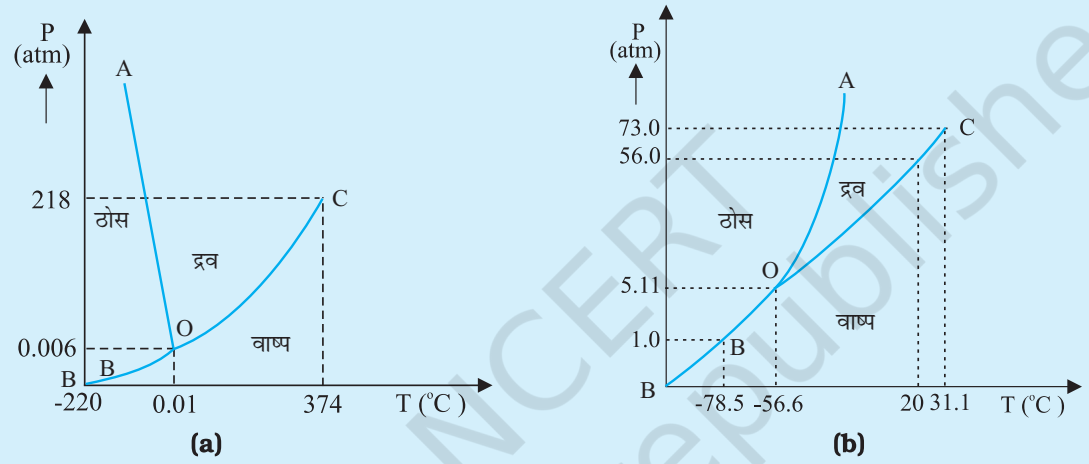
अब यदि कुछ सेकंडों के लिए भाप निकास को बंद कर दें, ताकि फ्लास्क के भीतर दाब में वृद्धि हो, तब आप यह देखेंगे कि क्वथन रुक जाता है। जल में क्वथन प्रक्रिया पुनः आरंभ होने तक जल के ताप में वृद्धि करने के लिए (दाब पर निर्भर करते हुए) और ऊष्मा की आवश्यकता होती है। इस प्रकार दाब में वृद्धि के साथ क्वथनांक में वृद्धि हो जाती है।

आइए अब हम बर्नर को हटा लेते हैं तथा जल को लगभग 80°C तक ठंडा होने देते हैं। फ्लास्क से तापमापी तथा भाप निकास हटाकर फ्लास्क के मुँह को वायुरुद्ध कर्क से कस कर

© NCERT not to be republished

त्रिक बिंदु

किसी पदार्थ का ताप उसकी अवस्था परिवर्तन (प्रावस्था परिवर्तन) की अवधि में नियत रहता है। किसी पदार्थ के ताप T तथा दाब P के बीच आलेखित ग्राफ को प्रावस्था आरेख अथवा $P-T$ आरेख कहते हैं। नीचे दिखाए गए चित्र में जल तथा CO_2 के प्रावस्था आरेख दर्शाए गए हैं। इस प्रकार का प्रावस्था आरेख $P-T$ तल को ठोस क्षेत्र, वाष्प क्षेत्र तथा द्रव क्षेत्र में विभाजित करता है। इन क्षेत्रों को वक्रों जैसे **ऊर्ध्वपातन वक्र** (BO), **संगलन वक्र** (AO) तथा **वाष्पन वक्र** (CO) द्वारा पृथक किया जाता है। ऊर्ध्वपातन वक्र BO के बिंदु उस अवस्था को निरूपित करते हैं जिस पर ठोस तथा वाष्प प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। संगलन वक्र AO के बिंदु उस अवस्था का निरूपण करते हैं जिसमें ठोस तथा द्रव प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। वाष्पन वक्र CO के बिंदु उस अवस्था को निरूपित करते हैं जिसमें द्रव तथा वाष्प प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। वह ताप तथा दाब जिस पर संगलन वक्र, वाष्पन वक्र तथा ऊर्ध्वपातन वक्र मिलते हैं तथा किसी पदार्थ की तीनों प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं उस पदार्थ का **त्रिक बिंदु** कहलाता है। उदाहरण के लिए, जल के त्रिक बिंदु को ताप 273.16K तथा दाब 6.11×10^{-3} Pa द्वारा निरूपित करते हैं।



(a) जल तथा (b) CO_2 के लिए दाब-ताप प्रावस्था आरेख (पैमाने के अनुसार नहीं)

बंद कर देते हैं। अब फ्लास्क को स्टैंड पर उलटा करके रखते हैं और फ्लास्क पर हिमशीतित जल उड़ेलते हैं। ऐसा करने पर फ्लास्क के भीतर की जलवाष्प संघनित होकर फ्लास्क के भीतर जल के पृष्ठ पर दाब को कम कर देती है। अब निम्न ताप पर जल में पुनः क्वथन आरंभ हो जाता है। इस प्रकार दाब में कमी होने पर क्वथनांक घट जाता है।

इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि पहाड़ी क्षेत्रों में भोजन पकाना क्यों कठिन होता है। उच्च तुंगता पर वायुमण्डलीय दाब निम्न होता है, जिसके कारण वहाँ पर समुद्र तट की तुलना में जल का क्वथनांक घट जाता है। इसके विपरीत, दाब कुकर के भीतर दाब में वृद्धि करके क्वथनांक बढ़ाया जाता है। इसीलिए पाकक्रिया तेज होती है। मानक वायुमण्डलीय दाब पर किसी पदार्थ के क्वथनांक को **प्रसामान्य क्वथनांक** कहते हैं।

परन्तु, सभी पदार्थ इन तीनों अवस्थाओं – ठोस, द्रव तथा गैस से नहीं गुजरते। कुछ पदार्थ ऐसे भी हैं जो सामान्यतः सीधे ठोस से वाष्प अवस्था में और विलोमतः पहुँच जाते हैं। किसी पदार्थ का ठोस अवस्था से वाष्प अवस्था में, बिना द्रव अवस्था से गुजरे, पहुँचना **ऊर्ध्वपातन** कहलाता है तथा ऐसे पदार्थ को **ऊर्ध्वपातन** पदार्थ कहते हैं। शुष्क हिम (ठोस CO_2) का ऊर्ध्वपातन होता है, आयोडीन भी इसी प्रकार का पदार्थ है। ऊर्ध्वपातन की प्रक्रिया के समय किसी पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ – ठोस तथा वाष्प अवस्था तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं।

10.8.1 गुप्त ऊष्मा

अनुभाग 10.8 में हमने यह सीखा है कि जब कोई पदार्थ अवस्था परिवर्तन की स्थिति में होता है तो पदार्थ तथा उसके परिवेश के बीच ऊष्मा की एक निश्चित मात्रा स्थानांतरित होती है। किसी पदार्थ की अवस्था परिवर्तन की अवधि में, ऊष्मा की मात्रा का प्रति एकांक द्रव्यमान स्थानांतरण, उस पदार्थ की इस

© NCERT not to be republished

सारणी 10.5 1 atm दाब पर विभिन्न पदार्थों के अवस्था परिवर्तन के ताप तथा गुप्त ऊष्माएँ

पदार्थ	गलनांक (°C)	L_f (10^5 J kg^{-1})	क्वथनांक (°C)	L_v (10^5 J kg^{-1})
इथैनॉल	–114	1.0	78	8.5
सोना	1063	0.645	2660	15.8
लैड	328	0.25	1744	8.67
पारा	–39	0.12	357	2.7
नाइट्रोजन	–210	0.26	–196	2.0
ऑक्सीजन	–219	0.14	–183	2.1
जल	0	3.33	100	22.6

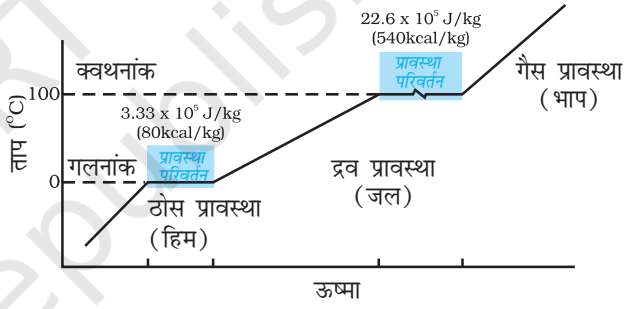
प्रक्रिया के लिए **गुप्त ऊष्मा** कहलाती है। उदाहरण के लिए, यदि –10°C के किसी दिए गए परिमाण के हिम को गर्म किया जाए तो उसका ताप इसके गलनांक (0°C) तक बढ़ता है। इस ताप पर और ऊष्मा देने पर ताप में वृद्धि नहीं होती, परन्तु हिम पिघलने लगती है अर्थात् अवस्था परिवर्तन होता है। जब समस्त हिम पिघल जाती है, तो और ऊष्मा देने पर जल के ताप में वृद्धि होती है। इसी प्रकार की स्थिति क्वथनांक पर द्रव–गैस अवस्था परिवर्तन के समय होती है। उबलते जल को और ऊष्मा प्रदान करने पर ताप में वृद्धि नहीं होती; वाष्पन हो जाता है।

अवस्था परिवर्तन के समय आवश्यक ऊष्मा का परिमाण जिस पदार्थ की अवस्था में परिवर्तन हो रहा है उसके द्रव्यमान तथा रूपांतरण–ऊष्मा पर निर्भर करता है। इस प्रकार, यदि m उस पदार्थ का द्रव्यमान है जिसका एक अवस्था से दूसरी अवस्था में परिवर्तन हो रहा है, तब आवश्यक ऊष्मा का परिमाण

$$Q = mL$$

अथवा $$L = Q/m \qquad (10.13)$$

यहाँ L को गुप्त ऊष्मा कहते हैं तथा यह पदार्थ का अभिलक्षण है। इसका SI मात्रक J kg^{-1} है। L का मान दाब पर भी निर्भर करता है। प्रायः इसके मान का उद्धरण मानक वायुमण्डलीय दाब पर किया जाता है। ठोस–द्रव अवस्था परिवर्तन के लिए गुप्त ऊष्मा को **संगलन की गुप्त ऊष्मा** (L_f) कहते हैं, तथा द्रव–गैस अवस्था परिवर्तन के लिए गुप्त ऊष्मा को **वाष्पन की गुप्त ऊष्मा** (L_v) कहते हैं। इसे हम प्रायः संगलन ऊष्मा तथा वाष्पन ऊष्मा कहते हैं। चित्र 10.12 में जल के किसी परिमाण के लिए ताप तथा ऊष्मा के बीच ग्राफ का आलेख दर्शाया गया है। सारणी 10.5 में कुछ पदार्थों की गुप्त ऊष्मा, गलनांक तथा क्वथनांक दिए गए हैं।



चित्र 10.12 जल के लिए ताप तथा ऊष्मा के बीच ग्राफ आलेखन (पैमाने के अनुसार नहीं)।

ध्यान दीजिए कि जब अवस्था परिवर्तन के समय ऊष्मा दी (अथवा ली) जाती है, तो ताप नियत रहता है। ध्यान से देखिए कि चित्र 10.12 में प्रावस्था रेखाओं की प्रवणताएँ समान नहीं हैं जो यह संकेत देता है कि विभिन्न अवस्थाओं की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ समान नहीं हैं। जल के लिए, संगलन तथा वाष्पन की गुप्त ऊष्माएँ क्रमशः $L_f = 3.33\times10^5$ J kg^{-1} तथा $L_v = 22.6\times10^5$ J kg^{-1} हैं। अर्थात् 1 kg हिम को 0°C पर गलन के लिए 3.33×10^5 J ऊष्मा चाहिए तथा 1 kg जल को 100°C पर भाप में परिवर्तन होने के लिए 22.6×10^5 J ऊष्मा चाहिए। अतः 100°C के जल की अपेक्षा 100°C की भाप में 22.6×10^5 J kg^{-1} ऊष्मा अधिक होती है। यही कारण है कि उबलते जल की तुलना में उसी ताप की भाप प्रायः अधिक गंभीर जलन देती है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 10.4 जब 0°C पर रखे 0.15 kg हिम को किसी पात्र में भरे 50°C के 0.30 kg जल में मिलाया जाता है तो मिश्रण का परिणामी ताप 6.7°C हो जाता है। हिम के संगलन की ऊष्मा परिकलित कीजिए। ($s_{\text{जल}}$ = 4186 J kg^{-1} ^{0}C^{-1})

हल :

जल द्वारा लुप्त ऊष्मा = $ms_w (\theta_f - \theta_i)_w$

= (0.30 kg) (4186 J kg^{-1} °C^{-1}) (50.0°C – 6.7°C)

= 54376.14 J

हिम के गलन के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m_2 L_f$ = (0.15 kg) L_f

हिम जल के ताप को अंतिम ताप तक बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा = $m_1 s_w (\theta_f - \theta_i)_1$

= (0.15 kg) (4186 J kg^{-1} °C $^{-1}$) (6.7°C – 0°C)

= 4206.93 J

लुप्त ऊष्मा = ऊष्मा लब्धि

54376.14 J = (0.15 kg) L_f + 4206.93 J

L_f = 3.34×10^5 J kg^{-1} ◀

उदाहरण 10.5 किसी ऊष्मामापी में भरे –12°C के 3 kg हिम को वायुमण्डलीय दाब पर 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा परिकलित कीजिए। दिया गया है हिम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 2100 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}, जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 4186 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}, हिम के संगलन की गुप्त ऊष्मा = 3.35×10^5 J kg^{-1} तथा भाप की गुप्त ऊष्मा = 2.256×10^6 J kg^{-1}.

हल : दिया है

हिम का द्रव्यमान m = 3 kg

हिम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता, $s_{\text{हिम}}$

= 2100 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता, $s_{\text{जल}}$

= 4186 J kg^{-1} ^{0}C^{-1}

हिम के संगलन की गुप्त ऊष्मा, $L_{f\,\text{हिम}}$

= 3.35×10^5 J kg^{-1}

भाप की गुप्त ऊष्मा, $L_{\text{भाप}}$

= 2.256×10^6 J kg^{-1}

अब, Q = –12°C के 3 kg हिम को 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

Q_1 = –12°C के 3 kg हिम को 0°C के हिम में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\, s_{\text{हिम}}\, \Delta T_1$ = (3 kg) (2100 J kg^{-1} °C^{-1}) [0–(–12)]°C = 75600 J

Q_2 = 0°C के 3 kg हिम को 0°C के जल में संगलित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\, L_{f\,\text{हिम}}$ = (3 kg) (3.35×10^5 J kg^{-1})

= 1005000 J

Q_3 = 0°C के 3 kg जल को 100°C के जल में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $ms_w \Delta T_2$

= (3kg) (4186J kg^{-1} °C^{-1}) (100°C)

= 1255800 J

Q_4 = 100°C के 3 kg जल को 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\, L_{\text{भाप}}$ = (3 kg) (2.256×10^6 J kg^{-1})

= 6768000 J

अतः, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

= 75600 J + 1005000J

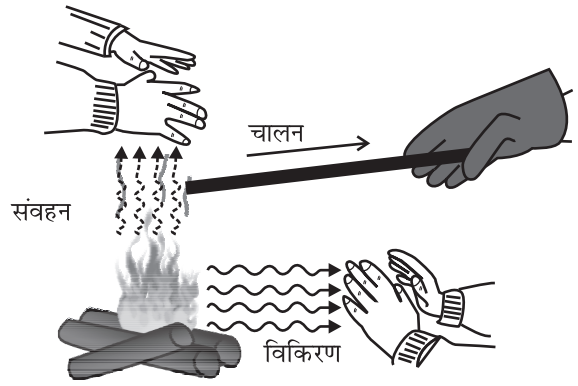
+ 1255800 J + 6768000 J

= 9.1×10^6 J ◀

10.9 ऊष्मा स्थानांतरण

हमने देखा है कि ताप में अंतर के कारण एक निकाय से दूसरे निकाय में अथवा किसी निकाय के एक भाग से उसके दूसरे भाग में ऊर्जा के स्थानांतरण को ऊष्मा कहते हैं। इस ऊर्जा स्थानांतर के विविध साधन क्या हैं? ऊष्मा स्थानांतरण की सुस्पष्ट तीन विधियाँ हैं: चालन, संवहन तथा विकिरण (चित्र 10.13)।

© NCERT not to be republished

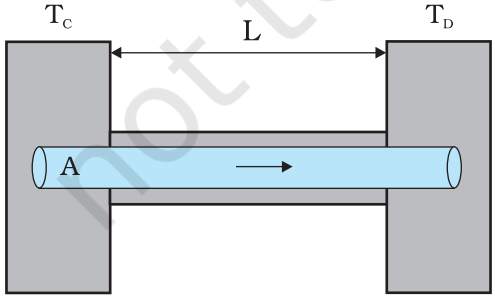


चित्र 10.13 चालन, संवहन तथा विकिरण द्वारा तापन।

10.9.1 चालन

किसी वस्तु के दो संलग्न भागों के बीच उनके तापों में अंतर के कारण ऊष्मा स्थानांतरण की क्रियाविधि को **चालन** कहते हैं। मान लीजिए किसी धातु की छड़ का एक सिरा आग की ज्वाला में रखा है। शीघ्र ही छड़ का दूसरा सिरा इतना गर्म हो जाएगा कि आप उसे अपने नंगे हाथों से पकड़ नहीं सकेंगे। यहाँ छड़ में ऊष्मा स्थानांतरण चालन द्वारा छड़ के तप्त सिरे से छड़ के विभिन्न भागों से होकर दूसरे सिरे तक होता है। गैसें हीन ऊष्मा चालक होती हैं तथा द्रवों की चालकता ठोसों तथा गैसों के बीच की होती है।

मात्रात्मक रूप में, ऊष्मा चालन का वर्णन "किसी पदार्थ में किसी दिए गए तापांतर के लिए ऊष्मा प्रवाह की दर" द्वारा किया जाता है। L लंबाई तथा A एकसमान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की धातु की किसी ऐसी छड़ पर विचार कीजिए जिसके दोनों सिरों के बीच तापांतर स्थापित किया गया है। उदाहरण के लिए, ऐसा छड़ के सिरों को क्रमशः T_C तथा T_D ताप के ऊष्मा भंडारों के संपर्क में रखकर किया जा सकता है (चित्र 10.14)। अब हम एक ऐसी आदर्श स्थिति की कल्पना करते हैं जिसमें छड़ के पार्श्व पूर्णतः ऊष्मारोधी हैं ताकि पार्श्वों तथा परिवेश के बीच ऊष्मा का विनिमय नहीं होता।



चित्र 10.14 किसी छड़ जिसके दो सिरों को T_C तथा T_D तापों पर ($T_C > T_D$) स्थापित किया गया है, में चालन द्वारा स्थायी अवस्था ऊष्मा प्रवाह।

कुछ समय के पश्चात् स्थायी अवस्था आ जाती है; छड़ का ताप दूरी के साथ एकसमान रूप से T_C से T_D तक घटता है; ($T_C > T_D$)। C पर ऊष्मा भण्डार एक नियत दर पर ऊष्मा की आपूर्ति करता है, जो छड़ से स्थानांतरित होकर उसी दर से D पर स्थित ऊष्मा भंडार में पहुँच जाती है। प्रयोगों द्वारा यह पाया जाता है कि इस स्थायी अवस्था में, ऊष्मा प्रवाह की दर H तापांतर ($T_C - T_D$) तथा अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल, A के अनुक्रमानुपाती और छड़ की लंबाई L के व्युत्क्रमानुपाती होती है:

$$H = KA \frac{T_C - T_D}{L} \qquad (10.14)$$

आनुपातिकता स्थिरांक K को पदार्थ की **ऊष्मा चालकता** कहते हैं। किसी पदार्थ के लिए K का मान जितना अधिक होता है उतनी ही शीघ्रता से वह ऊष्मा चालन करता है। K का SI मात्रक $J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$ अथवा $W\ m^{-1}\ K^{-1}$ है। सारणी 10.6 में विभिन्न पदार्थों की ऊष्मा चालकता के मान दिए गए हैं। इन मानों में ताप के साथ अल्प अंतर होता है, परन्तु सामान्य ताप परिसर में इन मानों को अचर मान सकते हैं।

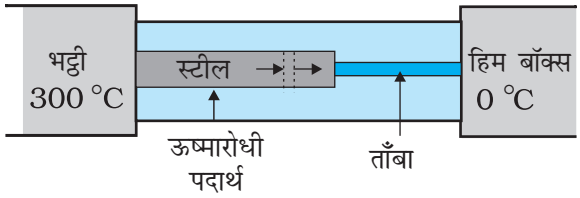
अच्छे ऊष्मा चालकों (धातुओं) की अपेक्षाकृत अधिक ऊष्मा चालकताओं की तुलना कुछ अच्छे ऊष्मारोधी पदार्थों, जैसे लकड़ी तथा काँच तंतु, की अपेक्षाकृत कम ऊष्मा चालकताओं से कीजिए। आपने यह पाया होगा कि खाना पकाने के कुछ बर्तनों की पेंदी पर ताँबे का विलेपन होता है। ऊष्मा का अच्छा चालक होने के कारण ताँबा बर्तन की पेंदी पर ऊष्मा वितरण को उन्नत करता है जिससे भोजन समान रूप से पकता है। इसके विपरीत, प्लास्टिक फेन, मुख्यतः वायु की कोटरिका होने के कारण, अच्छे ऊष्मारोधी होते हैं। याद कीजिए गैसें अल्प चालक होती हैं तथा सारणी 10.6 से वायु की निम्न ऊष्मा चालकता नोट कीजिए। बहुत से अन्य अनुप्रयोगों में ऊष्मा धारण तथा स्थानांतरण महत्वपूर्ण होते हैं। हमारे देश में, कंक्रीट की छतों वाले घर गर्मियों में बहुत गर्म हो जाते हैं, इसका कारण यह है कि कंक्रीट की ऊष्मा चालकता (यद्यपि धातुओं की तुलना काफी कम है।) फिर भी बहुत कम नहीं है। इसीलिए, प्रायः लोग छतों पर फोन-रोधन कराना पसंद करते हैं ताकि ऊष्मा स्थानांतरण को रोककर कमरे को शीतल रखा जा सके। कुछ स्थितियों में ऊष्मा स्थानांतरण क्रांतिक होता है। उदाहरण के लिए नाभिकीय रिएक्टरों में सुविस्तृत ऊष्मा-स्थानांतर निकायों को स्थापित करने की आवश्यकता होती है ताकि नाभिकीय रिएक्टर के क्रोड में नाभिकीय विखंडन द्वारा उत्पन्न विशाल ऊर्जा का काफी तेज़ी से बाहर पारगमन किया जा सके तथा क्रोड अतितप्त होने से बचा रहे।

© NCERT not to be republished

सारणी 10.6 कुछ पदार्थों की ऊष्मा चालकताएँ

पदार्थ	ऊष्मा चालकता ($J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$)
धातुएँ	
चाँदी	406
ताँबा	385
ऐलुमिनियम	205
पीतल	109
स्टील	50.2
लैड	34.7
पारा	8.3
अधातुएँ	
ऊष्मारोधी ईंट	0.15
कंक्रीट	0.8
शरीर-वसा	0.20
नमदा	0.04
काँच	0.8
हिम	1.6
काँच तंतु	0.04
लकड़ी	0.12
जल	0.8
गैसें	
वायु	0.024
ऑर्गन	0.016
हाइड्रोजन	0.14

उदाहरण 10.6 चित्र 10.15 में दर्शाए गए निकाय की स्थायी अवस्था में स्टील-ताँबा संधि का ताप क्या है? स्टील छड़ की लंबाई = 15.0 cm, ताँबे की छड़ की लंबाई = 10.0 cm, भट्ठी का ताप = 300°C, दूसरे सिरे का ताप = 0°C; स्टील की छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल ताँबे की छड़ की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का दो गुना है। (स्टील की ऊष्मा चालकता = 50.2 J s^{-1} m^{-1} K^{-1}; ताँबे की ऊष्मा चालकता = 385 J $s^{-1}m^{-1}K^{-1}$)



चित्र 10.15

हल : छड़ों को चारों ओर से घेरे रखने वाले ऊष्मारोधी पदार्थ छड़ों के पार्श्व से होने वाली ऊष्मा क्षति को कम कर देते हैं। इसीलिए, ऊष्मा केवल छड़ की लंबाई के अनुदिश ही प्रवाहित होती है। छड़ की किसी भी अनुप्रस्थ काट पर विचार कीजिए। स्थायी अवस्था में छड़ के किसी अवयव में प्रवेश करने वाली ऊष्मा उससे बाहर निष्कासित होने वाली ऊष्मा के बराबर होनी चाहिए, वरना अवयव द्वारा ऊष्मा की नेट लब्धि अथवा हानि होगी तथा इसका ताप स्थायी नहीं रहेगा। इस प्रकार स्थायी अवस्था में छड़ की किसी अनुप्रस्थ काट से प्रवाहित होने वाली ऊष्मा की दर संयुक्त स्टील-ताँबा छड़ की लंबाई के अनुदिश सभी बिंदुओं पर समान है। मान लीजिए स्टील-ताँबा संधि का स्थायी अवस्था में ताप T है, तब

$$\frac{K_1 A_1 (300 - T)}{L_1} = \frac{K_2 A_2 (T - 0)}{L_2}$$

यहाँ, 1 तथा 2 क्रमशः स्टील तथा ताँबे को संदर्भित करते हैं। $A_1 = 2 A_2$, $L_1 = 15.0$ cm, $L_2 = 10.0$ cm, $K_1 = 50.2$ J s^{-1} m^{-1} K^{-1}, $K_2 = 385$ J s^{-1} m^{-1} K^{-1}, के लिए

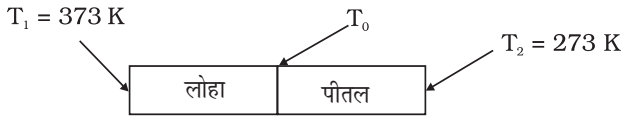
$$\frac{50.2 \times 2 (300 - T)}{15} = \frac{385T}{10}$$

अर्थात् $T = 44.4$ °C ◀

उदाहरण 10.7 चित्र 10.16 में दर्शाए अनुसार लोहे की किसी छड़ ($L_1 = 0.1$m, $A_1 = 0.02$ m^2, $K_1 = 79$ W m^{-1} K^{-1}) को किसी पीतल की छड़ ($L_2 = 0.1$m, $A_2 = 0.02$ m^2, $K_2 = 109$ W m^{-1} K^{-1}) के साथ सिरे से सिरे को मिलाकर डाला गया है। लोहे की छड़ तथा पीतल की छड़ के स्वतंत्र सिरों को क्रमशः 373 K तथा 273 K पर स्थापित किया गया है। (i) दोनों छड़ों की संधि पर ताप, (ii) संयुक्त छड़ की तुल्य ऊष्मा चालकता, तथा (iii) संयुक्त छड़ में ऊष्मा प्रवाह की दर के लिए व्यंजक निकालिए तथा परिकलित कीजिए।

© NCERT not to be republished

हल



चित्र 10.16

दिया गया है,

$L_1 = L_2 = L = 0.1\text{m}$, $A_1 = A_2 = A = 0.02\ \text{m}^2$

$K_1 = 79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}$, $K_2 = 109\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}$,

$T_1 = 373\ \text{K}$, और $T_2 = 273\ \text{K}$

स्थायी अवस्था की शर्तों के अधीन, लोहे की छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर (H_1) ताँबे की छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर (H_2) के समान है।

अत:, $H = H_1 = H_2$

$$= \frac{K_1 A_1 (T_1 - T_0)}{L_1} = \frac{K_2 A_2 (T_0 - T_2)}{L_2}$$

चूंकि $A_1 = A_2 = A$ तथा $L_1 = L_2 = L$

अत: उपरोक्त समीकरण होगा

$K_1 (T_1 - T_0) = K_2 (T_0 - T_2)$

अत: दोनों छड़ों की संधि का ताप T_0 होगा

$$T_0 = \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{K_1 + K_2}$$

T_0 के इस मान का प्रतिस्थापन करने से किसी भी छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर H का मान प्राप्त होता है:

$$H = \frac{K_1 A (T_1 - T_0)}{L} = \frac{K_2 A (T_0 - T_2)}{L}$$

$$= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{A(T_1 - T_0)}{L} = \frac{A(T_1 - T_2)}{L \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)}$$

यदि लंबाई $L_1 + L_2 = 2L$ की संयुक्त छड़ की तुल्य ऊष्मा चालकता K है तथा इससे होकर जाने वाली ऊष्मा प्रवाह की दर H′ हो, तो उपरोक्त समीकरण का उपयोग करने पर

$$H' = \frac{K' A (T_1 - T_2)}{2L} = H$$

तथा $$K' = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

इस प्रकार,

(i) $$T_O = \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{K_1 + K_2}$$

$$= \frac{(79\ \text{W m}^{-1}\text{K}^{-1})(373\text{K}) + (109\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1})(273\text{K})}{79\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1} + 109\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}$$

$= 315\ \text{K}$

(ii) $$K' = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

$$= \frac{2 \times (79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}) \times (109\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})}{79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1} + 109\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}}$$

$= 91.6\ \text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

(iii) $$H' = H = \frac{K' A (T_1 - T_2)}{2L}$$

$$= \frac{(91.6\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}) \times (0.02\ \text{m}^2) \times (373\text{K} - 273\text{K})}{2 \times (0.1\ \text{m})}$$

$= 916.1\ \text{W}$ ◀

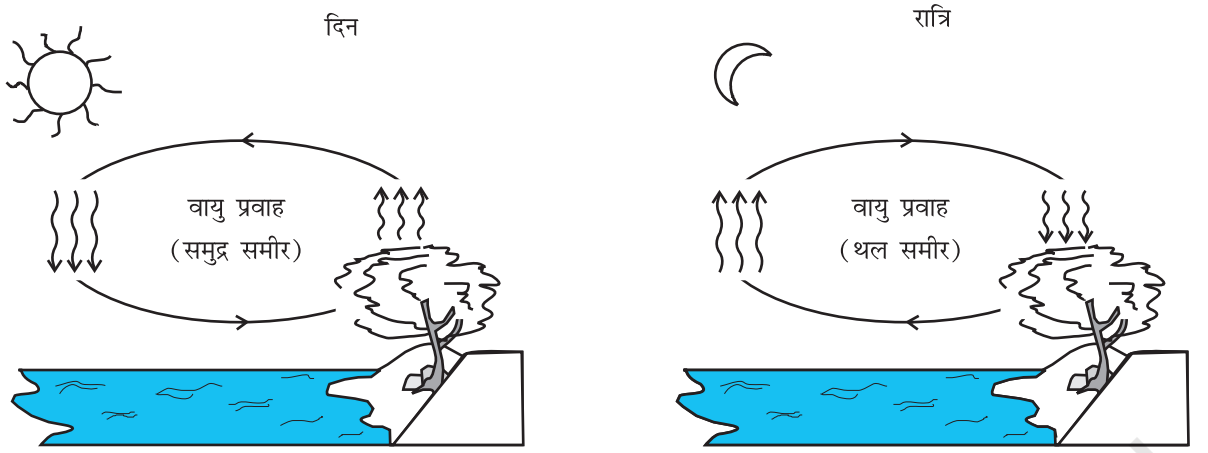
10.9.2 संवहन

संवहन वह विधि है जिसमें पदार्थ की वास्तविक गति द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण होता है। यह केवल तरलों में ही संभव है। संवहन प्राकृतिक हो सकता है अथवा प्रणोदित भी हो सकता है। प्राकृतिक संवहन में गुरुत्व एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। जब किसी तरल को नीचे से गर्म किया जाता है, तो गर्म भाग में प्रसार होता है, फलस्वरूप उसका घनत्व घट जाता है। उत्प्लावना के कारण यह ऊपर उठता है तथा ऊपरी शीतल भाग इसे प्रतिस्थापित कर देता है। यह पुन: तप्त होता है, ऊपर उठता है तथा तरल के अपेक्षाकृत शीतल भाग द्वारा प्रतिस्थापित होता है। यह प्रक्रिया चलती रहती है। स्पष्ट रूप से ऊष्मा स्थानांतर की यह विधि चालन से भिन्न होती है। संवहन में तरल के विभिन्न भागों का स्थूल अभिगमन होता है।

प्रणोदित संवहन में पदार्थ को किसी पम्प अथवा किसी अन्य भौतिक साधन द्वारा गति करने के लिए विवश किया जाता है। घरों में प्रणोदित वायु तापन निकाय, मानव परिसंचरण तंत्र तथा स्वचालित वाहनों के इंजनों के शीतलन निकाय प्रणोदित संवहन निकायों के सामान्य उदाहरण हैं। मानव शरीर में हृदय एक पम्प की भांति कार्य करता है जो रुधिर का शरीर के विभिन्न भागों में संचरण करता है, तथा इस प्रकार प्रणोदित संवहन द्वारा ऊष्मा स्थानांतरित करके शरीर में एकसमान ताप स्थापित करता है।

प्राकृतिक संवहन बहुत सी सुपरिचित परिघटनाओं के लिए उत्तरदायी है। दिन के समय बड़े जलाशयों की तुलना में थल शीघ्र तप्त हो जाता है। ऐसा दो कारणों से होता है – पहला जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता उच्च है तथा दूसरा मिश्रित धाराएँ अवशोषित ऊष्मा को विशाल आयतन के जल के सब भागों में विसारित कर देती हैं। तप्त थल के संपर्क वाली वायु चालन

© NCERT not to be republished



चित्र 10.17 संवहन चक्र।

द्वारा गर्म होती है तथा तप्त होकर वायु फैलती है, जिससे परिवेश की शीतल वायु की तुलना में इसका घनत्व कम हो जाता है। फलस्वरूप उष्ण वायु ऊपर उठती है (वायु धाराएँ), तथा रिक्त स्थान को भरने के लिए अन्य वायु गति करती हैं (पवनें) – जिससे बड़े जलाशयों के निकट **समुद्र समीर** उत्पन्न हो जाती हैं। ठंडी वायु नीचे आती हैं तथा एक तापीय संवहन चक्र बन जाता है, जो ऊष्मा को थल से दूर स्थानांतरित कर देता है। रात्रि में थल की ऊष्मा का ह्रास अधिक शीघ्रता से होता है तथा जलीय पृष्ठ थल की तुलना में उष्ण होती है। परिणामस्वरूप चक्र उत्क्रमित हो जाता है (चित्र 10.17)।

प्राकृतिक संवहन का एक अन्य उदाहरण उत्तर पूर्व से विषुवत् वृत्त की ओर पृथ्वी पर बहने वाली स्थायी पृष्ठीय पवनें हैं, जिन्हें व्यापारिक पवनें कहते हैं। इनके बहने की यथोचित व्याख्या इस प्रकार है : पृथ्वी के विषुवतीय क्षेत्रों तथा ध्रुवीय क्षेत्रों को सूर्य की ऊष्मा समान मात्रा में प्राप्त नहीं होती। विषुवत वृत्त के समीप पृथ्वी के पृष्ठ पर वायु तप्त होती है जबकि ध्रुवों के ऊपरी वायुमण्डलीय वायु शीतल होती है। किसी अन्य कारक की अनुपस्थिति में, संवहन धाराएँ प्रवाहित होने लगेंगी जिसमें वायु विषुवतीय पृष्ठ से ऊपर उठकर ध्रुवों की ओर बहेगी, फिर नीचे की ओर जाएगी तथा बहती हुई पुनः विषुवत वृत्त की ओर जाएगी। परन्तु, पृथ्वी की घूर्णन गति इस संवहन धारा में संशोधन कर देती है जिसके कारण विषुवत वृत्त के समीप की वायु की पूर्व की ओर चाल 1600 km/h होती है जबकि ध्रुवों के समीप यह चाल शून्य होती है। परिणामस्वरूप यह वायु ध्रुवों पर नीचे की ओर न फैलकर 30°N (उत्तर) अक्षांश पर फैलती है और विषुवत वृत्त पर लौट आती है। इसे **व्यापारिक पवनें** कहते हैं।

10.9.3 विकिरण

चालन तथा संवहन को परिवहन माध्यम के रूप में किसी पदार्थ की आवश्यकता होती है। ऊष्मा स्थानांतरण की ये विधियाँ निर्वात से पृथक दो वस्तुओं के बीच क्रियाशील नहीं हो सकतीं। परन्तु विशाल दूरी होने पर भी पृथ्वी सूर्य से ऊष्मा प्राप्त कर लेती है। इसी प्रकार, हम पास की आग की उष्णता शीघ्र ही अनुभव कर लेते हैं, यद्यपि वायु अल्प चालक है तथा इतने कम समय में संवहन धाराएँ भी स्थापित नहीं हो पातीं। ऊष्मा स्थानांतरण की तीसरी विधि को किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती। इस विधि को **विकिरण** कहते हैं, तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों द्वारा इस प्रकार विकरित ऊर्जा को **विकिरण ऊर्जा** कहते हैं। किसी विद्युत चुंबकीय तरंग में वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र दिक तथा काल में दोलन करते हैं। अन्य किसी तरंग की भांति विद्युत चुंबकीय तरंगों की विभिन्न तरंगदैर्घ्य हो सकती हैं तथा वे निर्वात में समान चाल, जिसे प्रकाश की चाल कहते हैं अर्थात् $3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ से चल सकती हैं। इन तथ्यों के बारे में विस्तार से आप बाद में फिर कभी सीखेंगे, परन्तु अब आप यह जान गए हैं कि विकिरण द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण के लिए माध्यम का होना क्यों आवश्यक नहीं है तथा यह इतनी तीव्र गति से क्यों होता है। विकिरण द्वारा ही सूर्य से ऊष्मा निर्वात (शून्य अंतरिक्ष) से होकर पृथ्वी तक पहुँचती है। सभी तप्त पिण्ड चाहे वे ठोस, द्रव अथवा गैस हों, विकिरण ऊर्जा उत्सर्जित करते हैं। किसी पिण्ड द्वारा उसके ताप के कारण उत्सर्जित विद्युत चुंबकीय विकिरणों जैसे लाल तप्त लोहा से विकिरण अथवा तंतु लैम्प से प्रकाश को **ऊष्मा विकिरण** कहते हैं।

© NCERT not to be republished

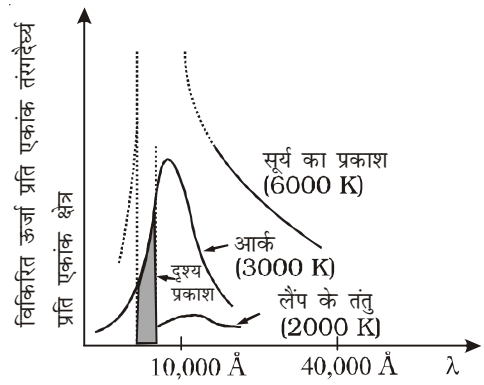
जब यह ऊष्मा विकिरण अन्य पिण्डों पर पड़ता है तो इसका आंशिक परावर्तन तथा आंशिक अवशोषण होता है। ऊष्मा का वह परिमाण जिसे कोई पिण्ड विकिरण द्वारा अवशोषित कर सकता है, उस पिण्ड के वर्ण (रंग) पर निर्भर करता है।

हम यह पाते हैं कि कृष्ण पिण्ड विकिरण ऊर्जा का अवशोषण तथा उत्सर्जन हलके वर्णों के पिण्डों की अपेक्षा अधिक करते हैं। इस तथ्य के हमारे दैनिक जीवन में अनेक अनुप्रयोग हैं। हम गर्मियों में श्वेत अथवा हलके वर्णों के वस्त्र पहनते हैं ताकि वे सूर्य की कम से कम ऊष्मा अवशोषित करें। परन्तु सर्दियों में हम गहरे वर्ण के वस्त्र पहनते हैं जो सूर्य की अधिक ऊष्मा को अवशोषित करके हमें उष्ण रखते हैं। खाना पकाने के बर्तनों की पेंदी को काला पोत दिया जाता है ताकि आग से वह अधिकतम ऊष्मा अवशोषित करके पकाई जाने वाली सब्जी को दें।

इसी प्रकार, ड्यूआर फ्लास्क अथवा थर्मस बोतल एक ऐसी युक्ति है जो बोतल की अंतर्वस्तु तथा बाहरी परिवेश के बीच ऊष्मा स्थानांतरण को निम्नतम कर देती है। यह दोहरी दीवारों का काँच का बर्तन होता है जिसकी भीतरी तथा बाहरी दीवारों पर चाँदी का लेप होता है। भीतरी दीवार से विकिरण परावर्तित होकर बोतल की अंतर्वस्तु में वापस लौट जाते हैं। इसी प्रकार बाहरी दीवार भी बाहर से आने वाले किन्हीं भी विकिरणों को वापस परावर्तित कर देती है। दीवारों के बीच के स्थान को निर्वातित करके चालन तथा संवहन द्वारा होने वाले ऊष्मा क्षय को घटाया जाता है तथा फ्लास्क को ऊष्मा रोधी जैसे कार्क पर टिकाया जाता है। इसीलिए यह युक्ति तप्त अंतर्वस्तु (जैसे दूध) को ठंडा होने से बचाने में उपयोगी है, अथवा वैकल्पिक रूप से ठंडी अंतर्वस्तुओं (जैसे हिम) का भंडारण करने में भी उपयोगी है।

10.9.4 कृष्णिका विकिरण

अब तक हमने उष्मा विकिरण के तरंगदैर्घ्य के पक्ष का उल्लेख नहीं किया है। किसी ताप पर उष्मा विकिरण के विषय में महत्त्वपूर्ण बात यह है कि विकिरण में मात्र एक ही (या कतिपय) तरंगदैर्घ्य नहीं होते हैं, बल्कि इसमें कम तरंगदैर्घ्य से लेकर अधिक तरंगदैर्घ्य के बीच उसका सतत् स्पैक्ट्रम होता है। तथापि विभिन्न तरंगदैर्घ्यों के लिए विकिरित उष्मा की ऊर्जा की मात्रा भिन्न-भिन्न होती है। चित्र 10.18 विभिन्न तापों पर किसी कृष्णिका के एकांक क्षेत्र द्वारा एकांक तरंगदैर्घ्य पर उत्सर्जित विकिरित ऊर्जा तथा तरंगदैर्घ्य के मध्य प्रायोगिक वक्र दर्शाता है।



चित्र 10.18: कृष्णिका द्वारा विभिन्न तापों पर उत्सर्जित ऊर्जा तथा तरंगदैर्घ्य के मध्य खींचे गए वक्र।

इस बात पर गौर कीजिए कि तरंगदैर्घ्य λ_m जिसके लिए विकिरित ऊर्जा सर्वाधिक है, ताप बढ़ने पर घटती है। λ_m तथा T के मध्य संबंध को **वीन-विस्थापन नियम** कहते हैं-

$$\lambda_m T = \text{नियतांक} \qquad (10.15)$$

नियतांक (वीन नियतांक) का मान 2.9×10^{-3} m K होता है। यह नियम इस बात की व्याख्या करता है कि जब लोहे के किसी टुकड़े को अग्नि में गर्म करते हैं, तो उसका रंग पहले हलका लाल, फिर रक्ताभ पीला और अंत में सफेद क्यों हो जाता है। वीन-नियम का उपयोग खगोलीय पिंडों, जैसे- चाँद, सूर्य या अन्य तारों की सतह के ताप का अनुमान लगाने में करते हैं। चंद्रमा से प्रकाश की सबसे अधिक तीव्रता 14 μm तरंगदैर्घ्य के आसपास होती है। वीन-नियम से चन्द्रमा की सतह का ताप 200 K अनुमानित किया गया है। सौर विकिरण की अधिकतम तीव्रता λ_m = 4753 Å पर होती है। इसके अनुसार T = 6060 K । याद रखिए कि यह ताप सूर्य की सतह का है न कि उसके आंतरिक (भीतरी) भाग का।

चित्र 10.18 में दर्शाए गए कृष्णिका विकिरण वक्रों से संबंधित सर्वाधिक विशिष्ट बात यह है कि ये वक्र *सार्वत्रिक* होते हैं। ये कृष्णिका के केवल ताप पर निर्भर करते हैं न कि उसके आकार, आकृति या पदार्थ पर। बीसवीं शताब्दी के प्रारंभ में कृष्णिका के विकिरण को सैद्धांतिक रूप से व्याख्या करने के लिए जो प्रयास किए गए उन्होंने भौतिकी में क्वांटम क्रांति की प्रेरणा दी। इसके विषय में आप आगे अपने पाठ्यक्रम में पढ़ेंगे।

विकिरण द्वारा ऊर्जा बिना माध्यम के (अर्थात् निर्वात में) बहुत दूरियों तक स्थानान्तरित की जा सकती है। परम ताप T पर

© NCERT not to be republished

किसी वस्तु द्वारा उत्सर्जित कुल विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा उसके आकार, उसकी उत्सर्जित करने की क्षमता (जिसे उत्सर्जकता कहते हैं) और विशेष रूप से उसके ताप के समानुपाती होती है। एक वस्तु के लिए जो पूर्ण उत्सर्जक है, प्रति इकाई समय में उत्सर्जित ऊर्जा (H) होगी–

$$H = A\sigma T^4 \qquad (10.16)$$

जहाँ A वस्तु का क्षेत्रफल है तथा T उसका परमताप है। इस सम्बन्ध को पहले स्टेफॉन ने प्रयोगों से निकाला तथा बाद में बोल्ट्समान ने सैद्धांतिक रूप से सिद्ध किया। इसे **स्टेफॉन बोल्ट्समान नियम** तथा नियतांक σ को स्टेफॉन–बोल्टसमान नियतांक कहते हैं। SI मात्रक पद्धति में इसका मान $5.67 \times 10^{-8}\,W\,m^{-2}\,K^{-4}$ होता है। अधिकतर वस्तुएँ समीकरण (A2) में दी गई उष्मा की दर का कुछ अंश ही उत्सर्जित करती हैं। दीप कज्जल जैसे पदार्थों द्वारा उत्सर्जित उष्मा की दर ही इस सीमा के करीब होती है। इस कारण 'एक' विमाहीन अंश e जिसे वस्तु की **उत्सर्जकता** कहते हैं, को परिभाषित करते हैं और समीकरण (10.16) को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं–

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad (10.17)$$

किसी आदर्श विकिरक के लिए $e = 1$ होता है। उदाहरण के तौर पर टंगस्टन लैम्प के लिए e का मान लगभग 0.4 होता है। इस तरह 0.3 cm^2 पृष्ठ क्षेत्रफल तथा 3000K ताप वाला टंगस्टन लैम्प निम्नलिखित दर से उष्मा विकिरित करेगा–

$$H = 0.3 \times 10^{-4} \times 0.4 \times 5.67 \times 10^{-8}\,(3000)^4 = 60\ W$$

T ताप वाली कोई वस्तु जिसके चारों ओर के वातावरण का ताप T_S है, ऊर्जा का अवशोषण तथा उत्सर्जन दोनों करती है। अत: किसी आदर्श विकिरक से विकिरित उष्मा के क्षय (हानि) की नेट दर निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाएगी –

$$H = \sigma A\,(T^4 - T_s^4)$$

उस वस्तु के लिए जिसकी उत्सर्जकता e है, उपरोक्त सूत्र निम्न प्रकार से रूपांतरित हो जाएगा –

$$H = e\sigma A\,(T^4 - T_s^4) \qquad (10.18)$$

उदाहरणार्थ, आइए, हम अपने शरीर से उत्सर्जित उष्मा की गणना करें। मान लीजिए किसी व्यक्ति के शरीर का पृष्ठ क्षेत्रफल लगभग 1.9 m^2 है तथा कमरे का ताप 22°C है। जैसाकि हम जानते हैं, शरीर का आंतरिक ताप 37°C होता है। माना, त्वचा का ताप 20°C है। प्रासंगिक विद्युत चुम्बकीय विकिरण क्षेत्र में त्वचा की उत्सर्जकता 'e' लगभग 0.97 है। इस उदाहरण से उष्मा हानि की दर–

$$H = 5.67 \times 10^{-8} \times 1.9 \times 0.97 \times \{(301)^4 - (295)^4\}$$
$$= 66.4\ W$$

जो विराम अवस्था में शरीर द्वारा उत्पन्न ऊर्जा की दर (120 W) के आधे से थोड़ा अधिक है। उष्मा के इस क्षय को कारगर तरीके से रोकने के लिए आधुनिक आर्कटिक कपड़े (आम कपड़ों से अच्छे) इस प्रकार बनाए जाते हैं कि शरीर की त्वचा के साथ एक अतिरिक्त पतली चमकदार धातुई परत होती है, जो शरीर के विकिरण को परावर्तित कर देती है।

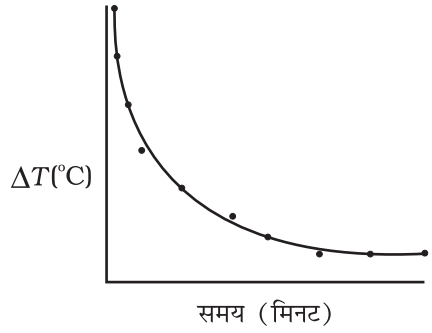
10.10 न्यूटन का शीतलन नियम

हम सभी यह जानते हैं कि तप्त जल अथवा दूध मेज पर यदि रखा छोड़ दें तो वह धीरे-धीरे शीतल होना आरंभ कर देता है। अंतत: वह परिवेश के ताप पर पहुँच जाता है। कोई दी गई वस्तु अपने परिवेश से ऊष्मा का विनिमय करके कैसे शीतल हो सकती है, इसका अध्ययन करने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 10.4

एक विडोलक सहित ऊष्मामापी में कुछ जल, मान लें 300 mL लीजिए और इसे दो छिद्र वाले ढक्कन से ढक दीजिए। ढक्कन के एक छिद्र में विडोलक तथा दूसरे छिद्र में तापमापी लगाइए तथा यह सुनिश्चित कीजिए कि तापमापी का बल्ब जल में डूब जाए। तापमापी का पाठ्यांक नोट कीजिए। यह पाठ्यांक T_1 परिवेश का ताप है। ऊष्मामापी के जल को इतना गर्म कीजिए कि इसका ताप कक्ष ताप (अर्थात् परिवेश के ताप) से लगभग 40 °C अधिक तक पहुँच जाए। तत्पश्चात् ऊष्मा स्रोत को हटाकर जल को गर्म करना बंद कीजिए। विराम घड़ी चलाइए तथा प्रत्येक नियत समय अंतराल जैसे 1 मिनट के पश्चात् विडोलक से धीरे-धीरे विडोलित करते हुए तापमापी के पाठ्यांक नोट कीजिए। जल का ताप परिवेश के ताप से लगभग 5 °C अधिक रहने तक पाठ्यांक नोट करते रहिए। मान लीजिए यह पाठ्यांक (T_2) है। तत्पश्चात् ताप $\Delta T = T_2 - T_1$ को y-अक्ष के अनुदिश लेकर इसके प्रत्येक मान के लिए तदनुरूपी t के मान को x-अक्ष के अनुदिश लेकर ग्राफ आलेखित करिए (चित्र 10.19)।

© NCERT not to be republished



चित्र 10.19 *समय के साथ तप्त जल के शीतलन को दर्शाने वाला वक्र।*

ग्राफ से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किस प्रकार तप्त जल का शीतलन उसके अपने तथा अपने परिवेश के तापों के बीच अंतर पर निर्भर करता है। आप यह भी नोट करेंगे कि आरंभ में शीतलन की दर उच्च है तथा वस्तु के ताप में कमी होने पर यह दर घट जाती है।

उपरोक्त क्रियाकलाप यह दर्शाता है कि कोई तप्त पिण्ड ऊष्मा विकिरण के रूप में अपने परिवेश को ऊष्मा खो देता है। यह ऊष्मा-क्षय की दर पिण्ड तथा उसके परिवेश के तापों के अंतर पर निर्भर करती है। न्यूटन ऐसे पहले वैज्ञानिक थे जिन्होंने किसी दिए गए अंत:क्षेत्र के भीतर रखे किसी पिण्ड द्वारा लुप्त ऊष्मा तथा उसके ताप के बीच संबंध का योजनाबद्ध अध्ययन किया।

न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार किसी पिण्ड के ऊष्मा क्षय की दर, $-\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ पिण्ड तथा उसके परिवेश के तापों के अंतर $\Delta T = (T_2 - T_1)$ के अनुक्रमानुपाती होती है। यह नियम केवल लघु तापांतर के लिए ही वैध है। विकिरण द्वारा ऊष्मा-क्षय पिण्ड के पृष्ठ की प्रकृति तथा खुले पृष्ठ के क्षेत्रफल पर भी निर्भर करता है। अत: हम लिख सकते हैं कि

$$-\frac{dQ}{dt} = k(T_2 - T_1) \qquad (10.19)$$

यहाँ k एक धनात्मक नियतांक है जो पिण्ड के पृष्ठ के क्षेत्रफल तथा उसकी प्रकृति पर निर्भर करता है। मान लीजिए m द्रव्यमान तथा विशिष्ट ऊष्मा धारिता s का कोई पिण्ड T_2 ताप पर है। मान लीजिए परिवेश का ताप T_1 है। मान लीजिए पिण्ड का ताप एक लघु समय अंतराल dt में dT_2 कम हो जाता है, तब लुप्त ऊष्मा का परिमाण

$dQ = ms\, dT_2$

$\therefore$ ऊष्मा क्षय की दर

$$\frac{dQ}{dt} = ms\frac{dT_2}{dt} \qquad (10.20)$$

समीकरणों (10.15) तथा (10.16) से हमें प्राप्त होता है

$$-ms\frac{dT_2}{dt} = k(T_2 - T_1)$$

$$\frac{dT_2}{T_2 - T_1} = -\frac{k}{ms}dt = -K\,dt \qquad (10.21)$$

यहाँ $K = k/(ms)$

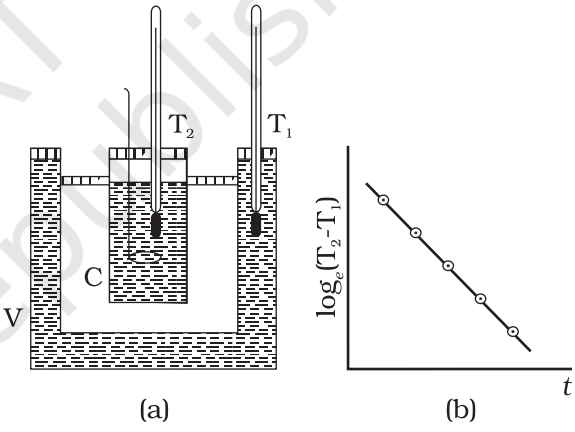
समाकलित करने पर

$$\log_e (T_2 - T_1) = -Kt + c \qquad (10.22)$$

अथवा $T_2 = T_1 + C' e^{-Kt}$; यहाँ $C' = e^c$ (10.23)

समीकरण (10.23) की सहायता से एक विशिष्ट ताप परिसर के आद्योपांत शीतलन का समय परिकलित किया जा सकता है।

लघु तापांतरों के लिए, चालन, संवहन तथा विकिरण के संयुक्त प्रभाव के कारण शीतलन की दर तापांतर के अनुक्रमानुपाती होती है। किसी विकिरक से कमरे में ऊष्मा स्थानांतरण, कमरे की दीवारों से पार होकर ऊष्मा-क्षति अथवा मेज पर प्याले में रखी चाय के शीतलन में यह एक वैध सन्निकटन है।



चित्र 10.20 *न्यूटन के शीतलन नियम का सत्यापन।*

चित्र 10.20(a) में दर्शायी गई प्रायोगिक व्यवस्था की सहायता से न्यूटन के शीतलन नियम का सत्यापन किया जा सकता है। इसमें दोहरी दीवारों वाला एक बर्तन (V) जिसकी दीवारों के बीच जल भरा होता है, लिया जाता है। इस दोहरी दीवारों वाले बर्तन में तप्त जल से भरा ताँबे का ऊष्मामापी (C) रखते हैं। इसमें दो तापमापियों का उपयोग किया जाता है, जिसमें तापमापी T_1 के द्वारा दोहरी दीवारों के बीच भरे उष्ण जल का ताप, तथा तापमापी T_2 के द्वारा ऊष्मामापी में भरे जल का ताप मापते हैं। ऊष्मामापी के तप्त जल का ताप एक नियमित अंतराल के पश्चात् मापा जाता है। समय t तथा $\log_e (T_2 - T_1)$ [या $\ln (T_2 - T_1)$] के बीच ग्राफ आलेखित किया जाता है जिसकी प्रकृति चित्र 10.19(b) में दर्शाए अनुसार ऋणात्मक प्रवणता की एक सरल रेखा होती है। यह समीकरण 10.22 की पुष्टि करती है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 10.8 किसी बर्तन में भरे तप्त भोजन का ताप 2 मिनट में 94 °C से 86 °C हो जाता है जबकि कक्ष-ताप 20 °C है। 71 °C से 69 °C तक ताप के गिरने में कितना समय लगेगा?

हल : 94 °C तथा 86 °C का माध्य 90 °C है जो कक्ष-ताप से 70 °C अधिक है। इन अवस्थाओं में बर्तन का ताप 2 मिनट में 8 °C घट जाता है।

अत:, समीकरण (10.21) से,

$$\frac{\text{तापांतर}}{\text{समय}} = K\Delta T$$

$$\frac{8°C}{2 \text{ मिनट}} = K(70°C)$$

69 °C तथा 71°C का माध्य 70 °C है, जो कक्ष-ताप से 50 °C अधिक है। इस अवस्था में K मूल अवस्था के समान है, अत:

$$\frac{2°C}{\text{समय}} = K(50°C)$$

दोनों समीकरणों को विभाजित करने पर

$$\frac{8°C/2 \text{ मिनट}}{2°C/\text{समय}} = \frac{K(70°C)}{K(50°C)}$$

समय = 0.7 min. = 42 s

सारांश

1. ऊष्मा ऊर्जा का एक रूप है जो किसी पिण्ड तथा उसके परिवर्ती माध्यम के बीच उनमें तापांतर के कारण प्रवाहित होती है। किसी पिण्ड की तप्तता की कोटि मात्रात्मक रूप में ताप द्वारा निरूपित होती है।
2. किसी ताप मापन युक्ति (तापमापी) में मापन योग्य किसी ऐसे गुण (जिसे तापमापीय गुण कहते हैं) का उपयोग किया जाता है, जिसमें ताप के साथ परिवर्तन होता है। विभिन्न तापमापी में भिन्न-भिन्न ताप मापक्रम बनते हैं। कोई ताप मापक्रम बनाने के लिए दो नियत बिंदुओं का चयन किया जाता है तथा उन्हें कुछ यादृच्छिक ताप मान दिए जाते हैं। ये दो संख्याएँ मापक्रम के मूल बिंदु तथा उसके मात्रक की आमाप को निश्चित करती हैं।
3. सेल्सियस ताप (t_C) तथा फारेनहाइट ताप (t_F) में यह संबंध होता है : $t_F = (9/5)\, t_C + 32$
4. दाब (P), आयतन (V) तथा परम ताप (T) में संबंध दर्शाने वाली आदर्श गैस समीकरण इस प्रकार व्यक्त की जाती है:

$$PV = \mu RT$$

यहाँ μ मोल की संख्या तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है।

5. परम ताप मापक्रम में, मापक्रम का शून्य, ताप के परम शून्य को व्यक्त करता है। यह वह ताप है जिस पर प्रत्येक पदार्थ में न्यूनतम संभावित आण्विक सक्रियता होती है। केल्विन परम ताप मापक्रम (T) के मात्रक का आकार सेल्सियस ताप मापक्रम (t_c) के मात्रक के आकार के बराबर होता है परन्तु इनके मूल बिंदुओं में अंतर होता है:

$$t_C = T - 273.15$$

6. रैखिक प्रसार गुणांक (α_l) तथा आयतन प्रसार गुणांक (α_v) को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha_V \Delta T$$

यहाँ Δl तथा ΔV ताप में ΔT का परिवर्तन होने पर क्रमश: लंबाई l तथा आयतन V में परिवर्तन को निर्दिष्ट करते हैं। इनमें निम्नलिखित संबंध है:

$$\alpha_v = 3\, \alpha_l$$

© NCERT not to be republished

7. किसी पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ m पदार्थ का द्रव्यमान तथा ΔQ पदार्थ के ताप में ΔT का परिवर्तन करने के लिए आवश्यक ऊर्जा की मात्रा है। किसी पदार्थ की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ μ पदार्थ के मोल की संख्या है।

8. संगलन की गुप्त ऊष्मा (L_f) ऊष्मा की वह मात्रा है जो किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान को समान ताप तथा दाब पर ठोस अवस्था से द्रव अवस्था में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक होती है। वाष्पन की गुप्त ऊष्मा (L_v) ऊष्मा की वह मात्रा है जो किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान को ताप व दाब में बिना कोई परिवर्तन किए द्रव अवस्था से वाष्प अवस्था में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक होती है।

9. ऊष्मा-स्थानांतरण की तीन विधियाँ हैं - चालन, संवहन तथा विकिरण।

10. चालन में किसी पिण्ड के आस-पास के भागों के बीच ऊष्मा का स्थानांतरण आण्विक संघट्टनों द्वारा संपन्न होता है परन्तु इसमें द्रव्य का प्रवाह नहीं होता। किसी L लंबाई तथा A अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की छड़, जिसके दोनों सिरों के तापों को T_C तथा T_D पर स्थापित किया गया है, द्वारा प्रवाहित ऊष्मा की दर

$$H = K\ A\frac{T_C - T_D}{L}$$

यहाँ K छड़ के पदार्थ की ऊष्मा चालकता है।

11. न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार किसी पिण्ड के शीतलन की दर परिवेश के ऊपर वस्तु के ताप-आधिक्य के अनुक्रमानुपाती होती है

$$\frac{dQ}{dt} = -k\,(T_2 - T_1)$$

यहाँ T_1 परिवेशी माध्यम का ताप तथा T_2 पिण्ड का ताप है।

राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
पदार्थ की मात्रा	μ	(मोल)	मोल (mol)	
सेल्सियस ताप	t_c	[K]	°C	
केल्विन परम ताप	T	[K]	K	$t_c = T - 273.15$
रैखिक प्रसार गुणांक	α_l	$[K^{-1}]$	K^{-1}	
आयतन प्रसार गुणांक	α_v	$[K^{-1}]$	K^{-1}	$\alpha_v = 3\alpha_l$
किसी निकाय को आपूर्त ऊष्मा	ΔQ	$[ML^2\ T^{-2}]$	J	Q अवस्था चर नहीं है
विशिष्ट ऊष्मा धारिता	s	$[L^2\ T^{-2}K^{-1}]$	J kg^{-1} K^{-1}	
ऊष्मा चालकता	K	$[MLT^{-3}\ K^{-1}]$	J s^{-1} $m^{-1}K^{-1}$	$H = -KA\frac{dT}{dx}$

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

1. केल्विन ताप (T) तथा सेल्सियस ताप t_c को जोड़ने वाला संबंध इस प्रकार है:

$$T = t_c + 273.15$$

तथा जल के त्रिक बिंदु के लिए (चयन द्वारा) $T = 273.16$ K का निर्धारण यथार्थ संबंध है। इस चयन के साथ सेल्सियस मापक्रम पर हिम का गलनांक तथा जल का क्वथनांक (दोनों 1 atm दाब पर) क्रमशः 0 °C तथा 100 °C के अत्यधिक निकट हैं परन्तु यथार्थ रूप से इनके बराबर नहीं हैं। मूल सेल्सियस ताप मापक्रम में पिछले नियत बिंदु (चयन द्वारा) तथ्यतः 0 °C तथा 100 °C थे, परन्तु अब नियत बिंदुओं के चयन के लिए जल के त्रिक बिंदु को अच्छा माना जाता है क्योंकि इसका ताप अद्वितीय है।

2. जब कोई द्रव वाष्प के साथ साम्य में होता है तो समस्त निकाय का दाब तथा ताप समान होता है तथा साम्यावस्था में दोनों प्रावस्थाओं के मोलर आयतनों में अंतर (घनत्वों में अंतर) होता है। यह सभी निकायों पर लागू होता है चाहे उसमें कितनी भी प्रावस्थाएँ साम्य में हों।

3. ऊष्मा स्थानांतरण में सदैव दो निकायों अथवा एक ही निकाय के दो भागों के बीच तापांतर सम्मिलित होता है। ऐसा ऊर्जा स्थानांतरण जिसमें किसी भी रूप में तापांतर सम्मिलित नहीं होता, वह ऊष्मा नहीं है।

4. संवहन में किसी तरल के भीतर उसके भागों में असमान ताप होने के कारण द्रव्य का प्रवाह सम्मिलित होता है। किसी टोंटी से गिरते जल के नीचे रखी किसी तप्त छड़ की ऊष्मा का क्षय छड़ के पृष्ठ तथा जल के बीच चालन के कारण होता है जल के भीतर संवहन द्वारा नहीं होता।

अभ्यास

10.1 निऑन तथा CO_2 के त्रिक बिंदु क्रमशः 24.57 K तथा 216.55 K हैं। इन तापों को सेल्सियस तथा फारेनहाइट मापक्रमों में व्यक्त कीजिए।

10.2 दो परम ताप मापक्रमों A तथा B पर जल के त्रिक बिंदु को 200 A तथा 350 B द्वारा परिभाषित किया गया है। T_A तथा T_B में क्या संबंध है?

10.3 किसी तापमापी का ओम में विद्युत प्रतिरोध ताप के साथ निम्नलिखित सन्निकट नियम के अनुसार परिवर्तित होता है

$$R = R_o [1 + \alpha (T - T_o)]$$

यदि तापमापी का जल के त्रिक बिंदु 273.16 K पर प्रतिरोध 101.6 Ω तथा लैड के सामान्य संगलन बिंदु (600.5 K) पर प्रतिरोध 165.5 Ω है तो वह ताप ज्ञात कीजिए जिस पर तापमापी का प्रतिरोध 123.4 Ω है।

10.4 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए:

(a) आधुनिक तापमिति में जल का त्रिक बिंदु एक मानक नियत बिंदु है, क्यों? हिम के गलनांक तथा जल के क्वथनांक को मानक नियत बिंदु मानने में (जैसा कि मूल सेल्सियस मापक्रम में किया गया था।) क्या दोष है?

(b) जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है कि मूल सेल्सियस मापक्रम में दो नियत बिंदु थे जिनको क्रमशः 0 °C तथा 100 °C संख्याएँ निर्धारित की गई थीं। परम ताप मापक्रम पर दो में से एक नियत बिंदु जल का त्रिक बिंदु लिया गया है जिसे केल्विन परम ताप मापक्रम पर संख्या 273.16 K निर्धारित की गई है। इस मापक्रम (केल्विन परम ताप) पर अन्य नियत बिंदु क्या है?

© NCERT not to be republished

(c) परम ताप (केल्विन मापक्रम) T तथा सेल्सियस मापक्रम पर ताप t_c में संबंध इस प्रकार है:

$$t_c = T - 273.15$$

इस संबंध में हमने 273.15 लिखा है 273.16 क्यों नहीं लिखा?

(d) उस परम ताप मापक्रम पर, जिसके एकांक अंतराल का आमाप फारेनहाइट के एकांक अंतराल की आमाप के बराबर है, जल के त्रिक बिंदु का ताप क्या होगा?

10.5 दो आदर्श गैस तापमापियों A तथा B में क्रमशः ऑक्सीजन तथा हाइड्रोजन प्रयोग की गई है। इनके प्रेक्षण निम्नलिखित है :

ताप	दाब तापमापी A में	दाब तापमापी B में
जल का त्रिक बिंदु	1.250×10^5 Pa	0.200×10^5 Pa
सल्फर का सामान्य गलनांक	1.797×10^5 Pa	0.287×10^5 Pa

(a) तापमापियों A तथा B के द्वारा लिए गए पाठ्यांकों के अनुसार सल्फर के सामान्य गलनांक के परमताप क्या हैं?

(b) आपके विचार से तापमापियों A तथा B के उत्तरों में थोड़ा अंतर होने का क्या कारण है? (दोनों तापमापियों में कोई दोष नहीं है)। दो पाठ्यांकों के बीच की विसंगति को कम करने के लिए इस प्रयोग में और क्या प्रावधान आवश्यक हैं?

10.6 किसी 1m लंबे स्टील के फीते का यथार्थ अंशांकन 27.0 °C पर किया गया है। किसी तप्त दिन जब ताप 45°C था तब इस फीते से किसी स्टील की छड़ की लंबाई 63.0 cm मापी गई। उस दिन स्टील की छड़ की वास्तविक लंबाई क्या थी? जिस दिन ताप 27.0 °C होगा उस दिन इसी छड़ की लंबाई क्या होगी? स्टील का रेखीय प्रसार गुणांक = $1.20 \times 10^{-5}\ K^{-1}$।

10.7 किसी बड़े स्टील के पहिए को उसी पदार्थ की किसी धुरी पर ठीक बैठाना है। 27°C पर धुरी का बाहरी व्यास 8.70 cm तथा पहिए के केंद्रीय छिद्र का व्यास 8.69 cm है। सूखी बर्फ द्वारा धुरी को ठंडा किया गया है। धुरी के किस ताप पर पहिया धुरी पर चढ़ेगा? यह मानिए कि आवश्यक ताप परिसर में स्टील का रैखिक प्रसार गुणांक नियत रहता है: $\alpha_{\text{स्टील}} = 1.20 \times 10^{-5} K^{-1}$।

10.8 ताँबे की चादर में एक छिद्र किया गया है। 27.0 °C पर छिद्र का व्यास 4.24 cm है। इस धातु की चादर को 227 °C तक तप्त करने पर छिद्र के व्यास में क्या परिवर्तन होगा? ताँबे का रेखीय प्रसार गुणांक = $1.70 \times 10^{-5}\ K^{-1}$।

10.9 27°C पर 1.8 cm लंबे किसी ताँबे के तार को दो दृढ़ टेकों के बीच अल्प तनाव रखकर थोड़ा कसा गया है। यदि तार को –39 °C ताप तक शीतित करें तो तार में कितना तनाव उत्पन्न हो जाएगा? तार का व्यास 2.0 mm है। पीतल का रेखीय प्रसार गुणांक = $2.0 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, पीतल का यंग प्रत्यास्थता गुणांक = 0.91×10^{11} Pa।

10.10 50 cm लंबी तथा 3.0 mm व्यास की किसी पीतल की छड़ को उसी लंबाई तथा व्यास की किसी स्टील की छड़ से जोड़ा गया है। यदि ये मूल लंबाइयाँ 40°C पर हैं, तो 250 °C पर संयुक्त छड़ की लंबाई में क्या परिवर्तन होगा? क्या संधि पर कोई तापीय प्रतिबल उत्पन्न होगा? छड़ के सिरों को प्रसार के लिए मुक्त रखा गया है। (ताँबे तथा स्टील के रेखीय प्रसार गुणांक क्रमशः = $2.0 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, स्टील = $1.2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$ हैं।)

10.11 ग्लिसरीन का आयतन प्रसार गुणांक $49 \times 10^{-5}\ K^{-1}$ है। ताप में 30 °C की वृद्धि होने पर इसके घनत्व में क्या आंशिक परिवर्तन होगा?

© NCERT not to be republished

10.12 8.0 kg द्रव्यमान के किसी ऐलुमिनियम के छोटे ब्लॉक में छिद्र करने के लिए किसी 10 kW की बरमी का उपयोग किया गया है। 2.5 मिनट में ब्लॉक के ताप में कितनी वृद्धि हो जाएगी। यह मानिए कि 50% शक्ति तो स्वयं बरमी को गर्म करने में खर्च हो जाती है अथवा परिवेश में लुप्त हो जाती है। ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 0.91 J g^{-1} K^{-1} है।

10.13 2.5 kg द्रव्यमान के ताँबे के गुटके को किसी भट्ठी में 500 °C तक तप्त करने के पश्चात् किसी बड़े हिम-ब्लॉक पर रख दिया जाता है। गलित हो सकने वाली हिम की अधिकतम मात्रा क्या है? ताँबे की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 0.39 J g^{-1} K^{-1}; बर्फ की संगलन ऊष्मा = 335 J g^{-1} ।

10.14 किसी धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के प्रयोग में 0.20 kg के धातु के गुटके को 150 °C पर तप्त करके, किसी ताँबे के ऊष्मामापी (जल तुल्यांक = 0.025 kg), जिसमें 27 °C का 150 cm^3 जल भरा है, में गिराया जाता है। अंतिम ताप 40 °C है। धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता परिकलित कीजिए। यदि परिवेश में क्षय ऊष्मा उपेक्षणीय न मानकर परिकलन किया जाता है, तब क्या आपका उत्तर धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के वास्तविक मान से अधिक मान दर्शाएगा अथवा कम?

10.15 कुछ सामान्य गैसों के कक्ष ताप पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के प्रेक्षण नीचे दिए गए हैं:

गैस	**मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता (C_v)** (cal mol^{-1} K^{-1})
हाइड्रोजन	4.87
नाइट्रोजन	4.97
ऑक्सीजन	5.02
नाइट्रिक ऑक्साइड	4.99
कार्बन मोनोक्साइड	5.01
क्लोरीन	6.17

इन गैसों की मापी गई मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ एक परमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं से सुस्पष्ट रूप से भिन्न हैं। प्रतीकात्मक रूप में किसी एक परमाणुक गैस की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता 2.92 cal/mol K होती है। इस अंतर का स्पष्टीकरण कीजिए। क्लोरीन के लिए कुछ अधिक मान (शेष की अपेक्षा) होने से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

10.16 101°F ताप ज्वर से पीड़ित किसी बच्चे को एन्टीपायरिन (ज्वर कम करने की दवा) दी गई जिसके कारण उसके शरीर से पसीने के वाष्पन की दर में वृद्धि हो गई। यदि 20 मिनट में ज्वर 98 °F तक गिर जाता है तो दवा द्वारा होने वाले अतिरिक्त वाष्पन की औसत दर क्या है? यह मानिए कि ऊष्मा ह्रास का एकमात्र उपाय वाष्पन ही है। बच्चे का द्रव्यमान 30 kg है। मानव शरीर की विशिष्ट ऊष्मा धारिता जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के लगभग बराबर है तथा उस ताप पर जल के वाष्पन की गुप्त ऊष्मा 580 cal g^{-1} है।

10.17 थर्मोकोल का बना 'हिम बॉक्स' विशेषकर गर्मियों में कम मात्रा के पके भोजन के भंडारण का सस्ता तथा दक्ष साधन है। 30 cm भुजा के किसी हिम बॉक्स की मोटाई 5.0 cm है। यदि इस बॉक्स में 4.0 kg हिम रखा है तो 6 h के पश्चात् बचे हिम की मात्रा का आकलन कीजिए। बाहरी ताप 45 °C है तथा थर्मोकोल की ऊष्मा चालकता 0.01 J s^{-1} m^{-1} K^{-1} है। (हिम की संगलन ऊष्मा = 335×10^3 J kg^{-1})

10.18 किसी पीतल के बॉयलर की पेंदी का क्षेत्रफल 0.15 m^2 तथा मोटाई 1.0 cm है। किसी गैस स्टोव पर रखने पर इसमें 6.0 kg/min की दर से जल उबलता है। बॉयलर के संपर्क की ज्वाला के भाग का ताप आकलित कीजिए। पीतल की ऊष्मा चालकता = 109 J s^{-1} m^{-1} K^{-1}; जल की वाष्पन ऊष्मा = 2256×10^3 J kg^{-1} है।

© NCERT not to be republished

10.19 स्पष्ट कीजिए कि क्यों –

(a) अधिक परावर्तकता वाले पिण्ड अल्प उत्सर्जक होते हैं।

(b) कंपकंपी वाले दिन लकड़ी की ट्रे की अपेक्षा पीतल का गिलास कहीं अधिक शीतल प्रतीत होता है।

(c) कोई प्रकाशिक उत्तापमापी (उच्च तापों को मापने की युक्ति), जिसका अंशांकन किसी आदर्श कृष्णिका के विकिरणों के लिए किया गया है, खुले में रखे किसी लाल तप्त लोहे के टुकड़े का ताप काफी कम मापता है, परन्तु जब उसी लोहे के टुकड़े को भट्ठी में रखते हैं, तो वह ताप का सही मान मापता है।

(d) बिना वातावरण के पृथ्वी अशरणीय शीतल हो जाएगी।

(e) भाप के परिचालन पर आधारित तापन निकाय तप्त जल के परिचालन पर आधारित निकायों की अपेक्षा भवनों को उष्ण बनाने में अधिक दक्ष होते हैं।

10.20 किसी पिण्ड का ताप 5 मिनट में 80 °C से 50 °C हो जाता है। यदि परिवेश का ताप 20°C है, तो उस समय का परिकलन कीजिए जिसमें उसका ताप 60 °C से 30 °C हो जाएगा।

© NCERT not to be republished

अध्याय 11

11089CH12

ऊष्मागतिकी

11.1 भूमिका
11.2 तापीय साम्य
11.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम
11.4 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य
11.5 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम
11.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता
11.7 ऊष्मागतिकीय अवस्था चर तथा अवस्था का समीकरण
11.8 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम
11.9 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम
11.10 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम
11.10 कार्नो इंजन

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

11.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने द्रव्यों के तापीय गुणों का अध्ययन किया। इस अध्याय में हम उन नियमों का अध्ययन करेंगे जो ऊष्मीय ऊर्जा को निर्धारित करते हैं। हम उन प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे जिनमें कार्य ऊष्मा में परिवर्तित होता है, तथा विलोमत: ऊष्मा भी कार्य में परिवर्तित होती है । शीत ऋतु में जब हम हथेलियों को परस्पर रगड़ते हैं तो हमें गरमी की अनुभूति होती है क्योंकि इस प्रक्रिया में किया गया कार्य ऊष्मा उत्पन्न करता है । इसके विपरीत, भाप इंजन में वाष्प की ऊष्मा का उपयोग लाभप्रद कार्य को संपन्न करने में अर्थात् पिस्टन को गति देने में होता है जिसके परिणामस्वरूप रेलगाड़ी के पहिए घूमते हैं।

भौतिकी में ऊष्मा, ताप, कार्य आदि की अवधारणाओं को अधिक सावधानीपूर्वक परिभाषित करने की आवश्यकता पड़ती है । ऐतिहासिक रूप से ऊष्मा की सटीक अवधारणा तक पहुँचने के लिए पर्याप्त समय लगा । आधुनिक अवधारणा के पूर्व ऊष्मा को ऐसे सूक्ष्म अदृश्य तरल के रूप में समझा गया जो किसी पदार्थ के रंध्रों में भरा रहता है । गरम व ठंडे पिंडों के पारस्परिक संपर्क में आने पर यह तरल (जिसे कैलॉरिक कहते थे) ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में बहने लगता है ! यह बिलकुल वैसा ही है जैसा उस समय होता है जब भिन्न-भिन्न ऊँचाइयों तक पानी से भरी दो टंकियों को एक क्षैतिज नल से जोड़ दिया जाता है । जल का बहाव उस समय तक निरंतर बना रहता है जब तक दोनों टंकियों में जल के तल समान न हो जाएँ। इसी के समान ऊष्मा की 'कैलॉरिक' धारणा में ऊष्मा उस समय तक प्रवाहित होती रहती है जब तक कि 'कैलॉरिक तल' (अर्थात् ताप) समान नहीं हो जाते ।

इसी बीच, ऊष्मा को ऊर्जा के रूप में कल्पित करने की आधुनिक अवधारणा के कारण इसके (ऊष्मा के) तरल स्वरूप को नकार दिया गया । इस संबंध में 1798 में बेंजामिन थॉमसन (जिन्हें काउन्ट रम्फोर्ड भी कहते हैं) ने एक महत्वपूर्ण प्रयोग भी किया । इन्होंने पाया कि पीतल की तोप में छेद करते समय इतनी अधिक ऊष्मा उत्पन्न होती है कि उससे पानी उबल सकता है । इससे अधिक महत्वपूर्ण तथ्य यह प्राप्त हुआ कि प्रयोग में उत्पन्न ऊष्मा का परिमाण उस कार्य पर निर्भर करता था जो घोड़े ड्रिल को घुमाने में करते थे न कि ड्रिल के पैनेपन पर । कैलॉरिक स्वरूप के अनुसार अधिक पैनी ड्रिल को रंध्रों से अधिक ऊष्मा तरल बाहर निकालना चाहिए, किंतु प्रयोग में यह सही नहीं पाया गया । प्रेक्षणों की सबसे अधिक स्वाभाविक व्याख्या यह थी कि ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है तथा प्रयोग से भी यह प्रमाणित हो गया कि ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में अर्थात् कार्य से ऊष्मा में रूपांतारित हो जाती है ।

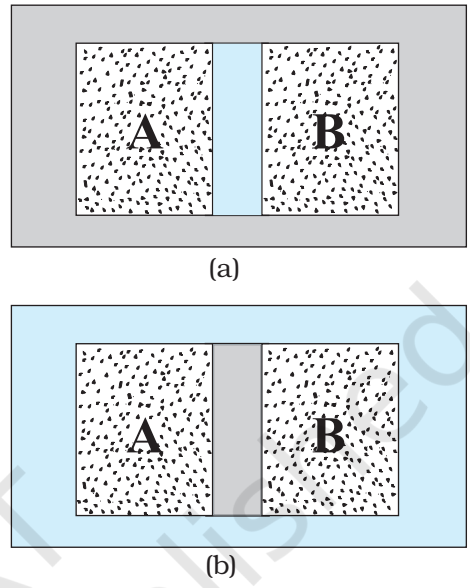
© NCERT not to be republished

ऊष्मागतिकी भौतिकी की वह शाखा है जो ऊष्मा तथा ताप की अवधारणा एवं ऊष्मा के अन्य प्रकार की ऊर्जाओं में अंतरा-रूपान्तरण का विवेचन करती है । ऊष्मागतिकी एक स्थूल विज्ञान है, क्योंकि यह किसी निकाय की स्थूल प्रकृति पर विचार करती है न कि द्रव्य की आण्विक संरचना पर । वास्तव में, इससे संबंधित अवधारणाओं तथा नियमों का प्रतिपादन 19वीं शताब्दी में उस समय हुआ था जब द्रव्य के आण्विक स्वरूप को दृढ़तापूर्वक प्रमाणित नहीं किया गया था । ऊष्मागतिकी के वर्णन में निकाय के अपेक्षाकृत कुछ ही स्थूल चर समाहित होते हैं जो सामान्य अनुभव पर आधारित हैं तथा जिन्हें प्रत्यक्ष रूप में मापा जा सकता है । उदाहरणार्थ, किसी गैस के सूक्ष्म वर्णन में उसकी रचना करने वाले अगणित अणुओं के निर्देशांकों एवं वेगों का निर्धारण आवश्यक होता है । हालांकि गैसों के अणुगति सिद्धांत का विवरण बहुत विस्तृत नहीं है फिर भी इसमें अणुओं के वेगों का विवरण समाहित है । इसके विपरीत किसी गैस के ऊष्मागतिकीय विवरण में आण्विक वर्णन पूर्ण रूप से नकार दिया जाता है । ऊष्मागतिकी में किसी गैस की अवस्था दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान तथा संगठन जैसे ऐसे स्थूल चरों द्वारा निर्धारित होती है जिन्हें हम अपनी इंद्रियों से अनुभव करते हैं और माप सकते हैं*।

यांत्रिकी एवं ऊष्मागतिकी के बीच भेद आपके मस्तिष्क में भलीभांति आ जाना चाहिए । यांत्रिकी में हमारी रुचि बलों तथा बल आघूर्णों के प्रभाव में गति कर रहे कणों एवं पिण्डों में होती है । ऊष्मागतिकी में संपूर्ण निकाय की गति पर विचार नहीं किया जाता । इसकी रुचि पिण्ड की आंतरिक स्थूल अवस्था में होती है । जब बंदूक से गोली दागते हैं तब जो परिवर्तन होता है वह गोली की यांत्रिक अवस्था (विशेषकर गतिज ऊर्जा) में परिवर्तन होता है, उसके ताप में नहीं । जब गोली लकड़ी में धँसकर रुक जाती है तो गोली की गतिज ऊर्जा ऊष्मा में रूपांतरित हो जाती है जिससे गोली तथा उसके चारों ओर की लकड़ी की सतहों का ताप परिवर्तित हो जाता है । ताप गोली की आंतरिक गति (जो अव्यवस्थित है) की ऊर्जा से संबंधित होता है न कि गोली की संपूर्ण गति से ।

11.2 तापीय साम्य

यांत्रिकी में साम्यावस्था से तात्पर्य है कि निकाय पर नेट बाह्य बल व बल आघूर्ण शून्य हैं । ऊष्मागतिकी में साम्यावस्था का अर्थ भिन्न संदर्भ में दृष्टिगोचर होता है : निकाय की अवस्था को हम उस समय साम्यावस्था में कहते हैं जब निकाय को अभिलक्षणित करने वाले स्थूल चर समय के साथ परिवर्तित नहीं होते । उदाहरणार्थ, किसी पर्यावरण से पूर्णतः ऊष्मारोधी बंद दृढ़ पात्र में भरी कोई गैस ऊष्मागतिक रूप से तब साम्यावस्था में होगी जब उसके दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान के परिमाण तथा संगठन समय के साथ परिवर्तित न हों ।



चित्र 11.1 (a) (दो गैसों के) निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं : इस दीवार से ऊष्मा आर-पार नहीं जा पाती । (b) यही निकाय A व B एक ऊष्मा-पार्थ दीवार से पृथक् दर्शाए गए हैं । यह एक चालक दीवार होती है जिससे ऊष्मा एक निकाय से दूसरे में चली जाती है । इस उदाहरण में तापीय साम्य यथोचित समय में प्राप्त हो जाता है ।

कोई निकाय साम्यावस्था में है कि नहीं व्यापक रूप में यह चारों ओर के परिवेश तथा उस दीवार की प्रकृति पर निर्भर करता है जो निकाय को परिवेश से पृथक् करती है । कल्पना कीजिए कि दो गैसें A व B दो भिन्न-भिन्न पात्रों में भरी हैं । प्रयोग द्वारा हमें पता है कि किसी गैस के दिए हुए द्रव्यमान के दाब व ताप को उसके दो स्वतंत्र चरों के रूप में चुना जा सकता है । मान लीजिए कि गैसों के दाब व आयतन क्रमशः (P_A, V_A) तथा (P_B, V_B) हैं । कल्पना कीजिए कि पहले दोनों निकाय पास-पास हैं परंतु उन्हें किसी रुद्धोष्म दीवार (एक **ऊष्मारोधी दीवार**) द्वारा एक दूसरे से पृथक् रखा गया है । इस दीवार के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) एक पात्र से दूसरे पात्र में नहीं जा पाती है । निकायों को भी शेष परिवेश से इसी प्रकार की रुद्धोष्म दीवार से पृथक् रखते हैं । इस व्यवस्था का आरेखीय चित्रण [11.1(a)] में दिया गया है । यहाँ यह पाया गया है कि (P_A, V_A) के किसी

* ऊष्मागतिकी में अन्य ऐसे चर भी निहित होते हैं जो हमारी इंद्रियों को इतने सुस्पष्ट नहीं होते (उदाहरणार्थ, एंट्रॉपी, एंथाल्पी (संपूर्ण ऊष्मा), आदि जिनके विषय में आप उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे), किंतु ये सभी स्थूल चर हैं । यद्यपि किसी उष्मागतिकीय अवस्था को पाँच अवस्था चरों, जैसे दाब, आयतन, ताप, आंतरिक ऊर्जा और एंट्रॉपी के रूप में निरूपित किया जाता है । किसी निकाय की एंट्रॉपी उसकी अव्यवस्था का माप होता है ।

© NCERT not to be republished

भी संभावित युग्म का मान (P_B, V_B) के किसी भी संभव युग्म के मान के साथ साम्यावस्था में होगा। पुनः कल्पना कीजिए कि **रुद्धोष्म दीवार** को एक **ऊष्मा-पार्थ-दीवार** से प्रतिस्थापित कर दिया गया है - यह दीवार (ऊष्मा) ऊर्जा को एक निकाय से दूसरे निकाय में जाने देती है। ऐसा करने में यह देखा गया है कि निकायों A व B के स्थूल चर स्वतः उस समय तक परिवर्तित होते हैं जब तक कि दोनों निकाय साम्यावस्था की स्थिति प्राप्त नहीं कर लेते। इसके पश्चात् उनकी अवस्था में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इस स्थिति को चित्र [11.1(b)] में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि दोनों गैसों के दाब व आयतन संबंधी चर परिवर्तित होकर क्रमशः (P'_A, V'_A) तथा (P'_B, V'_B) हो जाते हैं ताकि A व B की नयी अवस्थाएँ पुनः एक-दूसरे की साम्यावस्था में हो जाती हैं**। एक निकाय से दूसरे निकाय में अब और ऊर्जा का प्रवाह नहीं होता। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि निकाय A, निकाय B के साथ तापीय साम्य में है।

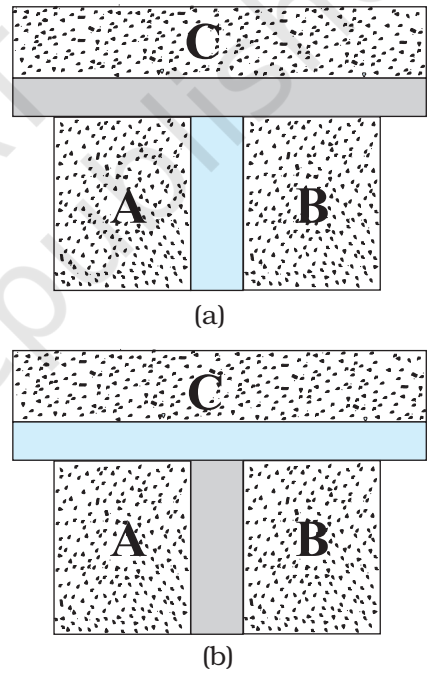
दो निकायों के मध्य की साम्यावस्था की स्थिति को क्या अभिलक्षित करती है ? आप अपने अनुभव से उत्तर का अनुमान लगा सकते हैं। तापीय साम्य में, दो निकायों के ताप समान होते हैं। हम जानेंगे कि ऊष्मागतिकी में ताप की अवधारणा तक कैसे पहुँचते हैं ? ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि का नियम इसकी ओर संकेत करता है।

11.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम

कल्पना कीजिए कि दो निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं। इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में हैं [चित्र 11.2(a)]। निकायों की अवस्थाएँ (अर्थात् उनके स्थूल चर) तब तक परिवर्तित होंगी जब तक A व B दोनों निकाय C के साथ तापीय साम्य में नहीं आ जाते हैं। जब ऐसा हो जाए तो कल्पना कीजिए कि A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार एक सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित कर दी जाती है तथा C को A व B से किसी रुद्धोष्म दीवार से पृथक् कर दिया जाता है [चित्र 11.2(b)]। ऐसा देखा जाता है कि A व B की अवस्थाएँ अब और नहीं बदलतीं अर्थात् वे **दोनों अब तापीय साम्य में होती हैं**। यह प्रेक्षण ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम का आधार बना। यह नियम बतलाता है कि ***यदि दो निकाय किसी तीसरे निकाय के साथ पृथक्-पृथक् रूप से तापीय साम्य में हैं तो वे परस्पर भी तापीय साम्य में होते हैं।*** यहाँ यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि ऊष्मागतिकी के प्रथम व द्वितीय नियम की अभिव्यक्ति तथा उनके क्रमांकन के बहुत समय बाद 1931 में आर.एच. फाउलर ने शून्य कोटि नियम का प्रतिपादन किया था।

शून्य कोटि नियम से यह संकेत मिलता है कि जब दो निकाय A व B परस्पर तापीय साम्य में होते हैं, तो ऐसी कोई भौतिक राशि है जो दोनों निकायों के लिए समान मान रखती है। यह ऊष्मागतिक चर, जिसका मान तापीय साम्य वाले निकायों के लिए समान होता है, ताप (T) कहलाता है। अतः यदि A व B साम्यावस्था में तीसरे निकाय C से पृथक् हैं तो $T_A = T_C$ तथा $T_B = T_C$। इसका तात्पर्य यह है कि $T_A = T_B$ अर्थात् निकाय A व B स्वयं भी तापीय साम्य में हैं।

शून्य कोटि नियम के माध्यम से हमने विधिवत ताप की अवधारणा विकसित की है। हमारे सामने पुनः एक प्रश्न उत्पन्न होता है : भिन्न-भिन्न पिंडों के ताप के लिए हम अंकिक मानों का निर्धारण कैसे करें? दूसरे शब्दों में, हम ताप मापक्रम कैसे बनाएँ? तापमिति इस मौलिक प्रश्न से संबंध रखती है जिसके विषय में हम अगले अनुभाग में अध्ययन करेंगे।



चित्र 11.2 (a) निकाय A व B जो एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक हैं जबकि इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में है। (b) A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार को किसी सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित किया गया है जबकि C को A व B से रुद्धोष्म दीवार से पृथक दर्शाया गया है।

** यह आवश्यक नहीं है कि दोनों चर बदलें। ऐसा प्रतिबंधों पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, यदि गैस स्थिर आयतन वाले पात्र में भरी हो तो तापीय साम्य के लिए केवल गैसों के दाब को परिवर्तित होना चाहिए।

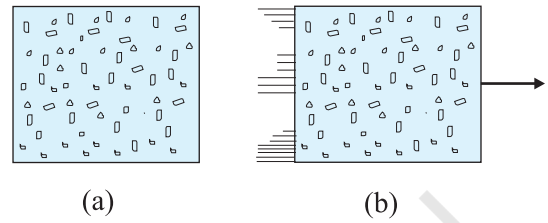
© NCERT not to be republished

11.4 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य

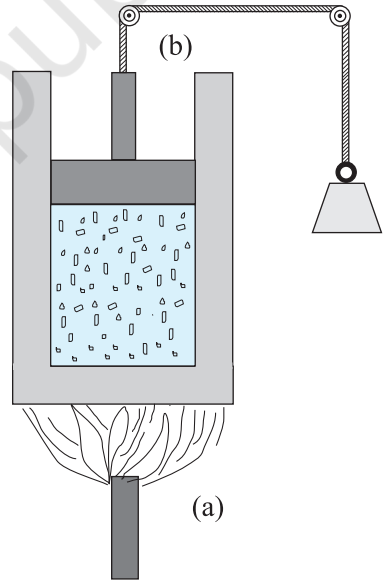
ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम से ताप की अवधारणा की उत्पत्ति हुई जो हमारे सामान्य ज्ञान के अनुकूल है। ताप किसी पिण्ड की उष्णता का द्योतक है। जब दो पिण्ड ऊष्मीय संपर्क में लाए जाते हैं तो इससे ऊष्मा के प्रवाह की दिशा निर्धारित होती है। ऊष्मा उच्च ताप वाले पिण्ड से निम्न ताप वाले पिण्ड की ओर प्रवाहित होती है। जब ताप समान हो जाते हैं तो प्रवाह रुक जाता है। ऐसी स्थिति में दोनों पिण्ड तापीय साम्य में होते हैं। हम यह विस्तार से पढ़ चुके हैं कि भांति-भांति के पिण्डों के ताप के निर्धारण के लिए ताप मापक्रम कैसे बनाए जाते हैं। अब हम ऊष्मा तथा तत्संबंधित राशियों; जैसे–आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य की अवधारणाओं का वर्णन करेंगे।

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा की अवधारणा को समझना कठिन नहीं है। हम जानते हैं कि प्रत्येक स्थूल निकाय असंख्य अणुओं से निर्मित है। आंतरिक ऊर्जा इन अणुओं की स्थितिज व गतिज ऊर्जाओं का योग है। हमने यह टिप्पणी की है कि ऊष्मागतिकी में निकाय की समग्र रूप से गतिज ऊर्जा प्रासंगिक नहीं होती। इस प्रकार, निर्देश फ्रेम में आंतरिक ऊर्जा अणु की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है जिसके सापेक्ष निकाय का द्रव्यमान-केंद्र विरामावस्था में होता है। इस प्रकार, इसमें केवल निकाय के अणुओं की यादृच्छिक गति से संबंधित (अव्यवस्थित) ऊर्जा ही समाहित होती है। निकाय की आंतरिक ऊर्जा को U से चिह्नित करते हैं।

यद्यपि हमने आंतरिक ऊर्जा के अर्थ को समझने के लिए आण्विक चित्र प्रस्तुत किया है तथापि जहाँ तक ऊष्मागतिकी का संबंध है, U निकाय का केवल एक स्थूल चर ही है। आंतरिक ऊर्जा के संबंध में एक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि यह केवल निकाय की अवस्था पर निर्भर करती है न कि इस बात पर कि यह अवस्था किस प्रकार प्राप्त हुई। निकाय की आंतरिक ऊर्जा U ऊष्मागतिकीय 'अवस्था चर' का एक उदाहरण है। इसका मान निकाय की दी हुई अवस्था पर निर्भर करता है न कि उसके इतिवृत्ति (History) (अर्थात् उस स्थिति तक पहुँचने के लिए अनुसरण किए गए पथ) पर। अतः किसी गैस के दिए गए द्रव्यमान के लिए आंतरिक ऊर्जा उसकी स्थिति पर निर्भर करती है। यह स्थिति दाब, आयतन व ताप के विशिष्ट मानों से वर्णित होती है। यह इस बात पर निर्भर नहीं करती कि गैस की यह स्थिति किस प्रकार प्राप्त हुई। दाब, आयतन, ताप तथा आंतरिक ऊर्जा निकाय (गैस) के ऊष्मागतिकीय अवस्था चर कहलाते हैं (अनुभाग 11.7 देखें)। यदि गैस के अल्पप्रभावी अंतराण्विक बलों की उपेक्षा कर दें तो गैस की आंतरिक ऊर्जा उसके अणुओं की अनेक यादृच्छिक गतियों से संबद्ध गतिज ऊर्जाओं के योग के ठीक बराबर होती है। अगले अध्याय में हम पढ़ेंगे कि किसी गैस में यह गति केवल स्थानांतरीय ही नहीं होती (इसमें गति पात्र के आयतन में एक बिंदु से दूसरे बिंदु के मध्य होती है), वरन् इसमें अणु की घूर्णी तथा कंपन गति भी होती है (चित्र 11.3)।



चित्र 11.3 (a) जब बॉक्स विरामावस्था में है तो गैस की आंतरिक ऊर्जा U उसके अणुओं की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है। विभिन्न प्रकार की गतियों (स्थानांतरीय, घूर्णी, कंपन) के कारण गतिज ऊर्जा को U में समाहित किया जाता है। (b) यदि यही समग्र बॉक्स कुछ वेग से गतिमान है, तो बॉक्स की गतिज ऊर्जा को U में सम्मिलित नहीं करना है।



चित्र 11.4 ऊष्मा व कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की दो विभिन्न विधियाँ हैं जिनसे उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है। (a) निकाय तथा परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊष्मा को ऊर्जा के स्थानांतरण के रूप में परिभाषित करते हैं। (b) कार्य उन साधनों (उदाहरणार्थ, पिस्टन से जुड़े भारों को ऊपर नीचे करके पिस्टन को गति देना) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है जिनमें तापांतर समाहित नहीं होता।

© NCERT not to be republished

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा में किन उपायों से परिवर्तन किए जा सकते हैं ? सुविधा की दृष्टि से पुन: कल्पना कीजिए कि चित्र 11.4 के अनुसार निकाय किसी दिए गए द्रव्यमान की एक गैस है जो एक सिलिंडर में भरी है जिसमें गतिशील पिस्टन लगा है । अनुभव यह बताता है कि गैस की अवस्था (तथा इस प्रकार उसकी आंतरिक ऊर्जा) परिवर्तित करने के दो उपाय होते हैं । एक उपाय है कि सिलिंडर को उस पिण्ड के संपर्क में रखें जो गैस की अपेक्षा उच्च ताप पर है । तापांतर के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) गरम पिण्ड से गैस में प्रवाहित होगी । इससे गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाएगी । दूसरा उपाय है कि पिस्टन को नीचे की ओर दबाया जाए (अर्थात् निकाय पर कार्य किया जाए) । इसमें भी गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है । नि:संदेह ये दोनों बातें विपरीत दिशा में भी संभव होती हैं । यदि चारों ओर के परिवेश का ताप कम है तो ऊष्मा गैस से परिवेश में प्रवाहित होगी । इसी प्रकार, गैस पिस्टन को ऊपर की ओर धक्का दे सकती है और परिवेश पर कार्य कर सकती है । संक्षेप में, ऊष्मा और कार्य दो भिन्न-भिन्न विधियाँ हैं जिनसे ऊष्मीय निकाय की स्थिति परिवर्तित होती है तथा उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है ।

ऊष्मा एवं आंतरिक ऊर्जा की धारणाओं में अंतर को सावधानीपूर्वक समझना आवश्यक है । ऊष्मा निश्चित रूप से ऊर्जा है परंतु यह ऊर्जा पारगमन में है । यह मात्र शब्दों का खेल नहीं है । दोनों में अंतर मूल महत्त्व का है । किसी ऊष्मागतिकी निकाय की स्थिति उसकी आंतरिक ऊर्जा से अभिलक्षित होती है न कि ऊष्मा से । इस प्रकार का प्रकथन कि *'किसी दी हुई अवस्था में गैस में ऊष्मा की कुछ मात्रा होती है'* उतना ही निरर्थक है जितना कि यह प्रकथन कि *'किसी दी हुई स्थिति में गैस में कुछ कार्य निहित होता है ।'* इसके विपरीत, *'किसी दी हुई अवस्था में गैस में आंतरिक ऊर्जा की कुछ मात्रा होती है'* पूरी तरह से एक सार्थक प्रकथन है । इसी प्रकार से, ऐसे प्रकथन जैसे *'निकाय को एक निश्चित मात्रा की ऊष्मा दी गई है'* या *'निकाय द्वारा एक निश्चित मात्रा का कार्य किया गया'* पूर्णत: अर्थपूर्ण सार्थक प्रकथन हैं ।

संक्षेप में, ऊष्मा व कार्य ऊष्मागतिकी में स्थिति चर नहीं होते । ये किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की विधियाँ होती हैं जिससे उसकी आंतरिक ऊर्जा परिवर्तित होती है। जो, जैसा कि पहले वर्णन कर चुके हैं, एक अवस्था चर होता है ।

साधारण भाषा में हमें प्राय: ऊष्मा तथा आंतरिक ऊर्जा में भ्रम बना रहता है । कुछ प्राथमिक भौतिकी की पुस्तकों में कभी-कभी इस भेद की उपेक्षा कर दी जाती है । तथापि ऊष्मागतिकी को भलीभांति समझने के लिए यह विभेद आवश्यक है ।

11.5 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम

हम यह देख चुके हैं कि किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा U दो विधियों से ऊर्जा स्थानांतरण के कारण परिवर्तित हो सकती है । ये विधियाँ हैं : ऊष्मा तथा कार्य । कल्पना कीजिए कि

ΔQ = परिवेश *द्वारा* निकाय *को* दी गई ऊष्मा

ΔW = निकाय *द्वारा* परिवेश *पर* किया गया कार्य

ΔU = निकाय *की* आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन

ऊर्जा संरक्षण के सामान्य नियम में यह अंतर्निहित है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad (11.1)$$

इसका तात्पर्य यह है कि जो ऊर्जा (ΔQ) निकाय को दी जाती है, उसका कुछ अंश निकाय की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करता है (ΔU) तथा शेष परिवेश पर किया गया कार्य (ΔW) है । समीकरण (11.1) को **ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम** के रूप में जाना जाता है । यह ऊर्जा संरक्षण का केवल सामान्य नियम है जिसे किसी भी उस निकाय पर लागू किया जा सकता है जिसमें परिवेश को अथवा परिवेश से ऊष्मा स्थानांतरण पर ध्यान दिया जाता है ।

मान लीजिए कि हम समीकरण (11.1) को वैकल्पिक रूप में प्रस्तुत करते हैं,

$$\Delta Q - \Delta W = \Delta U \qquad (11.2)$$

अब मान लीजिए कि निकाय किसी आरंभिक अवस्था से अंतिम अवस्था में कई प्रकार से आता है । उदाहरणार्थ, गैस की अवस्था (P_1, V_1) से परिवर्तित करके (P_2, V_2) कर दी जाए तो हम पहले गैस के दाब को स्थिर रखकर उसके आयतन को V_1 से V_2 में परिवर्तित करते हैं अर्थात् पहले हम अवस्था (P_1, V_2) में जा सकते हैं और फिर गैस के आयतन को स्थिर रखते हुए इसके दाब को P_1 से P_2 में परिवर्तित करते हैं । इससे गैस (P_2, V_2) अवस्था में पहुँच जाती है । विकल्पत: हम पहले आयतन को स्थिर रख सकते हैं और फिर दबाव स्थिर रखते हैं। चूंकि U एक अवस्था चर है, ΔU केवल प्रारंभिक व अंतिम अवस्थाओं पर निर्भर करेगा न कि उस पथ पर जिससे गैस एक अवस्था से दूसरी अवस्था में पहुँचती है । यद्यपि, ΔQ तथा ΔW दोनों, सामान्यतया, उस पथ पर निर्भर करते हैं जिससे गैस प्रारंभिक अवस्था से अंतिम अवस्था में जाती है । ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम, समीकरण (11.2), से यह स्पष्ट है कि संयोजन $\Delta Q - \Delta W$ पथ पर निर्भर नहीं करता । इससे पता चलता है कि यदि कोई निकाय ऐसी प्रक्रिया अपनाता है जिसमें $\Delta U = 0$ (उदाहरणार्थ, आदर्श गैस का समतापीय प्रसार, अनुभाग 11.8 देखिए), तो

$$\Delta Q = \Delta W$$

© NCERT not to be republished

अर्थात् निकाय को दी गई ऊष्मा निकाय द्वारा परिवेश पर कार्य करने में पूर्ण रूप से उपयोग में आ जाती है ।

यदि निकाय सिलिंडर में भरी गैस है तथा सिलिंडर में गतिशील पिस्टन लगा है तो पिस्टन को गति देने में गैस को कार्य करना पड़ता है । चूंकि बल को दाब ×क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित करते हैं तथा क्षेत्रफल ×विस्थापन को आयतन कहते हैं तो स्थिर दाब P के विरुद्ध निकाय द्वारा संपादित कार्य निम्नलिखित होगा,

$$\Delta W = P\Delta V$$

यहाँ ΔV गैस में आयतन के परिवर्तन को व्यक्त करता है । अत: इस उदाहरण के लिए, समीकरण (11.20) निम्न प्रकार से लिखी जाएगी

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \qquad (11.3)$$

समीकरण (11.3) के अनुप्रयोग के रूप में हमें 1g जल की आंतरिक ऊर्जा के परिवर्तन पर विचार करना होगा जब यह अपनी द्रव प्रावस्था से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है । जल की मापी गई गुप्त ऊष्मा 2256 J/g है अर्थात् जल के 1 ग्राम के लिए $\Delta Q = 2256$ J होता है । वायुमंडलीय दाब पर, 1 g जल का आयतन द्रव प्रावस्था में 1 cm^3 तथा वाष्प प्रावस्था में 1671 cm^3 होता है । अत:

$$\Delta W = P(V_g - V_l) = 1.013 \times 10^5 \times (1671 \times 10^{-6}) = 169.2 \text{ J}$$

समीकरण (11.3) से हमें आंतरिक ऊर्जा का मान प्राप्त होता है,

$$\Delta U = 2256 - 169.2 = 2086.8 \text{ J}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि ऊष्मा का अधिकांश भाग जल की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में व्यय होता है । इस प्रक्रिया में जल द्रव से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है ।

11.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

कल्पना कीजिए कि किसी पदार्थ को दी गई ऊष्मा की मात्रा ΔQ उसके ताप को T से बढ़ाकर $T+\Delta T$ कर देती है । हम पदार्थ की ऊष्मा धारिता को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं ।

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.4)$$

हम आशा करते हैं कि ΔQ और इस प्रकार से ऊष्मा धारिता S पदार्थ के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होती है । इसके अतिरिक्त यह ताप पर भी निर्भर कर सकती है । अर्थात् भिन्न-भिन्न तापों पर पदार्थ के ताप में एकांक वृद्धि के लिए ऊष्मा के भिन्न-भिन्न परिमाणों की आवश्यकता पड़ सकती है । पदार्थ के किसी नियत अभिलक्षण को परिभाषित करने तथा उसे उसके परिमाण से स्वतंत्र रखने के लिए हम S को पदार्थ के द्रव्यमान m (kg में) से विभाजित कर देते हैं :

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.5)$$

s को पदार्थ की **विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं । यह पदार्थ की प्रकृति और उसके ताप पर निर्भर करती है । विशिष्ट ऊष्मा का मात्रक J kg^{-1} K^{-1} है।

यदि पदार्थ के परिमाण का निर्धारण μ मोल (द्रव्यमान m को kg में व्यक्त करने के स्थान पर) के पदों में करें तो हम पदार्थ की ऊष्मा धारिता प्रति मोल को इस प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं

$$C = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.6)$$

C को पदार्थ की **मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं । s की भांति C भी पदार्थ के परिमाण पर निर्भर नहीं करता तथा प्रदत्त ऊष्मा की परिस्थितियों, पदार्थ की प्रकृति, उसके ताप पर निर्भर करता है । C का मात्रक J mol^{-1} K^{-1} है । जैसा कि हम बाद में देखेंगे (गैस की विशिष्ट ऊष्मा के संबंध में) C या s को परिभाषित करने के लिए अतिरिक्त शर्तों की आवश्यकता पड़ सकती है । C को परिभाषित करने के पीछे यह विचार है कि मोलर विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में सरल भविष्यवाणियाँ की जा सकती हैं।

सारणी 11.1 में कमरे के ताप तथा वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता दी गई हैं।

हम अध्याय 12 में पढ़ेंगे कि गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में की गई भविष्यवाणियाँ सामान्यतया प्रयोग से मेल खाती हैं । हम उसी ऊर्जा सम विभाजन नियम का उपयोग कर सकते हैं । जैसा कि हमने वहाँ ठोसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा की भविष्यवाणी में किया है (खंड 12.5 और 12.6 देखें)। N परमाणुओं वाले किसी ठोस पर विचार करें । प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर कंपन करता है । एक विमा में किसी दोलक की माध्य ऊर्जा $2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T$ होगी । तीन विमाओं में माध्य ऊर्जा $3 k_B T$ होगी । ठोस के एक मोल के लिए कुल ऊर्जा

$$U = 3 k_B T \times N_A = 3 RT \quad (k_B N_A = R)$$

अब स्थिर दाब पर, $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \cong \Delta U$ होगा, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV नगण्य होगा । अत:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \qquad (11.7)$$

© NCERT not to be republished

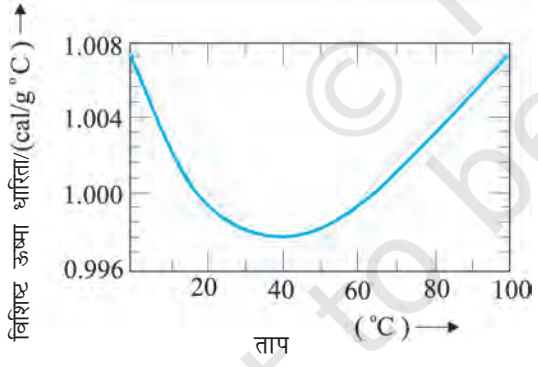
सारणी 11.1 कमरे के ताप तथा वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता

पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J kg^{-1} K^{-1}$)	मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ mol^{-1} K^{-1}$)
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
ताँबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चाँदी	236.1	25.5
टंगस्टन	134.4	24.9

जैसा कि सारणी से स्पष्ट है कि भविष्यवाणियाँ सामान्यतया साधारण तापों पर प्रायोगिक मानों से मेल खाती हैं (कार्बन एक अपवाद है)। यह ज्ञात है कि यह मेल निम्न तापों पर भंग हो जाता है।

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

ऊष्मा का पुराना मात्रक कैलोरी था। 1 कैलोरी को ऊष्मा के उस परिमाण के रूप में परिभाषित करते थे जो 1g जल के ताप में 1°C की वृद्धि कर दे। अधिक परिशुद्ध मापों से यह पाया गया है कि जल की विशिष्ट ऊष्मा में ताप के साथ किंचितमात्र परिवर्तन होता है। चित्र 11.5 में ताप परिसर 0-100 °C में यह परिवर्तन दर्शाया गया है।



चित्र 11.5 ताप के साथ जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता में परिवर्तन

इसलिए कैलोरी की यथार्थ परिभाषा के लिए यह आवश्यक समझा गया कि एकांक ताप अंतराल को निर्धारित किया जाए। ऊष्मा का वह परिमाण जो 1 g जल के ताप में 1 °C (14.5 °C से 15.5 °C) की वृद्धि कर दे, उसे 1 कैलोरी के रूप में परिभाषित किया गया। चूंकि ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है, इसलिए मात्रक जूल, J के उपयोग को प्राथमिकता देना अधिक उपयुक्त है। SI मात्रकों में, जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता 4186 $J\ kg^{-1}K^{-1}$ अर्थात् 4.186 $J\ g^{-1}K^{-1}$ है। तथाकथित ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक, जिसे 1 कैलोरी ऊष्मा उत्पन्न करने के लिए आवश्यक कार्य के रूप में परिभाषित करते हैं, वास्तव में ऊर्जा के दो भिन्न मात्रकों (कैलोरी से जूल) के मध्य एक परिवर्तन गुणक है। चूंकि SI मात्रक पद्धति में ऊष्मा कार्य या ऊर्जा के किसी अन्य रूप के लिए जूल मात्रक का उपयोग करते हैं, अतः 'यांत्रिक तुल्यांक' पद अब निरर्थक हो गया है और इसे उपयोग में लाने की आवश्यकता नहीं है।

जैसा कि पहले वर्णन किया जा चुका है कि विशिष्ट ऊष्मा धारिता, प्रक्रिया या उन परिस्थितियों पर निर्भर करती है जिनके अंतर्गत ऊष्मा का स्थानांतरण होता है। उदाहरणार्थ, गैसों के लिए हम दो विशिष्ट ऊष्माओं को परिभाषित करते हैं : ***स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता।*** किसी आदर्श गैस के लिए हमारे पास एक सरल संबंध होता है जिसे हम निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$C_P - C_V = R \qquad (11.8)$$

यहाँ C_P व C_V आदर्श गैस की क्रमशः स्थिर दाब व स्थिर आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ हैं तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है। इसे सिद्ध करने के लिए हम 1 मोल गैस के लिए समीकरण (11.3) पर विचार करते हैं :

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

यदि ΔQ का स्थिर आयतन पर अवशोषण होता है तो $\Delta V = 0$ होगा।

$$C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_v = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_v \equiv \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right) \qquad (11.9)$$

यहाँ अधोलिखित V को अंतिम पद में छोड़ दिया गया है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र ताप पर निर्भर करता है। (अधोलिखित यह व्यक्त करता है कि तत्संबंधित राशि स्थिर है।) इसके विपरीत, यदि ΔQ का स्थिर दाब पर अवशोषण होता है तो

$$C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_P + P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P \qquad (11.10)$$

अधोलिखित P को प्रथम पद में छोड़ा जा सकता है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र T पर निर्भर करता है। आदर्श गैस के 1 मोल के लिए

$$PV = RT$$

जो निम्नलिखित परिणाम देता है :

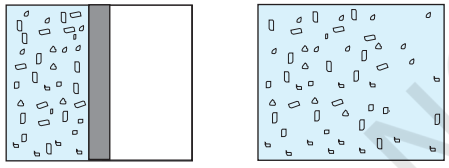
$$P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P = R \qquad (11.11)$$

© NCERT not to be republished

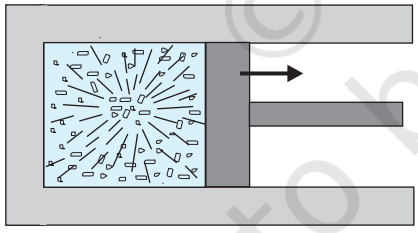
समीकरणों (11.9) से (11.11) तक के उपयोग से हमें वांछित संबंध (11.8) प्राप्त होता है।

11.7 ऊष्मागतिकीय अवस्था चर तथा अवस्था का समीकरण

किसी भी ऊष्मागतिकीय निकाय की प्रत्येक **साम्य अवस्था** को कुछ स्थूल चरों के विशिष्ट मानों के उपयोग द्वारा पूरी तरह से वर्णित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, किसी गैस की साम्य अवस्था उसके दाब, आयतन, ताप व द्रव्यमान (तथा संगठन यदि गैसों का सम्मिश्रण है) के मानों द्वारा पूरी तरह से निर्धारित होती है। कोई ऊष्मागतिक निकाय सदैव साम्य स्थिति में नहीं होता। उदाहरणार्थ, किसी गैस को निर्वात के विरुद्ध यदि फैलने दिया जाता है तो यह साम्य अवस्था नहीं होती [चित्र 11.6(a)]। द्रुत प्रसरण की अवधि में गैस का दाब संभव है कि सभी स्थानों पर एकसमान न हो। इसी प्रकार, गैसों का वह सम्मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया होती है (उदाहरणार्थ, पेट्रोल की वाष्प तथा वायु का मिश्रण जिसे एक चिंगारी से प्रज्ज्वलित किया जाता है) एक साम्य अवस्था नहीं है; इसके अतिरिक्त इसके ताप व दाब एकसमान नहीं हैं [चित्र 11.6(b)]। अंततः, गैस का ताप व दाब एकसमान हो जाता है तथा वह परिवेश के साथ तापीय व यांत्रिक साम्य में आ जाती है।



(a)



(b)

चित्र 11.6 (a) बॉक्स के विभाजक को अचानक हटा दिया गया है जिससे गैस का मुक्त प्रसरण होता है। (b) गैसों का मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया संपन्न होती है। दोनों स्थितियों में गैस साम्यावस्था में नहीं है तथा चरों से इसका विवरण नहीं दिया जा सकता।

संक्षेप में, ऊष्मागतिकीय अवस्था चर निकायों की साम्यावस्था का विवरण देते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि विभिन्न अवस्था चर स्वतंत्र हों। अवस्था चरों के पारस्परिक संबंध को अवस्था का समीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ, किसी आदर्श गैस के लिए अवस्था का समीकरण आदर्श गैस संबंध होता है,

$$PV = \mu RT$$

गैस की निश्चित मात्रा के लिए अर्थात् दिए गए μ के लिए इस प्रकार से केवल दो ही स्वतंत्र चर होते हैं। मान लीजिए कि वे P और V या T और V हैं। निश्चित ताप पर दाब आयतन वक्र को **समतापी** कहते हैं। वास्तविक गैसों के लिए अवस्था का समीकरण अधिक जटिल हो सकता है।

ऊष्मागतिकीय अवस्था चर दो प्रकार के होते हैं : **विस्तीर्ण** तथा **गहन**। विस्तीर्ण चर निकाय के आकार का संकेत देते हैं जबकि गहन चर जैसे दाब तथा ताप से ऐसा नहीं करते। यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सा चर विस्तीर्ण है तथा कौन-सा गहन है, किसी प्रासंगिक निकाय पर विचार कीजिए तथा कल्पना कीजिए कि उसे दो समान भागों में बाँट दिया गया है। वे चर जो हर भाग में अपरिवर्तित रहते हैं गहन चर कहलाते हैं किंतु जिन चरों का मान हर भाग में आधा हो जाता है, उन्हें विस्तीर्ण चर कहते हैं। उदाहरणार्थ, यह आसानी से देखा जा सकता है कि आंतरिक ऊर्जा U, आयतन V, कुल द्रव्यमान M विस्तीर्ण चर हैं जबकि दाब P, ताप T व घनत्व ρ गहन चर हैं। यह एक अच्छी आदत होगी यदि चरों के इस प्रकार के वर्गीकरण के द्वारा ऊष्मागतिकीय समीकरणों की प्रासंगिकता का परीक्षण कर लिया जाए। उदाहरणार्थ, समीकरण,

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

में दोनों ओर की राशियाँ विस्तीर्ण है* (किसी गहन चर जैसे P तथा विस्तीर्ण राशि ΔV का गुणनफल विस्तीर्ण राशि है)।

11.8 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

11.8.1 स्थैतिककल्प प्रक्रम

ऐसी गैस पर विचार कीजिए जो अपने परिवेश से तापीय तथा यांत्रिक रूप से साम्य में हो। ऐसी स्थिति में गैस का दाब बाह्य दाब के बराबर होगा तथा इसका ताप वही होगा जो परिवेश का है। कल्पना कीजिए कि बाह्य दाब को यकायक कम कर देते हैं (मान लीजिए कि बर्तन में लगे गतिशील पिस्टन से भार हटा लेते हैं)। पिस्टन बाहर की ओर त्वरित होगा। प्रक्रम की अवधि में गैस उन अवस्थाओं से गुजरती है जो साम्यावस्थाएँ नहीं हैं। असाम्य अवस्थाओं का सुनिश्चित दाब व ताप नहीं होता। इसी प्रकार, यदि गैस व उसके परिवेश के मध्य सीमित तापांतर है, तो ऊष्मा का विनिमय द्रुत गति से होता है। इस प्रक्रम में गैस असाम्यावस्था से गुजरती है। यथासमय, गैस संतुलन की अवस्था में पहुँच जाएगी जिसमें सुनिश्चित ताप व दाब परिवेश के ताप व दाब के बराबर हो जाएगा। निर्वात में गैस का स्वतंत्र प्रसार

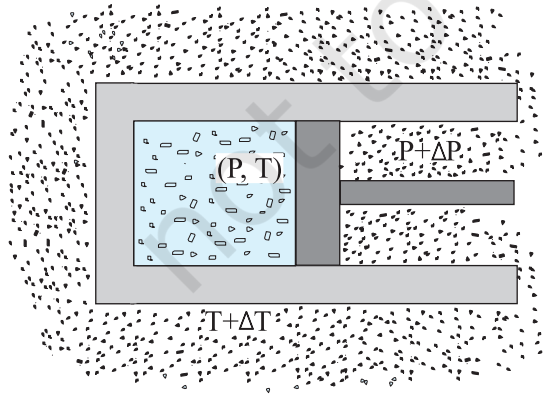
* जैसा पहले भी दर्शाया गया है Q अवस्था चर नहीं है किन्तु ΔQ निकाय की कुल मात्रा समानुपातिक है। अतः यह विस्तीर्ण चर है।

© NCERT not to be republished

तथा विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया प्रदर्शित करने वाली गैसों का सम्मिश्रण (जिसका खंड (11.7) में वर्णन किया गया है) भी ऐसे उदाहरण हैं जिसमें निकाय असाम्यावस्था से गुजरता है।

किसी निकाय की असाम्यावस्था से व्यवहार करना कठिन होता है । इसलिए एक आदर्शीकृत प्रक्रम की कल्पना करना सरल होता है जिसके हर चरण में निकाय एक साम्यावस्था में है । ऐसा प्रक्रम सिद्धांत: अनंत रूप से धीमा होता है । इस कारण इस प्रक्रम को स्थैतिककल्प (लगभग स्थिर) प्रक्रम कहते हैं। यह निकाय अपने चरों (P, T, V) को इतनी धीमी गति से परिवर्तित करता है कि यह पूरी अवधि में अपने परिवेश से तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता है । किसी स्थैतिककल्प प्रक्रम के हर चरण में निकाय के दाब तथा उसके बाह्य दाब का अंतर अत्यंत छोटा होता है । यही बात निकाय तथा उसके परिवेश के मध्य तापांतर पर भी लागू होती है । स्थैतिककल्प प्रक्रम के माध्यम से किसी गैस को उसकी अवस्था (P, T) से अन्य अवस्था (P', T') में ले जाते हैं तो हम बाह्य दाब को अत्यल्प मात्रा से परिवर्तित करते हैं तथा इसके दाब को परिवेश के दाब के बराबर हो जाने देते हैं । प्रक्रम को अति धीमी गति से चलने देते हैं जब तक कि निकाय का दाब P' न हो जाए । इसी प्रकार, ताप बदलने के लिए हम निकाय तथा परिवेश के ऊष्मा भंडार के मध्य अत्यन्त सूक्ष्म तापांतर उत्पन्न करते हैं तथा ऊष्मा भंडारों का चयन उत्तरोत्तर भिन्न तापों T से T' का करते हैं। इस प्रकार निकाय का ताप T' हो जाता है ।

स्पष्ट रूप से, स्थैतिककल्प प्रक्रम काल्पनिक रचना है। व्यवहार रूप से उन प्रक्रमों को, जो बहुत ही धीमे हैं, जिनके पिस्टन में त्वरित गति नहीं होती तथा जिनमें अधिक ताप प्रवणता नहीं होती, इन्हें आदर्श स्थैतिककल्प प्रक्रम मानना तर्कसंगत है। यदि अन्य बात का वर्णन न किया जाए तो हम अब स्थैतिककल्प प्रक्रमों के विषय में ही अध्ययन करेंगे।



चित्र 11.7 स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के पात्र का ताप तथा बाह्य दाब एवं निकाय के ताप व दाब का अंतर अत्यल्प है ।

वह प्रक्रम जिसकी पूरी अवधि में निकाय का ताप स्थिर रखा जाता है, **समतापीय प्रक्रम** कहलाता है । स्थिर ताप के किसी विशाल ऊष्मा भंडार में रखे धात्विक सिलिंडर में प्रसरित हो रही गैस समतापीय प्रक्रम का एक उदाहरण है । (ऊष्मा भंडार से निकाय में ऊष्मा के स्थानांतरण से ऊष्माशय का ताप यथार्थ रूप से प्रभावित नहीं होता, क्योंकि उसकी ऊष्माधारिता अत्यधिक होती है) । **समदाबीय प्रक्रम** में दाब स्थिर रहता है जबकि **समआयतनिक प्रक्रम** में आयतन स्थिर रहता है । अंतत:, यदि निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर दिया जाए तथा निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाहित न हो, तो प्रक्रम **रुद्धोष्म** होता है । इन विशेष प्रक्रमों की परिभाषाओं का सार सारणी 11.2 में प्रस्तुत किया गया है ।

सारणी 11.2 कुछ विशिष्ट ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

प्रक्रमों का प्रकार	विशेषता
समतापीय	स्थिर ताप
समदाबीय	स्थिर दाब
समआयतनिक	स्थिर आयतन
रुद्धोष्म	निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाह नहीं ($\Delta Q = 0$)

अब हम इन प्रक्रमों के विषय में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

11.8.2 समतापीय प्रक्रम

किसी समतापीय प्रक्रम में (जिसमें T स्थिर है) आदर्श गैस समीकरण से निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है

$$PV = \text{नियतांक}$$

अर्थात् किसी निश्चित द्रव्यमान की गैस का दाब उसके आयतन का व्युत्क्रमानुपाती होता है । यह और कुछ नहीं वरन् बॉयल का नियम है ।

कल्पना कीजिए कि कोई आदर्श गैस समतापीय (ताप T पर) रूप से अपनी प्रारंभिक (P_1, V_1) से अंतिम अवस्था (P_2, V_2) में पहुँचती है । बीच के किसी चरण में जब दाब P हो तथा आयतन में परिवर्तन V से $V + \Delta V$ (ΔV कम) हो, तो

$$\Delta W = P\Delta V$$

$\Delta V \to 0$ लेते हुए राशि ΔW को संपूर्ण प्रक्रम में जोड़कर कार्य की कुल मात्रा निम्नलिखित रूप से ज्ञात कर लेते हैं,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$

$$= \mu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (11.12)$$

© NCERT not to be republished

दूसरे चरण में हमने आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu RT$ का उपयोग किया है तथा अचरों को समाकलन से बाहर ले लिया है । आदर्श गैस के लिए आंतरिक ऊर्जा ताप पर निर्भर करती है । इस प्रकार, किसी आदर्श गैस के समतापीय प्रक्रम में आंतरिक ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता । इसलिए ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार, गैस को दी गई ऊष्मा की मात्रा गैस द्वारा संपादित किए गए कार्य के बराबर होती है : $Q = W$ । समीकरण (11.12) में ध्यान दीजिए कि जब $V_2 > V_1$ तो $W > 0$; तथा $V_2 < V_1$ के लिए $W < 0$ होता है । इसका तात्पर्य यह है कि समतापीय प्रसार में गैस ऊष्मा अवशोषित करके कुछ कार्य संपादित करती है जबकि समतापीय संपीडन में गैस पर परिवेश द्वारा कार्य होता है तथा ऊष्मा का निष्कासन होता है ।

11.8.3 रुद्धोष्म प्रक्रम

रुद्धोष्म प्रक्रम में निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर देते हैं फलस्वरूप अवशोषित या निष्कासित ऊष्मा शून्य होती है । समीकरण (11.1) से पता चलता है कि गैस द्वारा संपादित कार्य के फलस्वरूप आंतरिक ऊर्जा कम हो जाती है (और इस प्रकार आदर्श गैस के लिए उसका ताप) । यहाँ हम बिना उपपत्ति के इस तथ्य का उल्लेख कर रहे हैं (जिसका आप उच्च कक्षाओं में अध्ययन करेंगे) कि आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म प्रक्रम में

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक} \qquad (11.13)$$

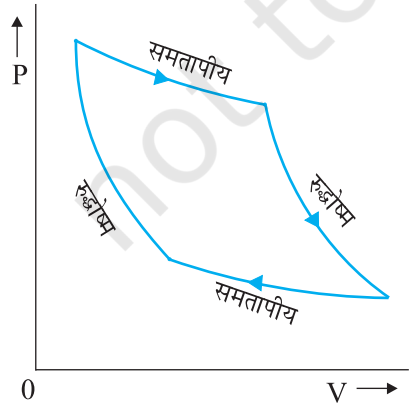
जहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं (सामान्य अथवा मोलर), स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा C_p तथा स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा C_v का अनुपात है । अर्थात्

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

अत: यदि कोई आदर्श गैस रुद्धोष्म ढंग से (P_1, V_1) अवस्था से (P_2, V_2) अवस्था में पहुँच जाती है, तो

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \qquad (11.14)$$

चित्र 11.8 में आदर्श गैस के लिए P-V वक्रों को दो रुद्धोष्म से जोड़ने वाले दो समतापीय को दर्शाया गया है ।



चित्र 11.8 आदर्श गैस के समतापीय व रुद्धोष्म प्रक्रमों के लिए P-V वक्र ।

किसी आदर्श गैस की अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म परिवर्तन में होने वाले कार्य को हम पहले ही की भांति परिकलित कर सकते हैं । अर्थात्,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

$$= \text{नियतांक} \times \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \text{नियतांक} \times \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{1-\gamma} \right|_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{\text{नियतांक}}{1-\gamma} \times \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \qquad (11.15)$$

समीकरण (11.14), से नियतांक $P_1 V_1^{\gamma}$ है अथवा $P_2 V_2^{\gamma}$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{1-\gamma} \times \left[\frac{P_2 V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} [P_2 V_2 - P_1 V_1] = \frac{\mu R (T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \qquad (11.16)$$

जैसा अपेक्षित है, यदि रुद्धोष्म प्रक्रम में कार्य गैस द्वारा संपन्न होता है $(W > 0)$, तब समीकरण (11.16) से $T_2 > T_1$ । इसके विपरीत, यदि कार्य गैस पर संपादित होता है $(W < 0)$ तो, हमें $T_2 > T_1$ प्राप्त होता है, अर्थात् गैस का ताप बढ़ता है ।

11.8.4 समआयतनिक प्रक्रम

किसी समआयतनिक प्रक्रम में V नियत रहता है । इस प्रक्रम में न तो गैस पर कोई कार्य होता है और न ही गैस द्वारा कोई कार्य संपादित होता है । समीकरण (11.1) से गैस द्वारा अवशोषित ऊष्मा पूर्ण रूप से उसकी आंतरिक ऊर्जा तथा उसके ताप को परिवर्तित करने में व्यय होती है । किसी दी गई ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत आयतन पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित की जाती है।

11.8.5 समदाबीय प्रक्रम

समदाबीय प्रक्रम में दाब P नियत रहता है । गैस द्वारा किया गया कार्य

$$W = P(V_2 - V_1) = \mu R (T_2 - T_1) \qquad (11.17)$$

चूंकि ताप परिवर्तित होता है, अत: आंतरिक ऊर्जा भी परिवर्तित होती है । अवशोषित ऊष्मा आंशिक रूप से आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में तथा आंशिक रूप से कार्य करने में व्यय होती है । किसी नियत ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत दाब पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित किया जाता है ।

© NCERT not to be republished

11.8.6 चक्रीय प्रक्रम

चक्रीय प्रक्रम में निकाय अपनी प्रारंभिक अवस्था में वापस लौट आता है । चूंकि आंतरिक ऊर्जा अवस्था चर है, चक्रीय प्रक्रम के लिए $\Delta U=0$ । समीकरण (11.1) से, अवशोषित ऊष्मा की कुल मात्रा निकाय द्वारा किए गए कार्य के बराबर होती है ।

11.9 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण नियम है । सामान्य अनुभव यह बतलाता है कि ऐसे बहुत से मनोगम्य प्रक्रम हैं जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से पूर्णतया अनुमत हैं तथापि कभी भी होते हुए दिखाई नहीं देते । उदाहरणार्थ, ऐसा किसी ने कभी नहीं देखा कि मेज पर पड़ी कोई पुस्तक स्वत: उछलकर किसी ऊँचाई पर पहुँच जाए । किंतु ऐसी बात तभी संभव हो सकती है यदि केवल ऊर्जा संरक्षण नियम का ही नियंत्रण हो । मेज स्वत: ठंडी होकर अपनी आंतरिक ऊर्जा का कुछ अंश पुस्तक की समान मात्रा की यांत्रिक ऊर्जा में रूपांतरित करने में करे और इस यांत्रिक ऊर्जा के कारण पुस्तक उस ऊँचाई तक उछले जिसकी स्थितिज ऊर्जा पुस्तक द्वारा प्राप्त यांत्रिक ऊर्जा के बराबर हो । परंतु ऐसा कदापि नहीं होता। स्पष्ट है कि प्रकृति के किसी आंतरिक मूल नियम के कारण यह निषेध है। यद्यपि यह ऊर्जा संरक्षण नियम का अनुपालन करता है। वह नियम जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से संगत अनेक परिघटनाओं को स्वीकृति नहीं देता, ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कहलाता है ।

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता तथा किसी प्रशीतक के निष्पादन गुणांक की मूल सीमा निर्धारित करता है। सरल भाषा में, यह नियम बताता है कि ऊष्मा इंजन की दक्षता कदापि 1 नहीं हो सकती। ठंडे ऊष्मा भंडार की मुक्त ऊष्मा को कभी भी शून्य नहीं किया जा सकता। प्रशीतक के लिए द्वितीय नियम यह बताता है कि निष्पादन गुणांक कदापि अनंत नहीं हो सकता। प्रशीतक पर बाह्य कार्य (W) कभी भी शून्य नहीं हो सकता। अधोलिखित दोनों प्रकथन, इन प्रेक्षणों का एक संक्षिप्त सार है। उनमें से एक केल्विन तथा प्लैंक के द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना का खंडन किया गया है, तथा दूसरा क्लासियस द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श प्रशीतक अथवा ऊष्मा पंप की संभावना का खंडन किया गया है।

केल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का अवशोषण करना तथा उस ऊष्मा को पूर्णतया कार्य में रूपांतरित करना हो ।

क्लासियस का प्रकथन

ऐसा कोई भी प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ठंडे पिंड से किसी गर्म पिंड में ऊष्मा स्थानांतरण हो ।

उच्च कक्षाओं के पाठ्यक्रमों में आप इसकी उपपत्ति पढ़ेंगे कि दोनों प्रकथन पूर्णतया समतुल्य हैं ।

11.10 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम

किसी ऐसे प्रक्रम की कल्पना कीजिए जिसमें कोई ऊष्मागतिकीय निकाय आरंभिक अवस्था i से अंतिम अवस्था f में पहुँचता है। प्रक्रम में निकाय परिवेश से Q ऊष्मा अवशोषित करता है तथा उस पर W कार्य संपादित करता है। क्या हम इस प्रक्रम को उलट सकते हैं तथा निकाय व परिवेश दोनों को, कहीं भी कोई अन्य प्रभाव पड़े बिना, आरंभिक अवस्था में वापस ला सकते हैं? अनुभव बताता है कि प्रकृति के अधिकांश प्रक्रमों में ऐसा होना संभव नहीं है। प्रकृति में सभी नैसर्गिक प्रक्रम अनुत्क्रमणीय हैं। इनके अनेक उदाहरण गिनाये जा सकते हैं। चूल्हे पर रखे बर्तन का आधार दूसरे भागों की अपेक्षा अधिक गरम होता है। जब बर्तन को हटाते हैं तो ऊष्मा आधार से दूसरे भागों में स्थानांतरित होती है जिससे बर्तन का ताप एकसमान हो जाता है (यथोचित समय में यह परिवेश के ताप के बराबर ठंडा हो जाता है)। इस प्रक्रम को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता, बर्तन का कोई भाग स्वत: ठंडा होकर आधार को गर्म नहीं करेगा। यदि ऐसा होता है तो ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम का उल्लंघन होगा। गैस का मुक्त प्रसार अनुत्क्रमणीय होता है। वायु तथा पेट्रोल के मिश्रण में स्फुलिंग द्वारा प्रज्वलित दहन अभिक्रिया को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता। रसोईघर में किसी गैस सिलिंडर से रिस रही भोजन पकाने की गैस पूरे कमरे में विसरित हो जाती है। विसरण प्रक्रम स्वत: उत्क्रमित नहीं होगा जिससे गैस वापस सिलिंडर में भर जाए। किसी ऊष्मा भंडार के ऊष्मीय संपर्क में आने वाले द्रव का विलोड़न संपादित हो रहे कार्य को ऊष्मा में रूपांतरित कर देगा जिससे उष्माशय की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है। प्रक्रम को पूर्णतया उत्क्रमित नहीं कर सकते, अन्यथा इसका अर्थ होगा कि ऊष्मा पूर्णतया कार्य में परिवर्तित हो गई है। यह ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम का उल्लंघन है। अनुत्क्रमणीयता एक नियम है न कि प्रकृति में कोई अपवाद।

अनुत्क्रमणीयता मुख्यत: दो कारणों से उत्पन्न होती है : पहला, अनेक प्रक्रम (जैसे मुक्त प्रसरण या विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया) निकाय को असंतुलन की अवस्थाओं में ले जाते हैं; दूसरा, अनेक प्रक्रमों में घर्षण, श्यानता तथा अन्य क्षय संबंधी प्रभाव निहित होते हैं (इसके उदाहरण हैं – किसी गतिमान पिंड का रुकना जिसमें पिंड अपनी यांत्रिक ऊर्जा को फर्श व स्वयं अपनी ऊष्मा के रूप में दे देता है; द्रव में घूमते हुए ब्लेड का श्यानता के कारण रुक जाना जिसमें यह अपनी यांत्रिक ऊर्जा को द्रव की आंतरिक ऊर्जा के रूप में दे देता है)। चूंकि क्षयकारी प्रभाव सभी स्थानों पर उपस्थित रहते हैं। इन्हें कम तो किया जा सकता है पर पूर्णतया समाप्त नहीं किया जा सकता। जिन प्रक्रमों से हमारा अधिकतर सामना होता है वे सभी अनुत्क्रमणीय होते हैं।

© NCERT not to be republished

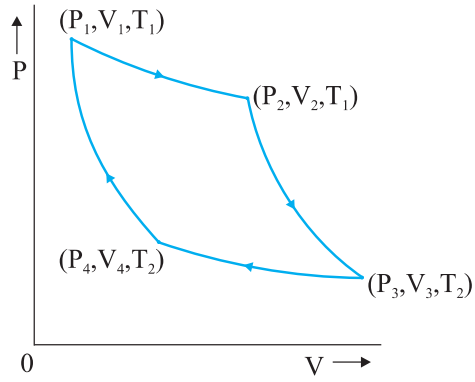
कोई ऊष्मागतिकीय प्रक्रम (अवस्था $i \rightarrow$ अवस्था f) तभी उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार वापस लौटाया जा सके कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस आ जाएँ तथा परिवेश में कहीं भी किसी भी प्रकार का अन्य परिवर्तन न हो। पूर्व विवेचना के अनुसार कोई उत्क्रमणीय प्रक्रम एक आदर्श धारणा है। कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय तभी होता है जब वह स्थैतिककल्प होता है (परिवेश के साथ प्रत्येक चरण पर साम्य निकाय) तथा निकाय में कोई क्षयकारी प्रभाव नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ, घर्षणहीन गतिशील पिस्टन लगे सिलिंडर भरी किसी आदर्श गैस का स्थैतिककल्प समतापीय प्रसरण उत्क्रमणीय प्रक्रम है।

उत्क्रमणीयता ऊष्मागतिकी की ऐसी मूल धारणा क्यों है ? जैसा कि हम देख चुके है, ऊष्मागतिकी के महत्त्वों में से एक महत्त्व दक्षता का है जिससे ऊष्मा कार्य में रूपांतरित की जा सकती है। ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम 100% दक्षता के आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना को नियम विरुद्ध बताता है। T_1 व T_2 के दो ऊष्मा भंडारों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की संभावित अधिकतम दक्षता कितनी होगी ? यह देखा जाता है कि आदर्श उत्क्रमणीय प्रक्रमों पर आधारित ऊष्मा इंजन अधिकतम संभावित दक्षता प्राप्त करता है। अन्य दूसरे इंजनों जिनमें किसी न किसी रूप में अनुत्क्रमणीयता निहित होती है (जैसा कि व्यावहारिक इंजनों में होता है) की दक्षता इस सीमांत दक्षता से कम होती है।

11.11 कार्नो इंजन

कल्पना कीजिए कि हमारे पास ताप T_1 पर एक उष्ण ऊष्मा भंडार व ताप T_2 पर एक ठंडा ऊष्मा भंडार है। इन दोनों ऊष्मा भंडारों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की अधिकतम दक्षता कितनी होगी तथा सर्वाधिक दक्षता प्राप्त करने के लिए प्रकर्मों के किस चक्र को अपनाना चाहिए ? फ्रेंच इंजीनियर, साडी कार्नो ने 1824 में सर्वप्रथम इस प्रश्न पर विचार किया। दिलचस्प बात यह है कि कार्नो ने इस प्रश्न का सही उत्तर पा लिया था यद्यपि ऊष्मा और ऊष्मागतिकी की मौलिक अवधारणा को तब तक दृढ़तापूर्वक स्थापित नहीं किया जा सका था।

हम यह आशा करते हैं कि दो तापों के बीच कार्य करने वाला आदर्श इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। जैसा कि पहले अनुभागों में बताया जा चुका है, अनुत्क्रमणीयता से दक्षता को कम करने वाले क्षयकारी प्रभाव संबद्ध होते हैं। कोई प्रक्रम तभी उत्क्रमणीय होता है यदि वह स्थैतिककल्प तथा ऊर्जा-संरक्षी हो। हम यह देख चुके हैं कि वह प्रक्रम स्थैतिककल्प नहीं होता है जिसमें निकाय व ऊष्मा भंडार के बीच तापांतर पर्याप्त हो। इसका तात्पर्य यह है कि दो तापों के मध्य कार्य कर रहे किसी उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन में ऊष्मा का अवशोषण (गरम ऊष्मा भंडार से) समतापीय विधि द्वारा होना चाहिए तथा (अपेक्षाकृत



चित्र 11.9 किसी ऊष्मा इंजन के लिए कार्नो चक्र जिसमें कार्यकारी पदार्थ के रूप में आदर्श गैस का उपयोग होता है।

ठंडे ऊष्मा भंडार को) समतापीय विधि द्वारा ऊष्मा मुक्त होनी चाहिए। इस प्रकार, हमने उत्क्रमणीय इंजन के दो चरणों की पहचान की : ताप T_1 पर समतापीय प्रक्रम जिसमें गरम ऊष्मा भंडार से Q_1 ऊष्मा अवशोषित होती है तथा ताप T_2 पर दूसरा समतापीय प्रक्रम जिसमें ठंडे ऊष्मा भंडार को Q_2 ऊष्मा मुक्त होती है। चक्र पूरा होने के लिए इस बात की आवश्यकता है कि हम निकाय को ताप T_1 से T_2 तक ले जाएँ फिर उसे ताप T_2 से T_1 पर वापस ले जाएँ। प्रश्न यह है कि इस उद्देश्य के लिए हमें किन प्रक्रमों का उपयोग करना चाहिए जो उत्क्रमणीय हों ? थोड़े चिंतन से यह पता चल जाता है कि उस उद्देश्य के लिए हम केवल उत्क्रमणीय रुद्धोष्म प्रक्रम ही अपना सकते हैं जिसमें किसी भी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का प्रवाह सम्मिलित नहीं होता। निकाय को एक ताप से दूसरे ताप तक ले जाने के लिए यदि हम कोई अन्य प्रक्रम अपनाते हैं जो रुद्धोष्म नहीं है, मान लीजिए समआयतनिक प्रक्रम, तो हमें ताप परिसर T_2 से T_1 में ऊष्मा भंडार की एक शृंखला की आवश्यकता होगी ताकि यह निश्चित किया जा सके कि हर चरण में प्रक्रम स्थैतिककल्प में है। (हम आपको पुनः याद दिलाते हैं कि किसी स्थैतिककल्प व उत्क्रमणीय प्रक्रम में निकाय व ऊष्मा भंडार के बीच बहुत तापांतर नहीं होना चाहिए)। परंतु हम यहाँ एक ऐसे उत्क्रमणीय इंजन पर विचार कर रहे हैं जो केवल दो तापों के बीच कार्य करता है। इस प्रकार, रुद्धोष्म प्रक्रमों द्वारा निकाय के ताप में T_1 से T_2 तथा इस इंजन के ताप में T_2 से T_1 का परिवर्तन लाना चाहिए।

दो तापों के मध्य कार्य करने वाला कोई उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन **कार्नो इंजन** कहलाता है। हमने अभी विवेचना की है कि इस इंजन में चरणों का क्रम निम्नलिखित होना चाहिए, जो चित्र 11.11 में दर्शाए अनुसार एक चक्र का निर्माण करते हैं, जिसे

© NCERT not to be republished

कार्नो चक्र कहते हैं । हमने कार्नो इंजन का कार्यकारी पदार्थ एक आदर्श गैस लिया है ।

(a) *चरण 1→2* गैस का समतापी प्रसार जिसमें गैस अवस्था (P_1, V_1, T_1) से (P_2, V_2, T_1) में पहुँच जाती है ।

ताप T_1 पर ऊष्माशय से अवशोषित ऊष्मा (Q_1) का मान समीकरण (11.12) से दिया जाता है । यह गैस द्वारा परिवेश पर संपादित किए गए कार्य $W_{1\to2}$ के बराबर होता है ।

$$W_{1\to2} = Q_1 = \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (11.18)$$

(b) *चरण 2→3* (P_2, V_2, T_1) से (P_3, V_3, T_2) अवस्था में गैस का रुद्धोष्म प्रसार । समीकरण (11.16) से गैस द्वारा संपादित हुआ कार्य होगा

$$W_{2\to3} = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)} \qquad (11.19)$$

(c) *चरण 3→ 4* गैस की अवस्था (P_3, V_3, T_2) से (P_4, V_4, T_2) में समतापी संपीडन ।

ताप T_2 पर गैस द्वारा ऊष्माशय को मुक्त की गई ऊष्मा की मात्रा समीकरण (11.12) से प्राप्त होती है । यह परिवेश द्वारा गैस पर संपादित कार्य $W_{3\to4}$ के भी बराबर होती है

$$W_{3\to4} = Q_2 = \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (11.20)$$

(d) *चरण 4→ 1* गैस की अवस्था (P_4, V_4, T_2) से (P_1, V_1, T_1) में रुद्धोष्म संपीडन । समीकरण (11.16) से गैस पर किया गया कार्य

$$W_{4\to1} = \mu R \frac{(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)} \qquad (11.21)$$

समीकरणों (11.18)से (11.21) के उपयोग से एक पूरे चक्र में गैस द्वारा संपादित कुल कार्य की मात्रा,

$$W = W_{1\to2} + W_{2\to3} - W_{3\to4} - W_{4\to1}$$

$$= \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (11.22)$$

कार्नो इंजन की दक्षता

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{T_2}{T_1}\,\frac{\ln\frac{V_3}{V_4}}{\ln\frac{V_2}{V_1}} \qquad (11.23)$$

अब चूंकि चरण 2→3 एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

अथवा $$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (11.24)$$

इसी प्रकार, चूंकि चरण 4→1 भी एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

अथवा $$\frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (11.25)$$

समीकरणों (11.24) तथा (11.25) से,

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \qquad (11.26)$$

समीकरण (11.26) के उपयोग से समीकरण (11.23) से η का निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \text{ (कार्नो इंजन)} \qquad (11.27)$$

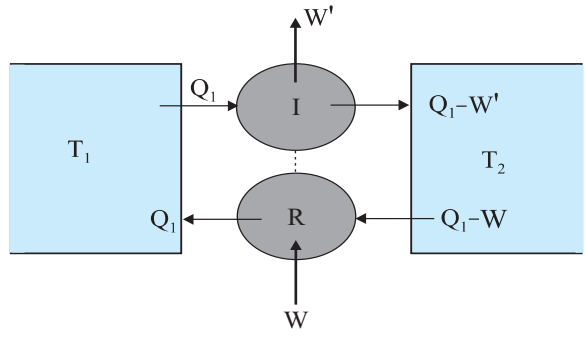
हम जानते हैं कि कार्नो इंजन एक उत्क्रमणीय इंजन है। वास्तव में यही एकमात्र ऐसा इंजन संभव है जो भिन्न तापों के दो ऊष्मा भंडारों के मध्य कार्य करता है। चित्र 11.9 में दर्शाए कार्नो चक्र का हर चरण उत्क्रमित किया जा सकता है। यह उस प्रक्रम के समान होता है, जिसमें T_2 ताप पर ठंडे ऊष्मा भंडार से Q_2 ऊष्मा ली जाती है, निकाय पर W कार्य किया जाता है, तथा गरम ऊष्मा भंडार को Q_1 ऊष्मा स्थानांतरित कर दी जाती है। यह युक्ति एक उत्क्रमणीय प्रशीतक होगी।

अब हम महत्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करेंगे (जिसे कभी-कभी **कार्नो प्रमेय** कहते हैं) (a) दिए हुए गरम तथा ठंडे ऊष्माशयों के क्रमशः दो तापों T_1 तथा T_2 के बीच कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती है तथा (b) कार्नो इंजन की दक्षता कार्यकारी पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती।

परिणाम (a) को सिद्ध करने के लिए हम कल्पना करते हैं कि एक उत्क्रमणीय (कार्नो) इंजन R तथा एक अनुत्क्रमणीय इंजन I एक ही स्रोत (गरम ऊष्मा भंडार) तथा अभिगम (Sink) (ठंडा ऊष्मा भंडार) के बीच कार्यरत हैं । अब हम इन दोनों इंजनों को इस प्रकार संयोजित करते हैं कि I ऊष्मा इंजन की भांति तथा R प्रशीतक की भांति कार्य करें । कल्पना कीजिए

© NCERT not to be republished

कि I स्रोत से Q_1 ऊष्मा अवशोषित करता है, W' कार्य प्रदान करता है तथा $Q_1 - W'$ ऊष्मा अभिगम को मुक्त करता है । हम ऐसा समायोजन करते हैं कि R अधिगम से Q_2 ऊष्मा लेकर तथा उस पर जो कार्य $W = Q_1 - Q_2$ किया जाना है, उसे कराकर उतनी ही ऊष्मा Q_1 स्रोत को वापस करता है । मान लीजिए कि $\eta_R < \eta_I$ है । अर्थात् यदि R इंजन की भांति कार्य करता तो वह I की अपेक्षा कम कार्य निर्गत करता। अर्थात् किसी दी गई ऊष्मा Q_1 के लिए $W < W'$ । यदि R प्रशीतक के रूप में कार्य करता, तो इसका तात्पर्य यह होता कि $Q_2 = Q_1 - W > Q_1 - W'$ । इस प्रकार, युक्तिपूर्ण संयोजित $I - R$ निकाय ठंडे ऊष्मा भंडार से $(Q_1 - W) - (Q_1 - W') = W' - W$ ऊष्मा निकालता है तथा एक चक्र में इतनी ही मात्रा का कार्य उसे सौंप देता है (इस पूरे चक्र में स्रोत या अन्यत्र कोई परिवर्तन नहीं होता)। यह ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम से संबंधित केल्विन-प्लैंक के प्रकथन से सर्वथा विपरीत है । इसलिए यह निश्चयपूर्वक कहना कि $\eta_I > \eta_R$ अनुचित है । अत: समान तापों के मध्य कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती । इसी प्रकार के एक तर्क की रचना यह दर्शाने के लिए भी की जा सकती है कि ऐसे उत्क्रमणीय इंजन की दक्षता जिसमें एक विशेष कार्यकारी पदार्थ है, उस इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती जिसमें कोई अन्य पदार्थ उपयोग होता है । कार्नो इंजन की अधिकतम दक्षता जो समीकरण (11.27) से दी जाती है, कार्नो चक्र की प्रक्रिया को संपादित करने वाले निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती है । अत: हमारे लिए कार्नो इंजन की दक्षता η के परिकलन के लिए कार्यकारी पदार्थ के रूप में आदर्श गैस का उपयोग न्यायसंगत है । आदर्श गैस की अवस्था समीकरण सरल होती है जिसके कारण η का परिकलन सरल हो जाता है, किंतु η के लिए अंतिम परिणाम, समीकरण (11.27), किसी भी कार्नो इंजन के लिए सही है ।



चित्र 11.10 उत्क्रमणीय प्रशीतक (R) से संयुक्त एक अनुत्क्रमणीय इंजन (I) । यदि $W' > W$, तो इसका आशय यह हुआ कि अवशोषक से $W^1 - W$ ऊष्मा निकालकर उसे पूर्णत: कार्य में रूपांतरित कर दिया गया है, जो ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के विपरीत है ।

यह अंतिम टिप्पणी दर्शाती है कि कार्नो इंजन के लिए,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (11.28)$$

एक व्यापक संबंध है जो निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। यहाँ Q_1 व Q_2 कार्नो इंजन में क्रमश: गरम व ठंडे ऊष्मा भंडारों द्वारा समतापीय ढंग से अवशोषित व मुक्त की गई ऊष्माएँ हैं। किसी वास्तविक सर्वव्यापक ऊष्मागतिकीय ताप मापक्रम को परिभाषित करने के लिए हम समीकरण (11.28) का एक सूत्र के रूप में उपयोग कर सकते हैं । यह तापक्रम कार्नो चक्र में प्रयुक्त निकाय के किन्हीं विशेष गुणधर्मों पर निर्भर नहीं करता। वास्तव में, कार्यकारी पदार्थ के रूप में किसी आदर्श गैस के लिए इस ताप का मान वही है जो खंड 11.9 में उल्लेखित आदर्श गैस ताप का है ।

सारांश

1. ऊष्मागतिकी का शून्यवाँ नियम यह अभिव्यक्त करता है कि "दो निकाय जो किसी तीसरे निकाय के साथ स्वतंत्र रूप से तापीय साम्य में हैं, वे एक-दूसरे के साथ भी तापीय साम्य में होते हैं"। शून्यवाँ नियम ताप की अवधारणा का सूत्रपात करता है ।
2. निकाय की आंतरिक ऊर्जा उसके आण्विक घटकों की गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है । इसमें निकाय की संपूर्ण गतिज ऊर्जा सम्मिलित नहीं होती । ऊष्मा और कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण के दो रूप हैं। निकाय व उसके परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊर्जा का स्थानांतरण ऊष्मा के रूप में होता है । कार्य अन्य साधनों (जैसे गैस भरे सिलिंडर के पिस्टन जिससे कुछ भार संबद्ध है, को ऊपर नीचे करने में) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है । इसमें तापांतर समाहित नहीं होता है ।
3. ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण का व्यापक नियम है, जो उस निकाय में लागू होता है जिसमें परिवेश को या परिवेश से (ऊष्मा व कार्य द्वारा) ऊर्जा स्थानांतरण हो । यह बताता है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

© NCERT not to be republished

यहाँ ΔQ निकाय को दी गई ऊष्मा है, ΔW निकाय पर किया गया कार्य है तथा ΔU निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन है ।

4. पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता को हम निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित करते हैं

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ m पदार्थ का द्रव्यमान है तथा ΔQ वह ऊष्मा है जिसके द्वारा पदार्थ के ताप में ΔT की वृद्धि हो जाती है। पदार्थ की मोलीय विशिष्ट ऊष्मा धारिता निम्नांकित सूत्र से परिभाषित की जाती है

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

μ पदार्थ के मोल की संख्या को व्यक्त करता है । किसी ठोस के लिए ऊर्जा के सम विभाजन के नियम से

$$C = 3\ R$$

जो सामान्यतया साधारण तापों पर किए जाने वाले प्रयोगों से प्राप्त परिणामों से मेल खाता है ।

कैलोरी ऊष्मा का पुराना मात्रक है । 1 कैलोरी ऊष्मा की वह मात्रा है जो 1g जल के ताप में 14.5 °C से 15.5 °C तक वृद्धि कर देती है । 1 cal = 4.186 J

5. किसी आदर्श गैस के लिए स्थिर ताप तथा स्थिर दाब पर मोलीय विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ निम्नलिखित संबंध का पालन करती हैं

$$C_P - C_V = R$$

यहाँ R गैस का सार्वत्रिक नियतांक है।

6. किसी ऊष्मागतिकीय निकाय की साम्यावस्था का विवरण अवस्था चरों द्वारा होता है। किसी अवस्था चर का मान केवल उसकी किसी विशेष अवस्था पर निर्भर करता है न कि उस पथ पर जिससे यह अवस्था प्राप्त होती है। अवस्था चरों के उदाहरण हैं : दाब (P), आयतन (V), ताप (T), तथा द्रव्यमान (m)। ऊष्मा और कार्य अवस्था चर नहीं हैं। कोई अवस्था समीकरण (जैसे आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu RT$) विभिन्न अवस्था चरों के मध्य एक संबंध को व्यक्त करता है।

7. कोई स्थैतिककल्प प्रक्रम अत्यंत धीमी गति से संपन्न होने वाला प्रक्रम है जिसमें निकाय परिवेश के साथ पूरे समय तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता हैं। स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के दाब व ताप तथा निकाय के दाब व ताप में अनंत सूक्ष्म अंतर हो सकता है।

8. किसी आदर्श गैस के ताप T पर आयतन V_1 से V_2 तक होने वाले किसी समतापीय प्रसार में अवशोषित ऊष्मा (Q) का मान गैस द्वारा किए गए कार्य (W) के बराबर होता है। प्रत्येक का मान निम्नलिखित है :

$$Q = W = \mu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

9. किसी आदर्श गैस के रुद्धोष्म प्रक्रम में

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक}$$

जहाँ $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$

किसी आदर्श गैस द्वारा अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म प्रक्रम से परिवर्तन में संपादित कार्य है :

$$W = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

© NCERT not to be republished

10. ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कुछ उन प्रक्रमों की स्वीकृति नहीं देता जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुकूल हैं। इसके दो प्रकथन इस प्रकार हैं :

केल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम केवल किसी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का अवशोषण करके उसे पूर्णतया कार्य में रूपांतरित करना हो।

क्लॉसियस का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम ऊष्मा का किसी ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में स्थानांतरण हो।

इसे सरल ढंग से कहा जाए तो द्वितीय नियम यह बताता है कि किसी भी ऊष्मा इंजन की दक्षता $\eta = 1$ नहीं हो सकती अथवा किसी प्रशीतक का निष्पादन गुणांक α अनंत के बराबर नहीं हो सकता।

11. कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार उत्क्रमित किया जाए कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस पहुँच जाएँ और परिवेश में कहीं भी कोई परिवर्तन न हो। प्रकृति के नैसर्गिक प्रक्रम अनुत्क्रमणीय होते हैं। आदर्शीकृत उत्क्रमणीय प्रक्रम स्थैतिककल्प प्रक्रम होता है जिसमें कोई भी क्षयकारी घटक; जैसे – घर्षण, श्यानता आदि विद्यमान नहीं रहते।

12. किन्हीं दो तापों T_1 (स्रोत) तथा T_2 (अभिगम) के मध्य कार्य करने वाला कार्नो इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। दो रुद्धोष्म प्रक्रमों से संयुक्त दो समतापी प्रक्रम कार्नो चक्र का निर्माण करते हैं। कार्नो इंजन की दक्षता निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है :

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{(कार्नो इंजन)}$$

किन्हीं दो तापों के मध्य कार्य करने वाले इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती।

13. यदि $Q > 0$, निकाय को ऊष्मा दी गई।
यदि $Q < 0$, निकाय से ऊष्मा निकाली गई।
यदि $W > 0$, निकाय द्वारा कार्य किया गया।
यदि $W < 0$, निकाय पर कार्य किया गया।

राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
1. आयतन प्रसार गुणांक	α_v	$[K^{-1}]$	K^{-1}	$\alpha_v = 3\,\alpha_l$
2. किसी निकाय को प्रदत ऊष्मा	ΔQ	$[ML^2T^{-2}]$	J	Q अवस्था चर नहीं है।
3. विशिष्ट ऊष्मा धारिता	s	$[L^2T^{-2}K^{-1}]$	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	
ऊष्मा इंजन की दक्षता	η	विमाहीन	–	
प्रशीतक का निष्पादन गुणांक	α	विमाहीन	–	
4. तापीय चालकता	K	$[MLT^{-3}K^{-1}]$	$J\,s^{-1}\,K^{-1}$	$H = KA\frac{dt}{dx}$

विचारणीय विषय

1. किसी पिंड का ताप उसकी माध्य आंतरिक ऊर्जा से संबंधित है न कि उसके द्रव्यमान केंद्र की गतिज ऊर्जा से। बंदूक से दागी गई किसी गोली का उच्च ताप उसकी अधिक चाल के कारण नहीं होता।

2. ऊष्मागतिकी में साम्य उस परिस्थिति की ओर निर्देश करता है जब निकाय की ऊष्मागतिकीय अवस्था का वर्णन करने वाले स्थूल चर, समय पर निर्भर नहीं करते। यांत्रिकी में किसी निकाय की साम्यावस्था से अभिप्राय है कि निकाय पर कार्य करने वाले नेट बल तथा बल आघूर्ण दोनों शून्य होते हैं।

3. ऊष्मागतिकीय साम्य में निकाय के सूक्ष्म संघटक साम्यावस्था में नहीं होते (यांत्रिकी के प्रसंग में)।

© NCERT not to be republished

4. ऊष्माधारिता, व्यापक रूप में उस प्रक्रम पर निर्भर करती है जिससे निकाय तब गुजरता है जब वह ऊष्मा ग्रहण करता है ।

5. समतापीय स्थैतिककल्प प्रक्रमों में, निकाय द्वारा ऊष्मा अवशोषित या निर्गत होती है यद्यपि हर चरण में गैस का ताप वही होता है जो परिवेशीय ऊष्मा भंडार होता है । निकाय तथा ऊष्मा भंडार के मध्य अत्यंत सूक्ष्म तापांतर के कारण ऐसा संभव हो पाता है ।

अभ्यास

11.1 कोई गीज़र 3.0 लीटर प्रति मिनट की दर से बहते हुए जल को 27 ºC से 77 ºC तक गर्म करता है । यदि गीज़र का परिचालन गैस बर्नर द्वारा किया जाए तो ईंधन के व्यय की क्या दर होगी ? बर्नर के ईंधन की दहन-ऊष्मा $4.0\times10^4\,J\,g^{-1}$ है ?

11.2 स्थिर दाब पर 2.0×10^{-2} kg नाइट्रोजन (कमरे के ताप पर) के ताप में 45 ºC वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आपूर्ति की जानी चाहिए ? (N_2 का अणुभार = 28; $R = 8.3\ J\ mol^{-1}\,K^{-1}$) ।

11.3 व्याख्या कीजिए कि ऐसा क्यों होता है :

(a) भिन्न-भिन्न तापों T_1 व T_2 के दो पिण्डों को यदि ऊष्मीय संपर्क में लाया जाए तो यह आवश्यक नहीं कि उनका अंतिम ताप $(T_1 + T_2)/2$ ही हो।

(b) रासायनिक या नाभिकीय संयत्रों में शीतलक (अर्थात् द्रव जो संयत्र के भिन्न-भिन्न भागों को अधिक गर्म होने से रोकता है) की विशिष्ट ऊष्मा अधिक होनी चाहिए।

(c) कार को चलाते-चलाते उसके टायरों में वायुदाब बढ़ जाता है।

(d) किसी बंदरगाह के समीप के शहर की जलवायु, समान अक्षांश के किसी रेगिस्तानी शहर की जलवायु से अधिक शीतोष्ण होती है।

11.4 गतिशील पिस्टन लगे किसी सिलिंडर में मानक ताप व दाब पर 3 मोल हाइड्रोजन भरी है । सिलिंडर की दीवारें ऊष्मारोधी पदार्थ की बनी हैं तथा पिस्टन को उस पर बालू की परत लगाकर ऊष्मारोधी बनाया गया है । यदि गैस को उसके आरंभिक आयतन के आधे आयतन तक संपीडित किया जाए तो गैस का दाब कितना बढ़ेगा ?

11.5 रुद्धोष्म विधि द्वारा किसी गैस की अवस्था परिवर्तन करते समय उसकी एक साम्यावस्था A से दूसरी साम्यावस्था B तक ले जाने में निकाय पर 22.3 J कार्य किया जाता है । यदि गैस को दूसरी प्रक्रिया द्वारा अवस्था A से अवस्था B में लाने में निकाय द्वारा अवशोषित नेट ऊष्मा 9.35 cal है तो बाद के प्रकरण में निकाय द्वारा किया गया नेट कार्य कितना है? (1 cal = 4.19 J)।

11.6 समान धारिता वाले दो सिलिंडर A तथा B एक-दूसरे से स्टॉपकॉक के द्वारा जुड़े हैं । A में मानक ताप व दाब पर गैस भरी है जबकि B पूर्णतः निर्वातित है । स्टॉपकॉक यकायक खोल दी जाती है । निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(*a*) सिलिंडर A तथा B में अंतिम दाब क्या होगा ?

(*b*) गैस की आंतरिक ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा ?

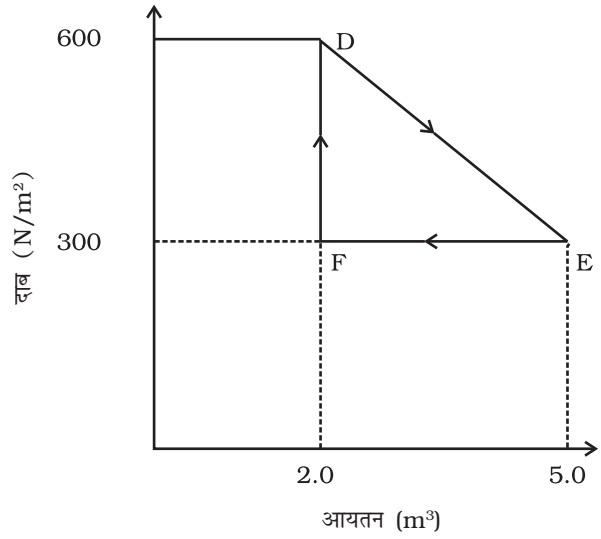
(c) गैस के ताप में क्या परिवर्तन होगा ?

(*d*) क्या निकाय की माध्यमिक अवस्थाएँ (अंतिम साम्यावस्था प्राप्त करने के पूर्व) इसके *P-V-T* पृष्ठ पर होंगी ?

11.7 एक हीटर किसी निकाय को 100 W की दर से ऊष्मा प्रदान करता है। यदि निकाय 75 J s^{-1} की दर से कार्य करता है, तो आंतरिक ऊर्जा की वृद्धि किस दर से होगी?

11.8 किसी ऊष्मागतिकीय निकाय को मूल अवस्था से मध्यवर्ती अवस्था तक चित्र (11.11) में दर्शाये अनुसार एक रेखीय प्रक्रम द्वारा ले जाया गया है।

© NCERT not to be republished



चित्र 11.11

एक समदाबी प्रक्रम द्वारा इसके आयतन को E से F तक ले जाकर मूल मान तक कम कर देते हैं। गैस द्वारा D से E तथा वहाँ से F तक कुल किए गए कार्य का आकलन कीजिए।

© NCERT not to be republished

अध्याय 12

11089CH13

अणुगति सिद्धांत

12.1 भूमिका
12.2 द्रव्य की आण्विक प्रकृति
12.3 गैसों का व्यवहार
12.4 आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत
12.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम
12.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता
12.7 माध्य मुक्त पथ

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास
अतिरिक्त अभ्यास

12.1 भूमिका

बॉयल ने 1661 में एक नियम की खोज की, जिसे उनके नाम से जाना जाता है। बॉयल, न्यूटन एवं अन्य कई वैज्ञानिकों ने गैसों के व्यवहार को यह मानकर समझाने की चेष्टा की कि गैसें अत्यंत सूक्ष्म परमाण्वीय कणों से बनी हैं। वास्तविक परमाणु सिद्धांत तो इसके 150 से भी अधिक वर्ष बाद ही स्थापित हो पाया। अणुगति सिद्धांत इस धारणा के आधार पर गैसों के व्यवहार की व्याख्या करता है कि गैसों में अत्यंत तीव्र गति से गतिमान परमाणु अथवा अणु होते हैं। यह संभव भी है, क्योंकि ठोसों तथा द्रवों के परमाणुओं के बीच अंतरापरमाणुक बल, जो कि लघु परासी बल है, एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है जबकि गैसों में इस बल को उपेक्षणीय माना जा सकता है। अणुगति सिद्धांत, 19वीं शताब्दी में, मैक्सवेल, बोल्ट्ज़मान और अन्य वैज्ञानिकों द्वारा विकसित किया गया था। यह असाधारण रूप से सफल सिद्धांत रहा है। यह दाब एवं ताप की एक आण्विक व्याख्या प्रस्तुत करता है तथा आवोगाद्रो की परिकल्पना और गैस नियमों के अनुरूप है। यह बहुत सी गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता की ठीक-ठीक व्याख्या करता है। यह श्यानता, चालकता, विसरण जैसे गैसों के मापनीय गुणों को आण्विक प्राचलों से जोड़ता है और अणुओं की आमापों एवं द्रव्यमानों का आकलन संभव बनाता है। इस अध्याय में अणुगति सिद्धांत का आरंभिक ज्ञान दिया गया है।

12.2 द्रव्य की आण्विक प्रकृति

बीसवीं शताब्दी के महान वैज्ञानिकों में एक रिचर्ड फीनमेन, इस खोज को कि 'द्रव्य परमाणुओं से बना है' अत्यंत महत्वपूर्ण मानते हैं। यदि हम विवेक से काम नहीं लेंगे, तो (नाभिकीय विध्वंस के कारण) मानवता का विनाश हो सकता है, या फिर वह (पर्यावरणीय विपदाओं के कारण) विलुप्त हो सकती है। यदि वैसा होता है और संपूर्ण वैज्ञानिक ज्ञान के नष्ट होने की स्थिति उत्पन्न हो जाती है तो फीनमेन विश्व की अगली पीढ़ी के प्राणियों को परमाणु परिकल्पना संप्रेषित करना चाहेंगे। परमाणु परिकल्पना : सभी वस्तुएँ परमाणुओं से बनी हैं, जो अनवरत

© NCERT not to be republished

प्राचीन भारत एवं यूनान में परमाण्वीय परिकल्पना

यद्यपि, आधुनिक विज्ञान से परमाण्वीय दृष्टिकोण का परिचय कराने का श्रेय जॉन डाल्टन को दिया जाता है, तथापि, प्राचीन भारत और यूनान के विद्वानों ने बहुत पहले ही परमाणुओं और अणुओं के अस्तित्व का अनुमान लगा लिया था। भारत में वैशेषिक दर्शन, जिसके प्रणेता कणाद थे (छठी शताब्दी ई.पू.), में परमाण्वीय प्रारूप का विस्तृत विकास हुआ । उन्होंने परमाणुओं को अविभाज्य, सूक्ष्म तथा द्रव्य का अविभाज्य अंश माना । यह भी तर्क दिया गया कि यदि द्रव्य को विभाजित करने के क्रम का कोई अन्त न हो तो किसी सरसों के दाने तथा मेरु पर्वत में कोई अंतर नहीं रहेगा । चार प्रकार के परमाणुओं (संस्कृत में सूक्ष्मतम कण को **परमाणु** कहते हैं) की कल्पना की गई जिनकी अपनी अभिलाक्षणिक संहति तथा अन्य विशेषताएँ थीं जो इस प्रकार हैं : भूमि (पृथ्वी), अप् (जल), तेज (अग्नि) तथा वायु (हवा) । उन्होंने आकाश (अंतरिक्ष) को सतत् तथा अक्रिय माना और यह बताया कि इसकी कोई परमाण्वीय संरचना नहीं है । परमाणु संयोग करके विभिन्न अणुओं का निर्माण करते हैं (जैसे दो परमाणु संयोग करके एक द्विपरमाणुक अणु 'द्वैणुक', तीन परमाणुओं के संयोग से 'त्रसरेणु' अथवा त्रिपरमाणुक अणु बनाते हैं), इनके गुण संघटक अणुओं की प्रकृति एवं अनुपात पर निर्भर करते हैं । अनुमानों द्वारा अथवा उन विधियों द्वारा जो हमें ज्ञात नहीं हैं, उन्होंने परमाणुओं के आकार का आकलन भी किया । इन आकलनों में विविधता है । ललित विस्तार – बुद्ध की एक प्रसिद्ध जीवनी जिसे मुख्य रूप से ईसा पूर्व द्वितीय शताब्दी में लिखा गया, में परमाणु का आकार 10^{-10}m की कोटि का बताया गया है । यह आकलन परमाणु के आकार के आधुनिक आकलनों के निकट है ।

पुरातन ग्रीस में, डेमोक्रिटस (चतुर्थ शताब्दी ई.पू.) को उनकी परमाण्वीय परिकल्पना के लिए सर्वश्रेष्ठ माना जाता है। ग्रीक भाषा में 'Atom' शब्द का अर्थ है 'अविभाज्य' । उनके अनुसार परमाणु एक दूसरे से भौतिक रूप में, आकृति में, आकार में तथा अन्य गुणों में भिन्न होते हैं तथा इसी के परिणामस्वरूप उनके संयोग द्वारा निर्मित पदार्थों के भिन्न-भिन्न गुण होते हैं। उनके विचारों के अनुसार जल के अणु चिकने तथा गोल होते हैं तथा वे एक दूसरे के साथ जुड़ने योग्य नहीं होते, यही कारण है कि जल आसानी से प्रवाहित होने लगता है। भूमि के परमाणु खुरदरे तथा काँटेदार होते हैं जिसके कारण वे एक दूसरे को जकड़े रहते हैं तथा कठोर पदार्थ निर्मित करते हैं । उनके विचार से अग्नि के परमाणु कँटीले होते हैं जिसके कारण वे पीड़ादायक जलन उत्पन्न करते हैं। ये धारणाएँ चित्ताकर्षक होते हुए भी, और आगे विकसित न हो सकीं। इसका कदाचित यह कारण हो सकता है कि ये विचार उन दार्शनिकों की अंतर्दर्शी कल्पनाएं एवं अनुमान मात्र थे, जिनका न तो परीक्षण किया गया था और न ही मात्रात्मक प्रयोगों (जो कि आधुनिक विज्ञान का प्रमाण-चिह्न हैं) द्वारा संशोधन ।

गतिमान अत्यंत सूक्ष्म कण हैं, बीच में अल्प दूरी होने पर ये एक दूसरे को आकर्षित करते हैं पर एक दूसरे में निष्पीडित किए जाने पर प्रतिकर्षित करने लगते हैं।

यह चिंतन कि द्रव्य सतत नहीं हो सकता, कई स्थानों और संस्कृतियों में विद्यमान था। भारत में कणाद और यूनान में डेमोक्रिटस ने यह सुझाव दिया था कि द्रव्य अविभाज्य अवयवों का बना हो सकता है। प्रायः वैज्ञानिक आण्विक सिद्धांत की खोज का श्रेय डाल्टन को देते हैं। तत्वों के संयोजन द्वारा यौगिक बनने की प्रक्रिया में पालन किए जाने वाले निश्चित अनुपात और बहुगुणक अनुपात के नियमों की व्याख्या करने के लिए डाल्टन ने यह सिद्धांत प्रस्तावित किया था। पहला नियम बताता है कि किसी यौगिक में अवयवों के द्रव्यमानों का अनुपात नियत रहता है। दूसरे नियम का कथन है कि जब दो तत्व मिलकर दो या अधिक यौगिक बनाते हैं तो एक तत्व के निश्चित द्रव्यमान से संयोजित होने वाले दूसरे तत्व के द्रव्यमानों में एक सरल पूर्णांकीय अनुपात होता है।

इन नियमों की व्याख्या करने के लिए, लगभग 200 वर्ष पूर्व डाल्टन ने सुझाया कि किसी तत्व के सूक्ष्मतम अवयव परमाणु हैं। एक तत्व के सभी परमाणु सर्वसम होते हैं पर ये दूसरे तत्वों के परमाणुओं से भिन्न होते हैं। अल्प संख्या में तत्वों के परमाणु संयोग करके यौगिक का अणु बनाते हैं। 19वीं शताब्दी के आरंभ में दिए गए गै-लुसैक के नियम के अनुसार: जब गैसें रासायनिक रूप से संयोजन करके कोई अन्य गैस बनाती हैं, तो उनके आयतन लघु पूर्णांकों के अनुपात में होते हैं। आवोगाद्रो का नियम (या परिकल्पना) बताता है कि समान ताप और दाब पर गैसों के समान आयतनों में अणुओं की संख्या समान होती है। आवोगाद्रो नियम को डाल्टन के सिद्धांत से जोड़ने पर गै-लुसैक के नियम की व्याख्या की जा सकती है। क्योंकि, तत्व प्रायः अणुओं के रूप में होते हैं, डाल्टन के परमाणु सिद्धांत को द्रव्य का आण्विक सिद्धांत भी कहा जा सकता है। इस सिद्धांत को अब वैज्ञानिकों द्वारा मान्यता है। तथापि, उन्नीसवीं शताब्दी के अंत तक भी ऐसे कई प्रसिद्ध

© NCERT not to be republished

वैज्ञानिक थे जो परमाणु सिद्धांत में विश्वास नहीं करते थे।

आधुनिक काल में, बहुत से प्रेक्षणों से, अब हम यह जानते हैं कि पदार्थ अणुओं (एक या अधिक परमाणुओं से बने) से मिलकर बना होता है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी एवं क्रमवीक्षण सुरंगक सूक्ष्मदर्शी की सहायता से अब हम उनको देख सकते हैं। परमाणु का आमाप लगभग एक ऐंग्स्ट्रॉम (1Å) (10^{-10}m) है। ठोसों में, जहाँ कण कसकर एक दूसरे से जुड़े हैं, परमाणुओं के बीच कुछ ऐंग्स्ट्रॉम (2 Å) की दूरी है। द्रवों में भी परमाणुओं के बीच इतनी ही दूरी है। द्रवों में परमाणु एक दूसरे के साथ उतनी दृढ़ता से नहीं बँधे होते जितने ठोसों में, और, इसलिए इधर-उधर गति कर सकते हैं। इसीलिए, द्रवों में प्रवाह होता है। गैसों में अंतरपरमाणुक दूरी दसों एंग्स्ट्रॉम में होती है। वह औसत दूरी जो कोई अणु बिना संघट्ट किए चल सकता है उसकी **औसत मुक्त पथ** कहलाती है। गैसों में औसत मुक्त पथ हजारों एंग्स्ट्रॉम की कोटि का होता है। अतः गैसों में परमाणु अत्यधिक स्वतंत्र होते हैं और बड़ी-बड़ी दूरियों तक बिना संघट्ट किए जा सकते हैं। यदि बंद करके न रखा जाए, तो गैसें विसरित हो जाती हैं। ठोसों और द्रवों में पास-पास होने के कारण परमाणुओं के बीच के अंतर परमाणुक बल महत्वपूर्ण हो जाते हैं। ये बल अधिक दूरियों पर आकर्षण और अल्प दूरी पर प्रतिकर्षण बल होते हैं। जब परमाणु एक दूसरे से कुछ एंग्स्ट्रॉम की दूरी पर होते हैं तो वे एक दूसरे को आकर्षित करते हैं पर बहुत पास लाए जाने पर प्रतिकर्षित करने लगते हैं। गैस का स्थैतिक दिखाई पड़ना भ्रामक है। गैस सक्रियता से भरपूर है और इनका संतुलन गतिक संतुलन है। गतिक संतुलन में अणु एक दूसरे से संघट्ट करते हैं और संघट्ट की अवधि में उनकी चालों में परिवर्तन होता है। केवल औसत गुण नियत रहते हैं।

परमाणु सिद्धांत हमारी खोजों का अंत नहीं है बल्कि यह तो इसका एक आरंभ है। अब हम जानते हैं कि परमाणु अविभाज्य या मूल कण नहीं हैं। उनमें एक नाभिक और इलेक्ट्रॉन होते हैं। नाभिक स्वयं प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों से बने होते हैं। यही नहीं प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन क्वार्कों से मिलकर बने होते हैं। हो सकता है कि क्वार्क भी इस कहानी का अंत न हों। यह भी हो सकता है कि स्ट्रिंग (तंतु) जैसी कोई प्राथमिक सत्ता हो। प्रकृति हमारे लिए सदैव ही विलक्षण भरी है, पर, सत्य की खोज आनंददायक होती है और हर आविष्कार में अपना सौंदर्य होता है। इस अध्याय में हम अपना अध्ययन गैसों के (और थोड़ा बहुत ठोसों के) व्यवहार तक ही सीमित रखेंगे। इसके लिए हम उन्हें अनवरत गति करते गतिमान कणों का समूह मानेंगे।

12.3 गैसों का व्यवहार

ठोसों एवं द्रवों की तुलना में गैसों के गुणों को समझना आसान है। यह मुख्यतः इस कारण होता है, क्योंकि, गैस में अणु एक दूसरे से दूर-दूर होते हैं और दो अणुओं के संघट्ट की स्थिति को छोड़कर उनके बीच पारस्परिक अन्योन्य क्रियाएँ उपेक्षणीय होती हैं जैसे निम्न दाब व उनके द्रवित (या घनीभूत) होने के तापों की अपेक्षा अत्यधिक उच्च ताप पर अपने ताप, दाब और आयतन में लगभग निम्नलिखित संबंध दर्शाती हैं (देखिए अध्याय 10)

$$PV = KT \qquad (12.1)$$

यह संबंध गैस के दिए गए नमूने के लिए है। यहाँ T केल्विन (या परम) पैमाने पर ताप है, K दिए गए नमूने के लिए नियतांक है परंतु आयतन के साथ परिवर्तित होता है यदि अब हम परमाणु या अणु की धारणा लागू करें तो, K दिए गए नमूने में अणुओं की संख्या N के अनुक्रमानुपाती है। हम लिख सकते हैं, $K = N k$। प्रयोग हमें बताते हैं कि k का मान सभी गैसों के लिए समान है। इसको बोल्ट्समान नियतांक कहा जाता है और k_B द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

$$\frac{P_1V_1}{N_1T_1} = \frac{P_2V_2}{N_2T_2} = \text{नियतांक} = k_B \qquad (12.2)$$

यदि P, V एवं T समान हों तो N भी सभी गैसों के लिए समान होगा। यही आवोगाद्रो परिकल्पना है कि समान ताप एवं दाब पर सभी गैसों के प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या समान होती है। किसी गैस के 22.4 लीटर आयतन में यह संख्या 6.02×10^{23} है। इस संख्या को आवोगाद्रो संख्या कहा जाता है और संकेत N_A द्वारा चिह्नित किया जाता है। किसी गैस के 22.4 लीटर आयतन का STP (मानक ताप = 273K एवं मानक दाब = 1 एटमौस्फियर) पर द्रव्यमान उस गैस के ग्राम में व्यक्त अणु द्रव्यमान के बराबर है। पदार्थ की यह मात्रा मोल (mole) कहलाती है (अधिक परिशुद्ध परिभाषा के लिए अध्याय 1 देखिए)। आवोगाद्रो ने रासायनिक अभिक्रियाओं के अध्ययन के आधार पर यह अनुमान लगा लिया था कि समान ताप और दाब पर गैसों के समान आयतन में अणुओं की संख्या समान होगी। अणुगति सिद्धांत इस परिकल्पना को न्यायसंगत ठहराता है।

आदर्श गैस समीकरण को हम इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$PV = \mu RT \qquad (12.3)$$

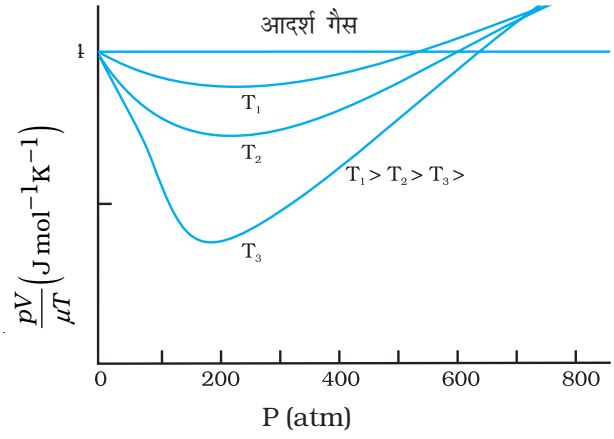
जहाँ μ मोलों की संख्या है एवं $R = N_A k_B$ एक सार्वत्रिक नियतांक है। ताप T, परम ताप है। परम ताप के लिए केल्विन पैमाना चुनें, तो $R = 8.314$ J mol^{-1}K^{-1}। यहाँ

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{N}{N_A} \qquad (12.4)$$

जहाँ, M गैस का द्रव्यमान है जिसमें N अणु हैं, M_0 मोलर द्रव्यमान है एवं N_A आवोगाद्रो संख्या है। समीकरण (12.4) का उपयोग करके समीकरण (12.3) को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$PV = k_B NT \quad \text{अथवा} \quad P = k_B nT$$

© NCERT not to be republished



चित्र 12.1 *निम्न दाब और उच्च तापों पर वास्तविक गैसों का व्यवहार आदर्श गैसों के सदृश होने लगता है।*

जहाँ n संख्या घनत्व, अर्थात् प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या है। k_B उपरिवर्णित बोल्ट्ज़मान नियतांक हैं। SI मात्रकों में इसका मान 1.38×10^{-23} J K^{-1} है।

समीकरण (12.3) का दूसरा उपयोगी रूप है,

$$P = \frac{\rho RT}{M_0} \qquad (12.5)$$

जहाँ ρ गैस का द्रव्यमान घनत्व है।

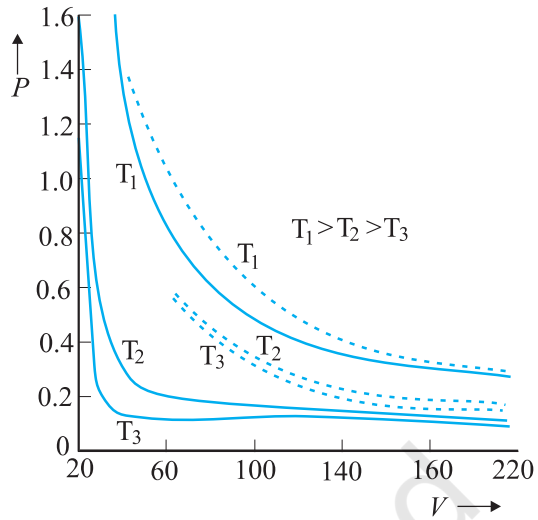
कोई गैस, जो समीकरण (12.3) का, सभी तापों और दाबों पर पूर्णतः पालन करती है **आदर्श गैस** कहलाती है। अतः आदर्श गैस किसी गैस का सरल सैद्धांतिक निदर्श है। कोई भी वास्तविक गैस सही अर्थों में आदर्श गैस नहीं होती। चित्र 12.1 में तीन भिन्न तापों पर किसी वास्तविक गैस का आदर्श गैस से विचलन दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए, निम्न दाबों और उच्च तापों पर सभी वक्र आदर्श गैस व्यवहार के सदृश होने लगते हैं।

निम्न दाबों और उच्च तापों पर अणु दूर-दूर होते हैं और उनके बीच की आण्विक अन्योन्य क्रियाएँ उपेक्षणीय होती हैं। अन्योन्य क्रियाओं की अनुपस्थिति में गैस एक आदर्श गैस की तरह व्यवहार करती है।

समीकरण 12.3 में यदि हम μ एवं T को निश्चित कर दें, तो,

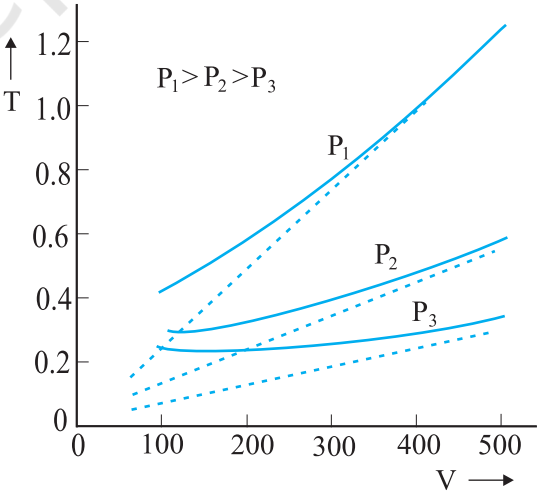
$$PV = \text{नियतांक} \qquad (12.6)$$

अर्थात्, नियत ताप पर, गैस के किसी दिए गए द्रव्यमान का दाब उसके आयतन के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यही प्रसिद्ध **बॉयल का नियम** है। चित्र 12.2 में प्रायोगिक P-V वक्र एवं बॉयल के नियमानुसार भविष्यवाची सैद्धांतिक वक्र, तुलना के लिए एक साथ दर्शाये गए हैं। एक बार फिर आप देख सकते हैं कि निम्न दाब और उच्च ताप पर प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक



चित्र 12.2 *भाप के लिए, तीन भिन्न तापों पर प्रायोगिक P-V वक्रों (ठोस रेखाएँ) की बॉयल के नियम (बिंदुकित रेखाएँ) से तुलना। P का मान 22 atm के मात्रकों में है और V का मान 0.09 लीटर के मात्रकों में है।*

वक्रों में संगति स्पष्ट दृष्टिगोचर होता है। अब, यदि आप P को नियत रखें तो समीकरण (12.1) दर्शाती है कि $V \propto T$ अर्थात्, नियत दाब पर किसी दी गई गैस का आयतन उसके परम ताप T के अनुक्रमानुपाती होता है **(चार्ल्स का नियम)**। चित्र 12.3 देखिए।



चित्र 12.3 *तीन भिन्न दाबों के लिए CO_2 के प्रायोगिक T-V वक्रों की (पूर्ण रेखाओं द्वारा प्रदर्शित) चार्ल्स नियमानुसार प्राप्त सैद्धांतिक वक्रों से (बिंदुकित रेखाओं द्वारा प्रदर्शित) तुलना। T, 300 K के मात्रकों में एवं V, 0.13 लीटर के मात्रकों में है।*

© NCERT not to be republished

अंत में, हम एक बर्तन में रखे गए, परस्पर अन्योन्य क्रियाएँ न करने वाली आदर्श गैसों के मिश्रण पर विचार करते हैं, जिसमें μ_1 मोल गैस-1 के, μ_2 मोल गैस-2 के और इसी प्रकार अन्य गैसों के विभिन्न मोल हैं। बर्तन का आयतन V है, गैस का परम ताप T एवं दाब P है। मिश्रण की अवस्था का समीकरण लिखें तो,

$$PV = (\mu_1 + \mu_2 + \dots)\, RT \qquad (12.7)$$

अर्थात् $$P = \mu_1 \frac{RT}{V} + \mu_2 \frac{RT}{V} + \dots \qquad (12.8)$$

$$= P_1 + P_2 + \dots \qquad (12.9)$$

स्पष्टतः, $P_1 = \mu_1 RT/V$ वह दाब है जो ताप और आयतन की समान अवस्थाओं में अन्य सभी गैसों की अनुपस्थिति में केवल गैस-1 के कारण होता। इस दाब को गैस का आंशिक दाब कहते हैं। अतः आदर्श गैसों के किसी मिश्रण का कुल दाब मिश्रण में विद्यमान गैसों के आंशिक दाबों के योग के बराबर होता है। यह डाल्टन का आंशिक दाबों का नियम है।

अब हम कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करेंगे जिनसे हमें अणुओं द्वारा घेरे गए आयतन और एक अणु के आयतन के विषय में जानकारी प्राप्त होगी।

उदाहरण 12.1 जल का घनत्व 1000 kg m^{-3} है। 100 °C और 1 atm दाब पर जलवाष्प का घनत्व 0.6 kg m^{-3} हैं। एक अणु के आयतन को कुल अणुओं की संख्या से गुणा करने पर हमें आण्विक आयतन प्राप्त होता है। ताप और दाब की उपरोक्त अवस्था में जलवाष्प के कुल आयतन और इसके आण्विक आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : जल के किसी दिए गए द्रव्यमान के लिए यदि घनत्व कम हो, तो आयतन अधिक होगा। अतः, वाष्प का आयतन $1000/0.6 = 1/(6\times10^{-4})$ गुणा अधिक है। यदि स्थूल जल और जल के अणुओं के घनत्व समान हैं, तो गैस के अणुओं वाले भाग के आयतन, तथा उन्हीं अणुओं का द्रवित होकर जल की अवस्था में आयतन, का अनुपात 1 होगा। चूंकि वाष्प अवस्था में आयतन बढ़ गया है, अतः आंशिक आयतन उसी अनुपात (यानि 6×10^{-4} गुणा) में कम हो जाएगा। ◀

उदाहरण 12.2 उदाहरण 12.1 में दिए गए आंकड़ों का उपयोग करके जल के एक अणु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : द्रव(या ठोस) प्रावस्था में, जल के अणु बहुत पास-पास संकुलित होते हैं। अतः जल के अणुओं का घनत्व, मोटे तौर पर स्थूल जल के घनत्व = 1000 kg m^{-3} ले सकते हैं। जल के एक अणु का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें इसका द्रव्यमान जानने की आवश्यकता होगी। हमें ज्ञात है कि एक मोल जल का द्रव्यमान लगभग

$(2 + 16) = 18\ g = 0.018\ kg$

चूंकि 1 मोल में लगभग 6×10^{23} अणु (आवोगाद्रो संख्या) होते हैं, जल के एक अणु का द्रव्यमान = $(0.018)/(6\times10^{23})$ kg $= 3\times10^{-26}$ kg है। अतः जल के एक अणु के आयतन का रूक्ष आकलन इस प्रकार किया जाता है :

जल के एक अणु का आयतन
$= (3\times10^{-26}\ kg)/(1000\ kg\ m^{-3})$
$= 3\times10^{-29}\ m^3$
$= (4/3)\,\pi$ (त्रिज्या)^3
जल के अणु की त्रिज्या $\approx 2\times10^{-10}$ m
$= 2$ Å ◀

उदाहरण 12.3 जल के अणुओं के बीच औसत दूरी (अंतर परमाणुक दूरी) कितनी है? इसके लिए आप उदाहरण (12.1) एवं (12.2) में दिए गए आंकड़ों का उपयोग कर सकते हैं।

हल : जल के किसी द्रव्यमान का आयतन, वाष्प प्रावस्था में, द्रव प्रावस्था में इसी द्रव्यमान के आयतन का 1.67×10^3 गुना होता है (उदाहरण 12.1)। इतने गुना ही जल के प्रत्येक अणु द्वारा घेरे गए आयतन में वृद्धि हो जाती है। जब आयतन में 10^3 गुनी वृद्धि हो जाती है, तो त्रिज्या $V^{1/3}$ अर्थात् 10 गुना हो जाती है। इस तरह त्रिज्या 10×2 Å $= 20$ Å हो जाती है अर्थात् अणुओं के बीच की दूरी $2 \times 20 = 40$ Å हो जाती है। ◀

उदाहरण 12.4 एक बर्तन में दो अक्रिय गैसें : निऑन (एकपरमाणुक) और ऑक्सीजन (द्विपरमाणुक) भरी हैं। इनके आंशिक दाबों का अनुपात 3 : 2 है। आकलन कीजिए, (i) उनके अणुओं की संख्या का अनुपात, (ii) बर्तन में निऑन एवं ऑक्सीजन के द्रव्यमान घनत्वों का अनुपात। Ne का परमाणु द्रव्यमान 20.2 u एवं ऑक्सीजन का अणु द्रव्यमान = 32.0 u ।

हल : किसी दिए गए ताप पर गैसों के मिश्रण में, किसी एक गैस का आंशिक दाब वह दाब है जो उसी ताप पर बर्तन में भरी होने पर यह अकेली गैस आरोपित करती (अक्रिय गैसों के एक मिश्रण का कुल दाब, अवयवी गैसों के आंशिक दाबों के योग

© NCERT not to be republished

के बराबर होता है।)। प्रत्येक गैस (आदर्श गैस मानते हुए) गैस नियम का पालन करती है। चूंकि दो गैसों के मिश्रण में V एवं T दोनों के लिए समान हैं, $P_1V = \mu_1 RT$ एवं $P_2V = \mu_2 RT$, अर्थात् $(P_1/P_2) = (\mu_1 / \mu_2)$। यहाँ 1 एवं 2 क्रमशः निऑन एवं ऑक्सीजन को इंगित करते हैं।

$(P_1/P_2) = (3/2)$ (दिया है), $(\mu_1/\mu_2) = 3/2$

(i) परिभाषा के अनुसार, $\mu_1 = (N_1/N_A)$ एवं $\mu_2 = (N_2/N_A)$ जहाँ N_1 एवं N_2 क्रमशः गैस-1 एवं गैस-2 में अणुओं की संख्या है तथा N_A आवोगाद्रो संख्या है।

इस प्रकार, $(N_1/N_2) = (\mu_1 / \mu_2) = 3/2$

(ii) हम यह भी लिख सकते हैं कि $\mu_1 = (m_1/M_1)$ एवं $\mu_2 = (m_2/M_2)$ जहाँ m_1 एवं m_2 गैस-1 तथा गैस-2 के द्रव्यमान हैं और M_1 तथा M_2 उनके आण्विक द्रव्यमान हैं। (m_1 एवं M_1 तथा m_2 एवं M_2 को एक ही मात्रक में व्यक्त किया जाना चाहिए)। यदि ρ_1 एवं ρ_2 क्रमशः गैस-1 एवं गैस-2 के द्रव्यमान घनत्व हों तो,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1/V}{m_2/V} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{20.2}{32.0} = 0.947$$ ◀

12.4 आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत

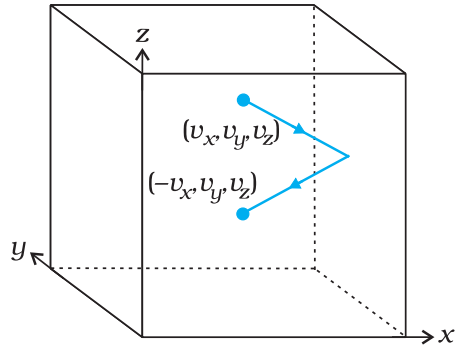
गैसों का अणुगति सिद्धांत इस मान्यता पर आधारित है कि द्रव्य अणुओं का बना है। गैस के किसी दिए गए द्रव्यमान में अति विशाल (प्रारूपिक मान आवोगाद्रो संख्या की कोटि का) संख्या में अणु होते हैं जो लगातार यादृच्छिक गति करते हैं। सामान्य ताप और दाब पर अणुओं के बीच की दूरी अणु के आकार (2 Å) की तुलना में 10 गुने से भी अधिक होती है। इसलिए अणुओं के बीच उपेक्षणीय अन्योन्य क्रिया होती है और ऐसा हम मान सकते हैं वे न्यूटन के गति के प्रथम नियम के अनुसार स्वतंत्र रूप से सरल रेखा में चलते हैं, तथापि, कभी-कभी वे एक दूसरे के अत्यधिक निकट आ जाते हैं, तब वे अंतर-आण्विक बल का अनुभव करते हैं और उनके वेग परिवर्तित हो जाते हैं। अणुओं के बीच की इस अन्योन्य क्रिया को संघट्ट कहते हैं। इस प्रकार अणु लगातार परस्पर और धारक पात्र की दीवारों से संघट्ट करके अपने वेग परिवर्तित करते रहते हैं। ये सभी संघट्ट प्रत्यास्थ होते हैं। अणुगति सिद्धांत के आधार पर हम गैस के दाब के लिए एक व्यंजक व्युत्पन्न कर सकते हैं।

हम इस मूल धारणा से प्रारंभ करते हैं कि गैस के अणु सतत यादृच्छिक गति में हैं और वे एक दूसरे से और धारक पात्र की दीवारों से संघट्ट करते रहते हैं। अणुओं के संघट्ट चाहे पारस्परिक हों, या धारक पात्र की दीवार से ये सभी संघट्ट प्रत्यास्थ होते हैं। इसका अर्थ है कि इनकी कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है। कुल संवेग भी, जैसा प्रायः होता है, संरक्षित रहता है।

12.4.1 किसी आदर्श गैस का दाब

माना कि l भुजा के किसी घनाकार बर्तन में कोई आदर्श गैस भरी है। चित्र 12.4 में दर्शाए अनुसार बर्तन की भुजाएँ संदर्भ अक्षों के समांतर हैं। एक अणु जिसका वेग (v_x, v_y, v_z) है, yz-तल के समांतर दीवार, जिसका क्षेत्रफल A $(= l^2)$ है, पर संघात करता है। क्योंकि संघट्ट प्रत्यास्थ है, यह अणु दीवार से टकराकर उसी वेग से वापस लौटता है। संघट्ट के फलस्वरूप इसके वेग के y और z घटक तो परिवर्तित नहीं होते परंतु x-घटक का चिह्न उत्क्रमित हो जाता है। अर्थात् संघट्ट के पश्चात वेग $(-v_x, v_y, v_z)$ हो जाता है। इस अणु के संवेग में परिवर्तन $-mv_x - (mv_x) = -2mv_x$ होगा। संवेग संरक्षण के नियमानुसार इतना ही संवेग $= 2mv_x$ संघट्ट में दीवार को प्रदान किया जाएगा।

दीवार पर आरोपित बल (एवं दाब) का परिकलन करने के लिए, हमें प्रति एकांक समय में दीवार पर प्रदान किए जाने वाले संवेग का परिकलन करना होगा। एक अल्प काल-अंतराल Δt में कोई अणु जिसके वेग का x-अवयव v_x है दीवार से संघट्ट करेगा यदि यह दीवार से $v_x \Delta t$ दूरी के भीतर है। अर्थात् वह



चित्र 12.4 गैस के एक अणु का धारक की दीवार से प्रत्यास्थ संघट्ट।

© NCERT not to be republished

सभी अणु, जो दीवार के पास $Av_x\Delta t$ आयतन में हैं; Δt समय में केवल वही दीवार से संघात कर सकेंगे। परंतु औसतन इन अणुओं में से आधे दीवार की ओर गति करते हैं और आधे दीवार से दूर गति करते हैं। अतः (v_x, v_y, v_z) वेग से चलते हुए अणुओं में से $\frac{1}{2}A v_x \Delta t\, n$ अणु Δt समय में दीवार से संघात करेंगे, यहाँ n प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या है। तब Δt समय में अणुओं द्वारा दीवार को प्रदान किया गया संवेग होगा,

$$Q = (2mv_x)\,(-\,n\,A\,v_x\,\Delta t) \qquad (12.10)$$

दीवार पर लगा बल संवेग हस्तांतरण की दर $Q/\Delta t$ एवं दाब प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगा बल है,

$$P = Q/(A\,\Delta t) = n\,m\,v_x^2 \qquad (12.11)$$

वास्तव में, गैस के सभी अणुओं का वेग समान नहीं होता, वेग अणुओं पर वितरित रहते हैं। अतः, उपरोक्त समीकरण अणुओं के उस समूह के कारण दाब को व्यक्त करती है जिनकी x-दिशा में चाल v_x है और n इस ही अणु समूह का संख्या घनत्व है। कुल दाब ज्ञात करने के लिए सभी समूहों के योगदानों का संकलन करना होगा। तब,

$$P = n\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.12)$$

जहाँ $\overline{v_x^2}$, v_x^2 का औसत है। अब, क्योंकि गैस समदैशिक है, अर्थात् धारक पात्र में अणुओं के वेग की कोई वरीय दिशा नहीं है, इसलिए सममिति के अनुसार,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_3^2} =$$
$$(1/3)\,[\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_3^2}\,] = (1/3)\,\overline{v^2} \qquad (12.13)$$

जहाँ v चाल है, और $\overline{v^2}$ वर्गीकृत चालों का माध्यम है। अतः,

$$P = (1/3)\,n\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.14)$$

इस व्युत्पत्ति पर कुछ टिप्पणियाँ : (i) प्रथम, यद्यपि हमने घनाकार बर्तन का चयन किया है, परंतु वास्तव में, बर्तन की आकृति से कुछ अंतर नहीं पड़ता है। बर्तन किसी भी यादृच्छिक आकृति का हो, हम एक अत्यंत सूक्ष्म समतल लेकर उस पर उपरोक्त व्युत्पत्ति के चरण लागू कर सकते हैं। ध्यान दीजिए, A एवं Δt दोनों ही अंतिम परिणाम में प्रकट नहीं होते हैं। अध्याय 10 में दिए गए पास्कल के नियम के अनुसार यदि कोई गैस साम्यावस्था में हो, तो उसके एक भाग पर जितना दाब होता है उतना ही दाब किसी दूसरे भाग पर भी होता है। (ii) द्वितीय, इस व्युत्पत्ति में हमने किन्हीं भी संघट्टों को उपेक्षणीय मानकर परिकलनों में सम्मिलित नहीं किया है। यद्यपि, इस पूर्वधारणा का कोई पक्का औचित्य बताना तो कठिन है, परंतु गुणात्मक रूप से हम यह देख सकते हैं कि इससे अंतिम परिणाम में त्रुटि नहीं आती। Δt सेकंड में दीवार से संघात करने वाले अणुओं की औसत संख्या $-\,n\,Av_x\Delta t$ पाई जाती है। अब, चूंकि संघट्ट यादृच्छिक है और गैस एक स्थायी प्रावस्था में है, यदि (v_x, v_y, v_z) वेग वाले अणु की, संघट्ट के कारण, गति बदल भी जाएगी तो भिन्न प्रारंभिक वेग वाला कोई कण संघट्ट के बाद यह वेग (v_x, v_y, v_z) प्राप्त कर लेगा। क्योंकि यदि ऐसा नहीं होगा तो वेगों का वितरण स्थायी नहीं रह पाएगा। सभी प्रकरणों में हम $\overline{v_x^2}$ का मान प्राप्त करेंगे। और इस प्रकार अणुओं के संघट्ट (जब तक कि वे बहुत जल्दी-जल्दी नहीं हो रहे हैं और एक संघट्ट में लगा समय दो संघट्टों के बीच के समय की तुलना में उपेक्षणीय है) से उपरोक्त परिकलन प्रभावित नहीं होता।

12.4.2 ताप की अणु गतिक व्याख्या

समीकरण (12.14) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है,

$$PV = (1/3)\,nV\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.15a)$$
$$PV = (2/3)\,[N\,x - m\,\overline{v^2}\,] \qquad (12.15b)$$

यहाँ $N\,(= nV)$ गैस के नमूने में अणुओं की कुल संख्या है।

दीर्घ कोष्ठक में लिखी राशि गैस के अणुओं की औसत स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा है। क्योंकि किसी आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा पूर्णतः गतिज ऊर्जा* ही है,

$$E = N \times (1/2)\,m\,\overline{v^2} \qquad (12.16)$$

समीकरण (12.15b) से तब हमें प्राप्त होता है,

$$PV = (2/3)\,E \qquad (12.17)$$

अब हम ताप की अणुगतिक व्याख्या के लिए तैयार हैं। समीकरण (12.17) का आदर्श गैस समीकरण (12.3) से संयोजित करने पर

$$E = (3/2)\,k_B\,NT \qquad (12.18)$$

या $E/N = -\,m\,\overline{v^2} = (3/2)\,k_BT \qquad (12.19)$

अर्थात्, किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा, गैस के परम ताप के अनुक्रमानुपाती होती है : यह आदर्श गैस की प्रकृति, दाब या आयतन पर निर्भर नहीं करती। यह एक मौलिक निष्कर्ष है, जो किसी गैस के ताप, जो गैस का एक स्थूल, मेय, प्राचल (जिसे ऊष्मागतिकी चर कहा जाता है) है, को किसी आण्विक

* संकेत E आंतरिक ऊर्जा U, जिसमें अन्य स्वातंत्र्य कोटियों के कारण भी ऊर्जाएँ सम्मिलित हो सकती हैं (देखिये अनुभाग 12.5), का केवल स्थानांतरीय भाग ही व्यक्त करता है।

© NCERT not to be republished

राशि, जिसे अणु की औसत गतिज ऊर्जा कहते हैं से संबद्ध करता है। बोल्ट्ज़मान नियतांक इन दो प्रभाव क्षेत्रों को जोड़ता है। ध्यान से देखें तो समीकरण (12.18) यह स्पष्ट करती है कि आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा केवल उसके ताप पर निर्भर करती है, दाब या आयतन पर नहीं। ताप की इस व्याख्या से स्पष्ट है कि आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत आदर्श गैस समीकरण और इस पर आधारित विभिन्न गैस नियमों के पूर्णतः संगत है।

अक्रिय आदर्श गैसों के मिश्रण के लिए कुल दाब मिश्रण की प्रत्येक गैस के दाब का योगदान होता है। समीकरण (12.14) को नए रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$P = (1/3)\,[n_1 m_1 \overline{v_1^2} + n_2 m_2 \overline{v_2^2} + \ldots\,] \qquad (12.20)$$

साम्यावस्था में विभिन्न गैसों के अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा समान हो जाएगी। अर्थात्

$$-\,m_1\,\overline{v_1^2} = -\,m_2\,\overline{v_2^2} = (3/2)\,k_B\,T$$

अतः, $P = (n_1 + n_2 + \ldots\,)\,k_B\,T \qquad (12.21)$

यही डाल्टन का आंशिक दाबों का नियम है।

समीकरण (12.19) से हम किसी गैस में अणुओं की प्रारूपिक चाल का अनुमान लगा सकते हैं। नाइट्रोजन के एक अणु की $T = 300$ K, ताप पर माध्य वर्ग चाल होगी :

यहाँ, $m = \dfrac{M_{N_2}}{N_A} = \dfrac{28}{6.02\times10^{26}} = 4.65\times10^{-26}$ kg

$\overline{v^2} = 3\,k_B\,T/\,m = (516)^2\ \mathrm{m^2 s^{-2}}$

$\overline{v^2}$ का वर्गमूल इसकी वर्ग माध्य मूल (rms) चाल कहलाती है और इसे v_{rms} द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

($\overline{v^2}$ को हम $< v^2 >$ भी लिख सकते हैं)

$v_{\mathrm{rms}} = 516\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

इस चाल की कोटि वायु में ध्वनि के वेग के समान है। समीकरण (12.19) से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समान ताप पर हलके अणुओं की rms चाल अधिक होती है।

उदाहरण 12.5 किसी फ्लास्क में आर्गन एवं क्लोरीन गैस भरी है जिनके द्रव्यमान 2 : 1 के अनुपात में हैं। मिश्रण का ताप 27°C है। दोनों गैसों के (i) प्रति अणु की औसत गतिज ऊर्जा का अनुपात (ii) दोनों गैसों के अणुओं की वर्ग माध्य मूल चालों v_{rms} का अनुपात ज्ञात कीजिए। आर्गन का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, क्लोरीन का अणु द्रव्यमान = 70.9u

हल यहाँ याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बात यह है कि किसी (आदर्श) गैस की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जा (चाहे वह आर्गन की तरह एक परमाणुक हो, क्लोरीन की तरह द्विपरमाणुक हो, अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो) सदैव ही $(3/2)\,k_B T$ के बराबर होती है, गैस के ताप पर निर्भर करती है और गैस की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती।

(i) चूंकि फ्लास्क में आर्गन और क्लोरीन दोनों का ताप समान है, अतः इन दो गैसों की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जाओं का अनुपात 1 : 1 है।

(ii) अब $-\,m\,v_{\mathrm{rms}}^{\ 2}$ = प्रति अणु औसत गतिज ऊर्जा = $(3/2)\,k_B T$ यहाँ m गैस के एक अणु का द्रव्यमान है।

$$\frac{(v_{rms}^2)_{\mathrm{Ar}}}{(v_{rms}^2)_{\mathrm{Cl}}} = \frac{(m)_{\mathrm{Cl}}}{(m)_{\mathrm{Ar}}} = \frac{(M)_{\mathrm{Cl}}}{(M)_{\mathrm{Ar}}} = \frac{70.9}{39.9} = 1.77$$

यहाँ M गैस का अणु-द्रव्यमान है (आर्गन का परमाणु ही उसका अणु है।) दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$\frac{(v_{rms})_{\mathrm{Ar}}}{(v_{rms})_{\mathrm{Cl}}} = 1.33$$

आपने इस तथ्य पर ध्यान दिया होगा कि उपरोक्त परिकलनों में मिश्रण के द्रव्यमानों के आधार पर संघटन की कोई प्रासंगिकता नहीं है। यदि ताप का मान अपरिवर्तित रहता है तो आर्गन और क्लोरीन के द्रव्यमान किसी अन्य अनुपात में होते, तब भी (i) एवं (ii) के उत्तर यही होते। ◀

उदाहरण 12.6 यूरेनियम के दो समस्थानिकों के द्रव्यमान 235 u एवं 238 u हैं। यदि यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड गैस में ये दोनों समस्थानिक विद्यमान हों, तो किसकी औसत चाल अधिक होगी? यदि फ्लोरीन का परमाणु द्रव्यमान 19 u हो, तो किसी भी ताप पर, इनकी चालों में प्रतिशत अंतर आकलित कीजिए।

हल : किसी नियत ताप पर औसत ऊर्जा = ½ $m < v^2 >$ नियत रहती है। अतः अणु का द्रव्यमान जितना कम होगा, उतनी ही अधिक तीव्र उसकी गति होगी। चालों का अनुपात, द्रव्यमानों के अनुपात के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती है। चूंकि यहाँ द्रव्यमान 349u एवं 352 इकाइयाँ हैं, इसलिए

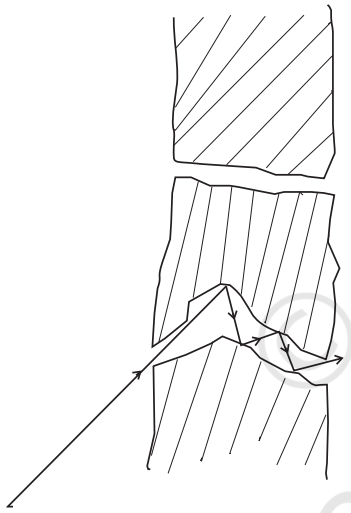
$$v_{349}\,/\,v_{352} = (352/349)^{1/2} = 1.0044$$

चालों के अंतर का प्रतिशत $\dfrac{\Delta V}{V} = 0.44\ \%$

© NCERT not to be republished

^{235}U वह समस्थानिक है जिसकी आवश्यकता नाभिकीय विखंडन में होती है। इसको अधिक मात्रा में पाए जाने वाले समस्थानिक ^{238}U से पृथक करने के लिए मिश्रण को एक सरंध्र सिलिंडर द्वारा चारों ओर से घेर देते हैं। सरंध्र सिलिंडर मोटी दीवार का लेकिन संकरा होना चाहिए ताकि अणु लंबे रंध्रों की दीवारों से संघट्ट करते हुए एक एक कर जा सकें। धीमे अणुओं की तुलना में तीव्रगति से चलने वाले अणु अधिक संख्या में रिस कर बाहर आएंगे और इस प्रकार सरंध्र सिलिंडर के बाहर हलके अणु अधिक मात्रा में पाए जाएँगे (संवर्धन) (देखिए चित्र 12.5)। यह विधि अत्यंत प्रभावी नहीं है और पर्याप्त संवर्धन के लिए इसे कई बार दोहराना पड़ता है। ◀

जब गैसें विसरित होती हैं, तो उनके विसरण की दर उनके अणुओं के द्रव्यमान के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है (देखिए अभ्यास 12.12)। क्या उपरोक्त उत्तर के आधार पर आप इस तथ्य की व्याख्या का अनुमान लगा सकते हैं?



चित्र 12.5 एक सरंध्र दीवार से गुज़रते हुए अणु।

▶ ***उदाहरण 12.7*** (a) जब कोई अणु (या प्रत्यास्थ गेंद) किसी (भारी) दीवार से टकराता है, तो टकराने के पश्चात् यह उसी चाल से विपरीत दिशा में वापस लौटता है। जब कोई गेंद दृढ़तापूर्वक पकड़े गए भारी बल्ले से टकराती है, तो भी ऐसा ही होता है। तथापि, जब गेंद अपनी ओर आते हुए बल्ले से टकराती है, तो यह भिन्न चाल से वापस लौटती है। उस स्थिति में गेंद की चाल अपेक्षाकृत कम होती है या अधिक? (अध्याय 6 प्रत्यास्थ संघट्टों से संबंधित आपकी याद ताजा कर सकेगा)। (b) पिस्टन लगे सिलिंडर में पिस्टन को अंदर की ओर धकेल कर जब किसी गैस को संपीडित किया जाता है, तो उस गैस का ताप बढ़ जाता है। ऊपर (a) में प्रयुक्त अणुगति सिद्धांत के आधार पर इस प्रेक्षण की व्याख्या कीजिए। (c) पिस्टन लगे सिलिंडर में संपीडित गैस जब पिस्टन को बाहर धकेलकर फैलती है तो क्या होता है? तब आप क्या प्रेक्षण करेंगे? (d) खेलते समय सचिन तेंदुलकर एक भारी बल्ले का उपयोग करते हैं। इससे क्या उनको किसी प्रकार की कोई सहायता मिलती है?

हल **(a)** माना कि बल्ले के पीछे लगे विकिटों के सापेक्ष गेंद की चाल u है। यदि विकिटों के सापेक्ष बल्ला V चाल से गेंद की ओर आ रहा हो तो बल्ले के सापेक्ष गेंद की चाल $V+u$ होगी, जो बल्ले की ओर प्रभावी होगी। भारी बल्ले से टकराकर जब गेंद वापस लौटती है तो बल्ले के सापेक्ष इसकी चाल $V+u$ बल्ले से दूर की ओर होगी। अत: विकिट के सापेक्ष, लौटती हुई गेंद की चाल, $V+(V+u)=2V+u$, विकिट से परे जाती हुई होगी। अत: इस प्रकार गतिमान बल्ले से संघट्ट के पश्चात् गेंद की चाल बढ़ जाती है। यदि बल्ला भारी नहीं है तो प्रतिपेक्ष चाल u से कम होगी। अणु के लिए इसका अर्थ ताप में वृद्धि होगा।

(a) के उत्तर के आधार पर, अब आप, (b) (c), (d) के उत्तर दे सकते हैं।

(संकेत: इस संगतता पर ध्यान दें, पिस्टन → बल्ला, सिलिंडर → विकिट, अणु → गेंद)। ◀

12.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम

किसी एकल अणु की गतिज ऊर्जा होती है :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \quad (12.22)$$

T ताप पर, तापीय साम्य में किसी गैस की औसत ऊर्जा का मान $<\varepsilon_t>$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, अत:

$$\langle\varepsilon_t\rangle = \left\langle\frac{1}{2}mv_x^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_y^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_z^2\right\rangle = \frac{3}{2}k_BT \quad (12.23)$$

क्योंकि यहाँ कोई वरीय दिशा नहीं है, अत: समीकरण (12.23) से इंगित होता है कि

$$\left\langle\frac{1}{2}mv_x^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \; ; \left\langle\frac{1}{2}mv_y^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \; ;$$

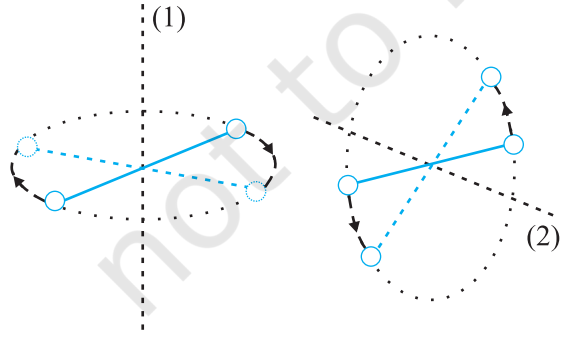
$$\left\langle\frac{1}{2}mv_z^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \quad (12.24)$$

© NCERT not to be republished

दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र किसी अणु की स्थिति दर्शाने के लिए हमें तीन निर्देशांकों की आवश्यकता होती है। यदि इसकी गति किसी एक समतल में बाध्य कर दी जाए, तो दो निर्देशांकों की, और यदि इसे किसी सरल रेखा के अनुदिश गति के लिए बाध्य कर दिया जाए, तो केवल एक निर्देशांक की आवश्यकता होगी। इसे एक दूसरे ढंग से भी व्यक्त किया जा सकता है। हम कहते हैं कि सरल रेखीय गति के लिए इसकी स्वातंत्र्य कोटि एक है, समतल गति की स्वातंत्र्य कोटि दो तथा दिक्स्थान में गति के लिए स्वातंत्र्य कोटि तीन है। किसी संपूर्ण पिण्ड की एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गति को स्थानांतरीय गति कहते हैं। अतः, दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र अणु की तीन स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। प्रत्येक स्थानांतरीय स्वतंत्रता की एक स्वातंत्र्य कोटि होती है, जिसमें गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है, उदारहणार्थ यहाँ $-mv_x^2$ और इसी के सदृश पद v_y एवं v_z हैं। समीकरण (12.24) में हम देखते हैं कि तापीय साम्य में इस प्रकार के प्रत्येक पद का औसत मान $-k_BT$ है।

आर्गन जैसी एकपरमाणुक गैस के अणुओं में केवल स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती है। लेकिन O_2 या N_2 जैसी द्विपरमाणुक गैसों के विषय में क्या कह सकते हैं? O_2 के अणु में 3 स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि तो होती ही हैं, पर, इनके अतिरिक्त यह अणु अपने द्रव्यमान केंद्र के परितः घूर्णन गति भी कर सकते हैं। चित्र 12.6 में, ऑक्सीजन के दो परमाणुओं को जोड़ने वाली रेखा के लंबवत् दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष 1 एवं 2 दर्शाए गए हैं जिनके परितः अणु घूर्णन गति कर सकता है*। अतः इन अणुओं में प्रत्येक की दो घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। इस प्रकार कुल ऊर्जा में स्थानांतरीय ऊर्जा ε_t एवं घूर्णी ऊर्जा ε_r दोनों का योगदान होता है।

$$\varepsilon_t + \varepsilon_r = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \quad (12.25)$$



चित्र 12.6 *द्विपरमाणुक अणु के दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष।*

यहाँ ω_1 एवं ω_2 क्रमशः अक्षों 1 एवं 2 के परितः कोणीय चाल तथा I_1 एवं I_2 उनके संगत जड़त्व-आघूर्ण हैं। ध्यान दीजिए, प्रत्येक घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ऊर्जा में एक पद का योगदान करती है जिसमें घूर्णी गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है।

ऊपर हमने यह मान लिया है, कि O_2 अणु एक "दृढ़ घूर्णी" है, अर्थात्, यह अणु कंपन नहीं करता। O_2 के लिए यह पूर्वधारणा, यद्यपि (सामान्य ताप पर) सही पाई गई है, पर सदैव मान्य नहीं होती। CO जैसे कुछ अणु, सामान्य ताप पर भी कुछ कंपन करते हैं, अर्थात् इनके परमाणु, अंतरापरमाणुक अक्ष के अनुदिश एकविमीय कंपन करते हैं (ठीक वैसे ही जैसे एकविमीय लोलक) और परिणामतः कुल ऊर्जा में एक पद, ε_v कंपन ऊर्जा का भी होता है, यहाँ,

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

जहाँ k लोलक का बल नियतांक एवं y इसका कंपन निर्देशांक है। अब,

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v \quad (12.26)$$

पुनः ध्यान दीजिए, समीकरण (12.26) में दिए गए कंपन-ऊर्जा पद में, गति के कंपन चरों y एवं dy/dt के वर्ग सम्मिलित हैं।

यह भी देखिए कि प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ने तो एक ही "वर्गित पद" का योगदान किया है, पर समीकरण (12.26) में दिए गए कंपन स्वातंत्र्य कोटि के सापेक्ष पद में गतिज एवं स्थितिज ऊर्जा व्यक्त करने वाले दो वर्गित पद हैं।

ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद अणु द्वारा ऊर्जा अवशोषित करने का एक ढंग बताता है। हम देख चुके हैं कि परम ताप T पर तापीय साम्यावस्था में स्थानांतरीय गति के प्रत्येक ढंग के लिए औसत ऊर्जा ½ k_BT है। सर्वप्रथम मैक्सवेल द्वारा सिद्ध किए गए चिर प्रतिष्ठित सांख्यिकीय यांत्रिकी के सर्वाधिक परिष्कृत सिद्धांत के अनुसार ऊर्जा के विभाजन के प्रत्येक ढंग में ऐसा ही होता है चाहे ऊर्जा स्थानांतरीय हो, घूर्णी हो या कंपन ऊर्जा हो। अर्थात् तापीय साम्य में, ऊर्जा समान रूप से सभी संभव ऊर्जा रूपों पर बंटित होती है और प्रत्येक रूप में औसत ऊर्जा ½ k_BT पाई जाती है। यही **ऊर्जा का समविभाजन नियम** है। तदनुसार, किसी अणु की स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटियों में प्रत्येक ½ k_BT ऊर्जा का योगदान देती है

* परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के परितः घूर्णन का जड़त्व आघूर्ण बहुत कम होता है और क्वांटम यांत्रिकीय कारणों से प्रभावी नहीं हो पाता। अनुभाग 12.6 का अंतिम भाग देखिए।

© NCERT not to be republished

जबकि प्रत्येक कंपन आवृत्ति $2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T$ ऊर्जा का योगदान देती है, क्योंकि, कंपन रूप में गतिज और स्थितिज दोनों प्रकार की ऊर्जाओं का योगदान होता है।

ऊर्जा के समविभाजन नियम की उपपत्ति इस पुस्तक की विषय वस्तु से बाहर है। यहाँ हम सैद्धांतिक रूप से गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात करने के लिए इस नियम का उपयोग करेंगे। बाद में ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के लिए भी इसके उपयोग का संक्षिप्त विवरण देंगे।

12.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

12.6.1 एकपरमाणुक गैसों के लिए

एकपरमाणुक गैस के अणु में केवल तीन स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। अतः इनके एक अणु की T ताप पर औसत ऊर्जा $(3/2)k_B T$ होगी। इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{3}{2} k_B T \times N_A = \frac{3}{2} RT \qquad (12.27)$$

नियत आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता C_v का मान है,

$$C_v \text{ (एकपरमाणुक गैस के लिए)} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} RT \qquad (12.28)$$

आदर्श गैस के लिए

$$C_p - C_v = R \qquad (12.29)$$

जहाँ, C_p नियत दाब पर मोलर विशिष्ट ऊष्माधारिता है।

अतः, $$C_p = \frac{5}{2} R \qquad (12.30)$$

इन दो विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं का अनुपात

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \qquad (12.31)$$

12.6.2 द्विपरमाणुक गैसों के लिए

जैसा पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि द्विपरमाणुक अणु की आकृति डंबलाकार होती है और यदि इस आकृति को दृढ़ घूर्णी मानें, तो इसकी 5 स्वातंत्र्य कोटि हैं : 3 स्थानांतरीय एवं 2 घूर्णी। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार इस प्रकार की गैस के एक मोल की, T ताप पर कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{5}{2} k_B T \times N_A = \frac{5}{2} RT \qquad (12.32)$$

अतः मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

$$C_v \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{5}{2} R, \; C_p = \frac{7}{2} R \qquad (12.33)$$

$$\gamma \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{7}{5} \qquad (12.34)$$

यदि द्विपरमाणुक अणु दृढ़ नहीं है, वरन् इसमें एक अतिरिक्त कंपन रूप भी सम्मिलित है, तो

$$U = \left(\frac{5}{2} k_B T + k_B T\right) N_A = \frac{7}{2} RT$$

$$C_v = \frac{7}{2} R, \; C_p = \frac{9}{2} R, \; \gamma = \frac{9}{7} R \qquad (12.35)$$

12.6.3 बहुपरमाणुक गैसों के लिए

व्यापक रूप में किसी बहुपरमाणुक अणु में 3 स्थानांतरीय, 3 घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि एवं कुछ निश्चित संख्या (f) के कंपन रूप होते हैं। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार यह सुगमता से समझा जा सकता है कि इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = \left(\frac{3}{2} k_B T + \frac{3}{2} k_B T + f k_B T\right) N_A$$

अर्थात् $C_v = (3 + f) R; \quad C_p = (4 + f) R,$

$$\gamma = \frac{(4 + f)}{(3 + f)} \qquad (12.36)$$

ध्यान दीजिए, $C_p - C_v = R$ सभी आदर्श गैसों के लिए सत्य है, फिर चाहे वह गैस एकपरमाणुक हो, द्विपरमाणुक हो अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो।

सारणी (12.1) में, गैसों में, कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए, उनकी विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के विषय में सैद्धांतिक पूर्वानुमानों को सूचीबद्ध किया गया है। ये मान सारणी (12.2) में दिए गए कई गैसों के लिए विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के प्रायोगिक मानों से काफी मेल खाते हैं। यह सत्य है, कि ऐसी कई गैसे हैं (जो सारणी में नहीं दर्शाई गई हैं), जैसे Cl_2, C_2H_6 और बहुत सी बहुपरमाणुक गैसें, जिनके प्रायोगिक और सैद्धांतिक

सारणी 12.1 गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के पूर्वानुमानित मान (कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए)

गैस की प्रकृति	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	12.5	20.8	8.31	1.67
द्विपरमाणुक	20.8	29.1	8.31	1.40
त्रिपरमाणुक	24.93	33.24	8.31	1.33

© NCERT not to be republished

सारणी 12.2 कुछ गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मापित मान

गैस की प्रकृति	गैस	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	He	12.5	20.8	8.30	1.66
एकपरमाणुक	Ne	12.7	20.8	8.12	1.64
एकपरमाणुक	Ar	12.5	20.8	8.30	1.67
द्विपरमाणुक	H_2	20.4	28.8	8.45	1.41
द्विपरमाणुक	O_2	21.0	29.3	8.32	1.40
द्विपरमाणुक	N_2	20.8	29.1	8.32	1.40
त्रिपरमाणुक	H_2O	27.0	35.4	8.35	1.31
बहुपरमाणुक	CH_4	27.1	35.4	8.36	1.31

मानों में बहुत अंतर पाया गया है। साधारणत: इन गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान सारणी (12.1) में दिए गए सैद्धांतिक मानों से अधिक पाए गए हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि हम परिकलनों में कंपन रूपों के योगदान को भी सम्मिलित करें, तो प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक मानों में अधिक संगति दृष्टिगोचर होगी। अत:, सामान्य ताप पर ऊर्जा समविभाजन का नियम, प्रायोगिक रूप से अच्छी तरह पुष्ट होता है।

उदाहरण 12.8 44.8 लीटर नियत धारिता के एक बेलनाकार बर्तन में STP पर हीलियम गैस भरी है। इस गैस के ताप में 15.0 °C वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आवश्यकता होगी? ($R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1})

हल : गैस नियम $PV = \mu RT$ का उपयोग करके आप यह आसानी से दर्शा सकते हैं कि किसी भी आदर्श गैस के 1 मोल का, मानक ताप (273 K) एवं दाब (1 atm = 1.01×10^5 Pa) पर आयतन 22.4 लीटर होता है। इस सार्वत्रिक आयतन को 'मोलर आयतन' कहते हैं। अत: इस उदाहरण में बर्तन के भीतर हीलियम के 2 मोल हैं। क्योंकि हीलियम एकपरमाणु गैस है, इसकी नियत आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता $C_v = (3/2)\,R$, तथा नियत दाब पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता $C_P = (5/2)\,R$ है। क्योंकि बर्तन का आयतन नियत है, आवश्यक ऊष्मा ज्ञात करने के लिए C_v का उपयोग करेंगे। अत: आवश्यक ऊष्मा = मोलों की संख्या × मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता × तापवृद्धि

$= 2 \times 1.5\,R \times 15.0 = 45\,R$

$= 45 \times 8.31 = 374$ J

12.6.4 ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

ठोसों की विशिष्ट ऊष्माधारिता ज्ञात करने के लिए भी हम ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू कर सकते हैं। किसी ठोस के विषय में विचार कीजिए, जो N परमाणुओं का बना है। प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन कर रहा है। किसी एकविमीय कंपन की औसत ऊर्जा $2 \times ½\ k_BT = k_BT$ है। त्रिविमीय कंपनों के लिए औसत ऊर्जा $3\,k_BT$ है। ठोस के 1 मोल के लिए $N = N_A$ और इसकी कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = 3\ k_BT \times N_A = 3\,RT$$

अब, नियत दाब पर $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V = \Delta U$, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV उपेक्षणीय है। अत:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \qquad (12.37)$$

सारणी 12.3 कमरे के ताप एवं वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान

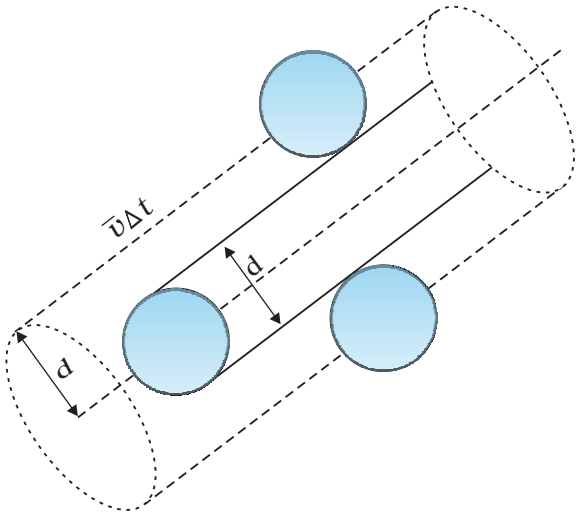
पदार्थ का नाम	विशिष्ट ऊष्मा धारिता (J kg^{-1} K^{-1})	मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता (J mol^{-1} K^{-1})
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
ताँबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चाँदी	236.1	25.5
टंग्स्टन	134.4	24.9

सारणी 12.3 दर्शाती है कि व्यापक रूप से, सामान्य ताप पर प्राप्त प्रायोगिक मान प्रागुक्त मानों से मेल खाते हैं। (कार्बन एक अपवाद है)।

12.7 माध्य मुक्त पथ

गैसों में अणुओं की गति काफी अधिक, वायु में ध्वनि के वेग की कोटि के बराबर होती है। तो भी, रसोईघर में सिलिंडर से लीक हुई गैस को कमरे के दूसरे कोने तक विसरित होने में काफी अधिक समय लगता है। वायुमंडल में धुएँ का बादल घंटों तक बना रहता है। ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि, गैस के अणु एक परिमित, पर अत्यंत छोटी आमाप के होते हैं। इसीलिए वे परस्पर टकराते रहने के लिए बाध्य हैं। परिणामस्वरूप, वे अबाध्य रूप से, सरल रेखा में चलते नहीं रह सकते, उनका पथ निरंतर परिवर्तित रहता है।

© NCERT not to be republished



चित्र 12.7 *Δt समय में किसी अणु द्वारा प्रसर्पित आयतन जिसमें कोई दूसरा अणु इससे टकराएगा।*

मान लीजिए, किसी गैस के अणु d व्यास के गोले हैं। यहाँ हम अपना ध्यान किसी ऐसे गतिमान अणु पर केंद्रित करेंगे जिसकी माध्य चाल $\langle v \rangle$ है। यह किसी भी ऐसे दूसरे अणु से संघट्ट करेगा जो इन दो अणुओं के केंद्रों के बीच की दूरी d के अंदर आ जाएगा। Δt समय में यह आयतन $(\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t)$ तय करता है जिसमें आने वाला कोई अणु इससे टकराएगा (देखें चित्र 12.7)। यदि प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या n हो तो कोई अणु Δt समय में $n\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$ संघट्ट करेगा। इस प्रकार संघट्टों की दर $n\pi d^2 \langle v \rangle$ है। अथवा दो क्रमिक संघट्टों के बीच औसत अंतराल,

$$\tau = 1/(n\pi \langle v \rangle d^2) \qquad (12.38)$$

किन्हीं दो क्रमिक संघट्टों के बीच की औसत दूरी, जिसे माध्य मुक्त पथ (l) कहते हैं, होगा :

$$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2) \qquad (12.39)$$

इस व्युत्पत्ति में हमने यह कल्पना की है कि दूसरे सभी अणु विरामावस्था में हैं। परंतु वास्तव में सभी अणु गतिमान हैं और संघट्ट दर अणुओं के औसत आपेक्षिक वेग द्वारा निर्धारित की जाती है। अत: हमें समीकरण (12.38) में $\langle v \rangle$ को $\langle v_r \rangle$ से प्रतिस्थापित करना होगा। अत: अधिक यथार्थ व्युत्पत्ति द्वारा

$$l = 1/\left(\sqrt{2}\, n\pi d^2\right) \qquad (12.40)$$

आइये, अब हम वायु के अणुओं के लिए, STP पर औसत वेग $\langle v \rangle$ = (485m/s) लेकर l एवं T का आकलन करते हैं।

$$n = \frac{\left(0.02 \times 10^{23}\right)}{\left(22.4 \times 10^{-3}\right)}$$

$$= 2.7 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

$d = 2 \times 10^{-10}$ m लेने पर,

$\tau = 6.1 \times 10^{-10}$ s

तथा, $l = 2.9 \times 10^{-7}\ \text{m} \approx 1500d \qquad (12.41)$

जैसी अपेक्षा थी, समीकरण (12.40) द्वारा दिया गया माध्य मुक्त पथ का मान अणु की आमाप एवं संख्या घनत्व पर प्रतिलोमत: निर्भर करता है। किसी अत्यधिक निर्वातित नली में चाहे n कितना भी कम क्यों न हो, माध्य मुक्त पथ का मान नली की लंबाई के बराबर हो सकता है।

उदाहरण 12.9 373 K पर, जल वाष्प में, जल के अणु के माध्य मुक्त पथ का आकलन कीजिए। उदाहरण 12.1 और समीकरण (12.41) में दी गई सूचनाओं का उपयोग कीजिए।

हल जल वाष्प के लिए d का मान, इसका वायु के लिए मान बराबर होता है। संख्या घनत्व परम ताप के व्युत्क्रमानुपाती है।

$$\text{इसलिए } n = 2.7 \times 10^{25} \times \frac{273}{373} = 2 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

अत: माध्य मुक्त पथ $l = 4 \times 10^{-7}\ \text{m}$ ◀

ध्यान दीजिए, माध्य मुक्त पथ, पूर्व परिकलनों द्वारा ज्ञात अंतरापरमाणुक दूरी ~ 40 Å = 4×10^{-9} m की तुलना में 100 गुनी है। माध्य मुक्त पथ का यह बड़ा मान ही गैसों के प्रारूपिक व्यवहार का मार्गदर्शक है। बिना किसी धारक पात्र के गैसों को सीमित नहीं किया जा सकता है।

अणुगति सिद्धांत का उपयोग करके, श्यानता, ऊष्मा–चालकता, एवं विसरण जैसे स्थूल मेय गुणों को आण्विक आमाप जैसे अतिसूक्ष्म प्राचलों से संबंधित किया जा सकता है। इसी तरह के संबंधों से ही सर्वप्रथम अणुओं की आमाप का आकलन किया गया था।

सारांश

1. दाब (P), आयतन (V) और परम ताप (T) में संबंध स्थापित करने वाली आदर्श गैस समीकरण है,

$$PV = \mu RT = k_B NT$$

यहाँ μ गैस में मोलों की संख्या और N अणुओं की संख्या है। R तथा k_B क्रमश: सार्वत्रिक गैस नियतांक एवं बोल्ट्ज़मान नियतांक हैं।

© NCERT not to be republished

$R = 8.314\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}$, $k_B = \dfrac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1}$

वास्तविक गैसें, आदर्श गैस समीकरण का अधिकाधिक पालन केवल उच्च ताप तथा निम्न दाब पर ही करती हैं।

2. आदर्श गैस के अणुगति सिद्धांत के अनुसार

$$P = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}$$

यहाँ n अणुओं का संख्या घनत्व, m अणु का द्रव्यमान एवं $\overline{v^2}$ इनकी माध्य वर्ग चाल है। इसको आदर्श गैस समीकरण के साथ मिलाने से ताप की एक अणुगतिक व्याख्या प्राप्त होती है,

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T, \quad v_{rms} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

इससे हमें यह ज्ञात होता है कि किसी गैस का ताप उसके किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा की माप है और यह गैस या अणु की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। एक नियत ताप पर गैसों के मिश्रण में भारी अणु की औसत चाल अपेक्षाकृत कम होती है।

3. स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा

$$E = \frac{3}{2} k_B N T$$

इससे हमें यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$PV = \frac{2}{3} E$$

4. ऊर्जा समविभाजन का नियम बताता है कि यदि एक निकाय परमताप T पर साम्यावस्था में है तो कुल ऊर्जा समान रूप से विभिन्न ऊर्जा रूपों में बँट कर अवशोषित होती है और हर रूप के साथ जुड़ी यह ऊर्जा $-k_B T$ होती है। प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि के संगत अवशोषण का एक ऊर्जा रूप होता है और इससे जुड़ी ऊर्जा $-k_B T$ होती है। प्रत्येक कंपन आवृत्ति के साथ ऊर्जा के दो रूप (गतिज एवं स्थितिज) जुड़ते हैं इसलिए इसके संगत ऊर्जा $= 2 \times -k_B T = k_B T$

5. ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू करके हम गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात कर सकते हैं और इस प्रकार प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान कई गैसों के प्रयोगों द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मानों से मिलते हैं। यदि गति के कंपन रूपों को भी परिकलनों में सम्मिलित करें तो यह साम्यता और भी सटीक बैठेगी।

6. माध्य मुक्त पथ l अणु के दो क्रमिक संघट्टों के बीच उसके द्वारा चलित औसत दूरी है

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\, n \pi d^2}$$

जहाँ n संख्या घनत्व एवं d अणु का व्यास है।

विचारणीय विषय

1. किसी तरल का दाब केवल धारक की दीवारों पर ही आरोपित नहीं होता, बल्कि यह तरल में हर जगह विद्यमान रहता है। बर्तन में रखे गैस के आयतन में कोई परत साम्यावस्था में होती है क्योंकि इस परत के दोनों ओर समान दाब होता है।

2. गैस में अंतरापरमाणुक दूरी के संबंध में हमें बहुत बढ़ा-चढ़ा कर कोई धारणा नहीं बनानी चाहिए। सामान्य ताप और दाब पर यह ठोसों और द्रवों में अंतरापरमाणुक दूरी के लगभग दस गुने के बराबर है। बहुत भिन्न अगर कुछ है तो वह माध्य मुक्त पथ है जो किसी गैस में अंतरापरमाणुक दूरी का 100 गुना और अणु की आमाप का 1000 गुना होता है।

© NCERT not to be republished

3. ऊर्जा समविभाजन के नियम को हम इस प्रकार कह सकते हैं– तापीय साम्य में प्रत्येक स्वातंत्र्य कोटि के साथ $\frac{1}{2} k_B T$ ऊर्जा जुड़ी होती है। अणु की कुल ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद एक स्वातंत्र्य कोटि गिना जाना चाहिए। अतः, प्रत्येक कंपन-विधा में दो स्वातंत्र्य कोटि (न कि एक) होते हैं (गतिज एवं स्थितिज रूपों के संगत) जिनकी ऊर्जा $2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T$ होती है।

4. किसी कमरे में वायु के सब अणु नीचे नहीं गिर जाते (गुरुत्व के कारण) तथा फर्श पर आकर नहीं ठहर जाते क्योंकि वह बहुत वेग से गतिमान होते हैं और निरंतर संघट्ट करते रहते हैं। साम्यावस्था में कम ऊँचाइयों पर घनत्व थोड़ा अधिक होता है (जैसे वायुमण्डल में)। इसका प्रभाव कम है, क्योंकि सामान्य ऊँचाइयों के लिए स्थितिज ऊर्जा (mgh) का मान अणु की औसत गतिज ऊर्जा $1/2\ mv^2$ की तुलना में काफी कम है।

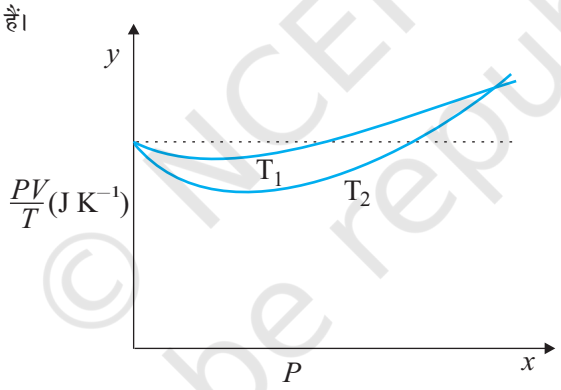
5. $< v^2 >$ सदैव $(< v >)^2$ के बराबर नहीं होता। किसी राशि के वर्ग का माध्य आवश्यक नहीं है कि उस राशि के माध्य के वर्ग के बराबर हो। क्या आप इस कथन की पुष्टि के लिए उदाहरण बता सकते हैं?

अभ्यास

12.1 ऑक्सीजन के अणुओं के आयतन और STP पर इनके द्वारा घेरे गए कुल आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। ऑक्सीजन के एक अणु का व्यास 3 Å लीजिए।

12.2 मोलर आयतन, STP पर किसी गैस (आदर्श) के 1 मोल द्वारा घेरा गया आयतन है। (STP : 1 atm दाब, 0 °C)। दर्शाइये कि यह 22.4 लीटर है।

12.3 चित्र 12.8 में ऑक्सीजन के 1.00×10^{-3} kg द्रव्यमान के लिए PV/T एवं P में, दो अलग-अलग तापों पर ग्राफ दर्शाये गए हैं।



चित्र 12.8

(a) बिंदुकित रेखा क्या दर्शाती है?

(b) क्या सत्य है : $T_1 > T_2$ अथवा $T_1 < T_2$?

(c) y-अक्ष पर जहाँ वक्र मिलते हैं वहाँ PV/T का मान क्या है?

(d) यदि हम ऐसे ही ग्राफ 1.00×10^{-3} kg हाइड्रोजन के लिए बनाएँ तो भी क्या उस बिंदु पर जहाँ वक्र y-अक्ष से मिलते हैं PV/T का मान यही होगा? यदि नहीं तो हाइड्रोजन के कितने द्रव्यमान के लिए PV/T का मान (कम दाब और उच्च ताप के क्षेत्र के लिए वही होगा? H_2 का अणु द्रव्यमान = 2.02 u, O_2 का अणु द्रव्यमान = 32.0 u, R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1})

12.4 एक ऑक्सीजन सिलिंडर जिसका आयतन 30 लीटर है, में ऑक्सीजन का आरंभिक दाब 15 atm एवं ताप 27 °C है। इसमें से कुछ गैस निकाल लेने के बाद प्रमापी (गेज) दाब गिर कर 11 atm एवं ताप गिर कर 17 °C हो जाता है। ज्ञात कीजिए कि सिलिंडर से ऑक्सीजन की कितनी मात्रा निकाली गई है। (R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1}, ऑक्सीजन का अणु द्रव्यमान O_2 = 32 u)।

© NCERT not to be republished

12.5 वायु का एक बुलबुला, जिसका आयतन 1.0 cm^3 है, 40 m गहरी झील की तली से जहाँ ताप 12 °C है, उठकर ऊपर पृष्ठ पर आता है जहाँ ताप 35 °C है। अब इसका आयतन क्या होगा?

12.6 एक कमरे में, जिसकी धारिता 25.0 m^3 है, 27 °C ताप और 1 atm दाब पर, वायु के कुल अणुओं (जिनमें नाइट्रोजन, ऑक्सीजन, जलवाष्प और अन्य सभी अवयवों के कण सम्मिलित हैं) की संख्या ज्ञात कीजिए।

12.7 हीलियम परमाणु की औसत तापीय ऊर्जा का आकलन कीजिए (i) कमरे के ताप (27 °C) पर। (ii) सूर्य के पृष्ठीय ताप (6000 K) पर। (iii) 100 लाख केल्विन ताप (तारे के क्रोड का प्रारूपिक ताप) पर।

12.8 समान धारिता के तीन बर्तनों में एक ही ताप और दाब पर गैसें भरी हैं। पहले बर्तन में नियॉन (एकपरमाणुक) गैस है, दूसरे में क्लोरीन (द्विपरमाणुक) गैस है और तीसरे में यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड (बहुपरमाणुक) गैस है। क्या तीनों बर्तनों में गैसों के संगत अणुओं की संख्या समान है? क्या तीनों प्रकरणों में अणुओं की v_{rms} (वर्ग माध्य मूल चाल) समान है।

12.9 किस ताप पर आर्गन गैस सिलिंडर में अणुओं की v_{rms}, – 20 °C पर हीलियम गैस परमाणुओं की v_{rms} के बराबर होगी। (Ar का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, एवं हीलियम का परमाणु द्रव्यमान = 4.0 u)।

12.10 नाइट्रोजन गैस के एक सिलिंडर में, 2.0 atm दाब एवं 17 ^{0}C ताप पर, नाइट्रोजन अणुओं के माध्य मुक्त पथ एवं संघट्ट आवृत्ति का आकलन कीजिए। नाइट्रोजन अणु की त्रिज्या लगभग 1.0 Å लीजिए। संघट्ट–काल की तुलना अणुओं द्वारा दो संघट्टों के बीच स्वतंत्रतापूर्वक चलने में लगे समय से कीजिए। (नाइट्रोजन का आण्विक द्रव्यमान = 28.0 u)।

© NCERT not to be republished

अध्याय 13

दोलन

13.1 भूमिका
13.2 दोलन और आवर्ती गति
13.3 सरल आवर्त गति
13.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति
13.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण
13.6 सरल आवर्त गति के लिए बल नियम
13.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा
13.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

13.1 भूमिका

हम अपने दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की गतियाँ देखते हैं। इनमें से कुछ जैसे सरल रैखिक गति और किसी प्रक्षेप्य की गति के विषय में तो आप अध्ययन कर ही चुके हैं। ये दोनों ही गतियाँ अनावर्ती होती हैं। हमने एकसमान वर्तुल गति तथा सौर परिवार में ग्रहों की कक्षीय गतियों के विषय में भी अध्ययन कर लिया है। इन उदाहरणों में निश्चित समय-अंतराल के पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, अर्थात् यह आवर्ती होती है। आपने बचपन में अपने पालने अथवा झूले पर झूलने का आनन्द लिया होगा। यह दोनों गतियाँ पुनरावर्ती होती हैं, परंतु किसी ग्रह की आवर्ती गति से भिन्न होती हैं। यहाँ वस्तु किसी माध्य स्थिति के इधर-उधर गति करती है। दीवार-घड़ी का लोलक भी इसी प्रकार की गति करता है। इस प्रकार की अग्र-पश्च (आगे-पीछे) आवर्ती गति के प्रचुर उदाहरण हैं– नदी में डूबती-उतरती हुई नाव, वाष्प इंजन में अग्र और पश्च चलता हुआ पिस्टन आदि। इस प्रकार की गति को **दोलन गति** कहते हैं। इस अध्याय में हम इस गति के बारे में अध्ययन करेंगे।

दोलन गति का अध्ययन भौतिकी के लिए आधारभूत है; बहुत-सी भौतिक परिघटनाओं को समझने के लिए इसकी संकल्पना की आवश्यकता होती है। वाद्य यंत्रों; जैसे-सितार, गिटार अथवा वायलिन में हम कंपायमान डोरियों द्वारा रोचक ध्वनियाँ उत्पन्न होते हुए देखते हैं। ढोलों में झिल्लियाँ तथा टेलीफोन और ध्वनि विस्तारकों के स्पीकरों में डायफ्राम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन करते हैं। वायु के अणुओं के कंपनों द्वारा ही ध्वनि-संचरण संभव हो पाता है। एक ठोस पदार्थ में अणु अपनी माध्य स्थितियों के परित: कम्पन करते हैं, कम्पन की औसत ऊर्जा तापमान के समानुपाती होती है। AC पावर ऐसी वोल्टता का संभरण करता है जो माध्य मान (शून्य) के धनात्मक तथा ऋणात्मक ओर एकांतर क्रम से दोलायमान रहता है।

किसी आवर्ती गति के व्यापक तथा दोलन गति के विशेष विवरण के लिए कुछ मूल संकल्पनाओं; जैसे–आवर्तकाल, आवृत्ति, विस्थापन, आयाम और कला की आवश्यकता होती है। अगले अनुभाग में इन संकल्पनाओं को विकसित किया गया है।

© NCERT not to be republished

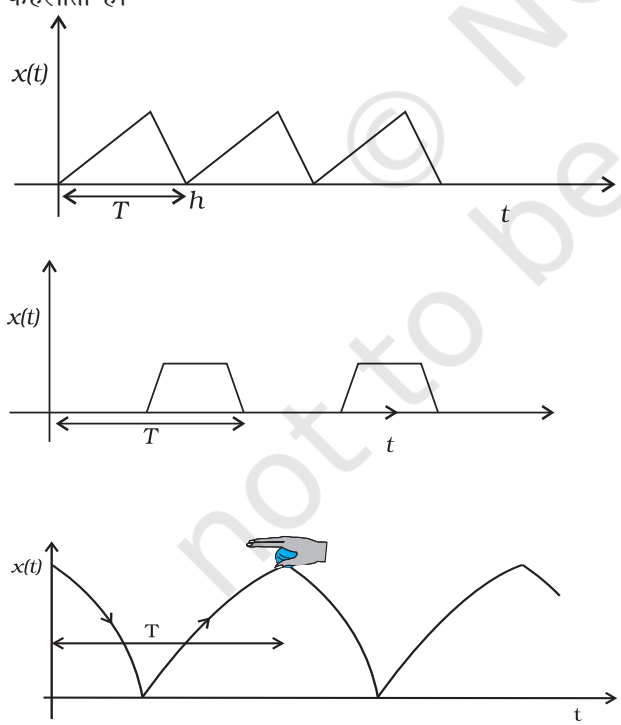
13.2 दोलन और आवर्ती गति

चित्र 13.1 में कुछ आवर्ती गतियाँ दर्शाई गई हैं। मान लीजिए कोई कीट किसी रैम्प पर चढ़ता है और गिर जाता है। वह अपने प्रारंभिक स्थान पर आ जाता है और इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराता है। यदि आप जमीन से ऊपर इसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ खींचें तो यह चित्र 13.1(a) की तरह दिखेगा। यदि कोई बालक किसी सीढ़ी पर चढ़े और उतरे तथा इस प्रक्रिया को समान रूप से बार-बार दोहराये तो उसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ चित्र 13.1(b) के जैसा दिखेगा। जब आप किसी गेंद को अपनी हथेली से जमीन की तरफ बार-बार मारते हैं तो इसकी ऊँचाई और समय के बीच ग्राफ 13.1(c) के जैसा दिखेगा। ध्यान दीजिए कि चित्र 13.1(c) में दोनों वक्रीय भाग न्यूटन की गति समीकरण के अनुसार परवलय के अंश हैं, अनुभाग (2.6) देखिए।

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ अधोमुखी गति के लिए, तथा

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ उपरिमुखी गति के लिए,

इन समीकरणों में u का मान अलग परिस्थितियों के लिए भिन्न होगा। ये सभी आवर्ती गति के उदाहरण हैं। अत: कोई गति जो निश्चित अंतराल के बाद पुनरावृत्ति करती है ***आवर्ती गति*** कहलाती है।



चित्र 13.1 आवृत्ति गति के उदाहरण। प्रत्येक अवस्था में आवर्तकाल T दर्शाया गया है।

सामान्यत: आवर्ती गति करने वाले पिण्ड की एक संतुलन अवस्था होती है जो उसके गति के पथ में स्थित होता है। जब पिण्ड इस संतुलन अवस्था में होता है तो उस पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है। अत: यदि पिण्ड को इस अवस्था में विराम की स्थिति में छोड़ दें तो यह सदैव विरामावस्था में रहेगा। यदि पिण्ड को इस अवस्था से थोड़ा सा विस्थापित करें तो पिण्ड पर एक बल कार्य करने लगता है जो पिण्ड को पुन: उसकी संतुलन-अवस्था की ओर ले जाने का प्रयास करता है और फलस्वरूप पिण्ड में **दोलन** या **कंपन** उत्पन्न हो जाता है। उदाहरण के लिए यदि किसी कटोरे में एक गेंद रख दें तो गेंद कटोरे की तली पर संतुलन अवस्था में होती है। यदि इसको इस बिंदु से थोड़ा विस्थापित करें तो गेंद कटोरे में दोलन करने लगती है। प्रत्येक दोलन गति आवर्ती होती है परंतु प्रत्येक आवर्ती गति दोलनीय नहीं होती। वर्तुल गति भी आवर्ती होती है, परंतु दोलनीय नहीं होती है।

दोलन एवं कंपन में कोई मुख्य अंतर नहीं है। साधारणत: जब आवृत्ति का मान कम होता है तो हम गति को दोलनीय कहते हैं (जैसे किसी वृक्ष की टहनी की दोलन गति)। इसके विपरीत जब गति की आवृत्ति अधिक होती है तो हम गति को कंपन कहते हैं। जैसे किसी संगीत वाद्य के तार का कंपन।

सरल आवर्ती गति दोलनीय गति का एक सरल रूप है। यह तब होता है जब किसी दोलनीय वस्तु के ऊपर लगने वाला बल संतुलन अवस्था में इसके विस्थापन के समानुपाती होता है। पुन: वस्तु के दोलन के दौरान यह बल सदैव इस संतुलन अवस्था की तरफ निदेशित होता है। यह संतुलन अवस्था वस्तु की गति की माध्य स्थिति भी होती है।

व्यावहारिक रूप में सभी दोलनीय वस्तुएँ अंततोगत्वा अपनी संतुलन अवस्था को प्राप्त कर लेती हैं। क्योंकि इनकी गति में घर्षण तथा अन्य क्षयकारी बलों के कारण अवमंदन उत्पन्न होता है। परंतु कोई बाह्य आवर्ती बल लगाकर हम वस्तु को दोलनीय अवस्था में रख सकते हैं। इस पाठ के अंतिम अनुभागों में हम अवमंदित तथा प्रणोदित दोलनों का अध्ययन करेंगे।

किसी भी द्रव्यात्मक माध्यम को हम युग्मित दलित्रों का एक बड़ा समूह मान सकते हैं। इन दलित्रों के सामूहिक दोलन तरंग का रूप लेते हैं। जल तरंग, भूकम्पित तरंगें, विद्युत चुंबकीय तरंगें इन तरंगों के उदाहरण हैं। तरंगीय घटनाओं के विषय में हम अगले अध्याय में अध्ययन करेंगे।

13.2.1 आवर्तकाल तथा आवृत्ति

हमने देखा है कि कोई गति जिसकी किसी नियमित समय अंतराल पर स्वयं पुनरावृत्ति होती है **आवर्ती गति** कहलाती है। ***वह न्यूनतम समय अंतराल जिसके पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, इसका आवर्तकाल कहलाता है।*** अत: समय को हम

© NCERT not to be republished

T द्वारा दर्शाते हैं। इसका SI मात्रक सेकंड है । उन आवर्ती गतियों के लिए, जो सेकंडों के पैमाने पर या तो बहुत तीव्र अथवा बहुत मंद होती हैं, समय के अन्य सुविधाजनक मात्रक उपयोग में लाए जाते हैं । किसी क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल का कंपन काल माइक्रोसेकंड (10^{-6} s) के मात्रकों, जिसका प्रतीक μs है, में व्यक्त किया जाता है । इसके विपरीत बुध ग्रह की कक्षीय अवधि 88 भू-दिवस होती है । हेली धूमकेतु हर 76 वर्ष के पश्चात् पुनः दृष्टिगोचर होता है ।

आवर्तकाल 'T' के व्युत्क्रम से हमें प्रति इकाई समय में दोलनों की संख्या प्राप्त होती है। यह राशि **आवर्ती गति की आवृत्ति** कहलाती है । इसे प्रतीक υ द्वारा निरूपित किया जाता है । υ तथा T के मध्य निम्नलिखित पारस्परिक संबंध होता है:

$$\upsilon = \frac{1}{T} \qquad (13.1)$$

इस प्रकार υ का मात्रक (s^{-1}) है । रेडियो तरंगों के आविष्कारक हेनरिख रुडोल्फ हर्ट्ज़ (1857-1894) के नाम पर आवृत्ति के मात्रक को एक विशेष नाम दिया गया । इसे हर्ट्ज़ (hertz प्रतीक Hz) कहते हैं । इस प्रकार,

1 हर्ट्ज़ = 1 Hz = 1 दोलन प्रति सेकंड = $1s^{-1}$ (13.2)

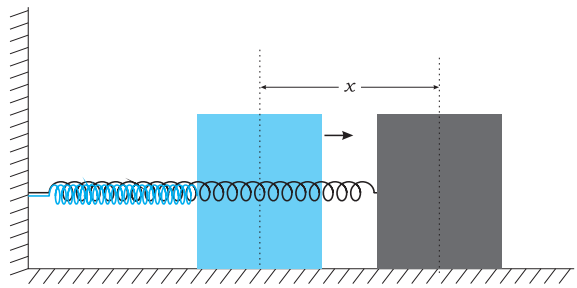
ध्यान दीजिए, आवृत्ति का सदैव ही पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है ।

▶ ***उदाहरण 13.1*** कोई मानव हृदय एक मिनट में औसतन 75 बार धड़कन करता पाया जाता है । इसकी आवृत्ति तथा आवर्तकाल परिकलित कीजिए ।

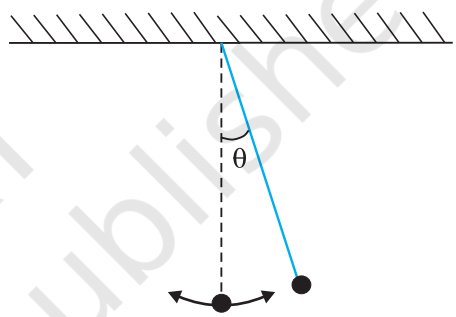
हल हृदय की धड़कन की आवृत्ति = 75/(1 मिनट)
= 75/(60 s)
= 1.25 s^{-1}
आवर्तकाल, T = 1/(1.25 s^{-1})
= 0.8 s ◀

13.2.2 विस्थापन

अनुभाग 3.2 में हमने किसी कण के विस्थापन को उसके स्थिति सदिश में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया था । इस अध्याय में हम विस्थापन नामक इस पद का उपयोग अधिक व्यापक अर्थों में करेंगे । यह किसी भी विचारणीय भौतिक गुण में समय के साथ परिवर्तन को निरूपित करेगा । उदाहरण के लिए, एक पृष्ठ पर किसी स्टील बॉल की सरल रेखीय गति के लिए, समय के फलन के रूप में आरंभ बिंदु से बॉल की दूरी इसका **स्थिति-विस्थापन** है । मूल बिंदु का चुनाव सुविधानुसार किया जा सकता है । मान लीजिए कोई गुटका किसी कमानी से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है [देखिए चित्र 13.2 (a)] साधारणतः किसी पिण्ड का विस्थापन इसकी संतुलन अवस्था से मापना सरल होगा। किसी दोलायमान



चित्र 13.2(a) कोई गुटका किसी कमानी से संलग्न, जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है । गुटका घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करता है । गुटके की गति को दीवार से दूरी, अथवा विस्थापन x के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।



चित्र 13.2(b) एक दोलायमान सरल लोलक, इसकी गति को ऊर्ध्वाधर से कोणीय विस्थापन θ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।

सरल लोलक के लिए, समय के फलन के रूप में ऊर्ध्वाधर से कोण को विस्थापन-चर के रूप में निरूपित किया जा सकता है [देखिए चित्र 13.2(b)]। 'विस्थापन' पद का उल्लेख सदैव स्थिति के संदर्भ में ही नहीं किया जाता। विस्थापन चर कई अन्य प्रकार के भी हो सकते हैं । किसी a.c. परिपथ में संयोजित संधारित्र के सिरों के बीच समय के साथ परिवर्तित हो रही "वोल्टता" को भी एक विस्थापन चर के रूप में लिया जा सकता है । इसी प्रकार, ध्वनि तरंगों के संचरण में समय के साथ 'दाब' में परिवर्तन, प्रकाश तरंगों में परिवर्तित हो रहे वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र अन्य संदर्भों में विस्थापन के उदाहरण हैं। विस्थापन चर का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। दोलनों के प्रयोगों में, भिन्न समयों के लिए विस्थापन चरों की माप ली जाती है ।

विस्थापन को सदैव ही समय के गणितीय फलन द्वारा निरूपित किया जा सकता है । आवर्ती गतियों में यह फलन समय का आवर्ती होता है । आवर्ती फलनों में से एक सरलतम आवर्ती फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

© NCERT not to be republished

$$f(t) = A\cos\omega t \qquad (13.3a)$$

यदि इस फलन के कोणांक, ωt, में 2π रेडियन या इसके किसी पूर्णांक गुणज की वृद्धि कर दी जाए, तो फलन का मान वही f रहता है । तब भी फलन $f(t)$ आवर्ती ही रहता है जिसका आवर्तकाल, T निम्नलिखित होगा,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (13.3b)$$

अत: कोई फलन $f(t)$ काल T का आवर्ती होता है,

$$f(t) = f(t+T)$$

यदि हम ज्या (sin) फलन, $f(t) = A\sin\omega t$ भी लें तो स्पष्ट रूप से यही परिणाम सही होता है । साथ ही ज्या (sin) एवं कोज्या (cos) फलनों का एक घात संचय, जैसे

$$f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (13.3c)$$

भी आवर्ती फलन होता है, जिसका आवर्तकाल T होता है । यदि हम

$$A = D\cos\phi \text{ तथा } B = D\sin\phi$$

लें, तो समीकरण (13.3c) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$f(t) = D\sin(\omega t + \phi)\,, \qquad (13.3d)$$

यहाँ अचर D और ϕ दिए गए हैं

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ तथा } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

आवर्ती ज्या और कोज्या फलनों का विशेष महत्त्व फ्रांसीसी गणितज्ञ जीन बापटिस्ट जोसेफ फूरिए (1768–1830) द्वारा सिद्ध असाधारण परिणाम के कारण है, जो इस प्रकार है : ***किसी भी आवर्ती फलन को उचित गुणांक वाले विभिन्न आवर्तकाल के ज्या व कोज्या फलनों के अध्यारोपण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।***

▶ ***उदाहरण 13.2*** निम्नलिखित समय के फलनों में कौन (a) आवर्ती तथा (b) अनावर्ती गति को निरूपित करते हैं ? प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल लिखिए [ω कोई धनात्मक नियतांक है] ।

(i) $\sin\omega t + \cos\omega t$

(ii) $\sin\omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log(\omega t)$

हल (i) $\sin\omega t + \cos\omega t$ एक आवर्ती फलन है। इसे $\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

अब, $\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$$= \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

इस फलन का आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega}$ है ।

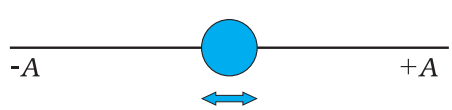
(ii) यह आवर्ती गति का एक उदाहरण है । ध्यान दीजिए, यहाँ प्रत्येक पद एक विभिन्न कोणीय आवृत्ति के आवर्ती फलन को निरूपित करता है । चूँकि आवर्तकाल वह न्यूनतम समय अंतराल होता है जिसके पश्चात् फलन अपने मान की स्वयं पुनरावृत्ति करता है, $\sin\omega t$ का आवर्तकाल $T_0 = 2\pi/\omega$; $\cos 2\omega t$ का आवर्तकाल $\pi/\omega = T_0/2$; तथा $\sin 4\omega t$ का आवर्तकाल $2\pi/4\omega = T_0/4$ होता है । प्रथम पद का आवर्तकाल अंतिम दो पदों के आवर्तकालों का गुणनफल होता है। अत: अंतिम समय का निम्न अंतराल जिसके उपरांत तीनों पदों का योग पुनरावृत्ति करता है T_0 होता है जिसका आवर्त काल $2\pi/\omega$ है।

(iii) फलन $e^{-\omega t}$ अनावर्ती है, यह समय में वृद्धि के साथ एक दिष्टत: घटता है तथा $t \to \infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और इस प्रकार कभी भी अपने मान की पुनरावृत्ति नहीं करता ।

(iv) फलन $\log(\omega t)$ समय के साथ एकदिष्टत: बढ़ता है । अत: यह अपने मान की कभी भी पुनरावृत्ति नहीं करता और यह एक अनावर्ती फलन है । ध्यान दीजिए, $t \to \infty$ होने पर $\log\omega t$ अपसारित होकर ∞ तक पहुँच जाता है। अत: यह किसी भी प्रकार के भौतिक विस्थापन को निरूपित नहीं कर सकता । ◀

13.3 सरल आवर्त गति

हम चित्र 13.3 के अनुसार x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ चरम सीमाओं के मध्य अग्र और पश्च कंपन करने वाले किसी कण पर विचार करें । इस दोलायमान गति को **सरल आवर्त गति** कहते हैं, यदि मूल बिन्दु से कण का विस्थापन x समय के साथ निम्न समीकरण के अनुसार परिवर्तित हो:

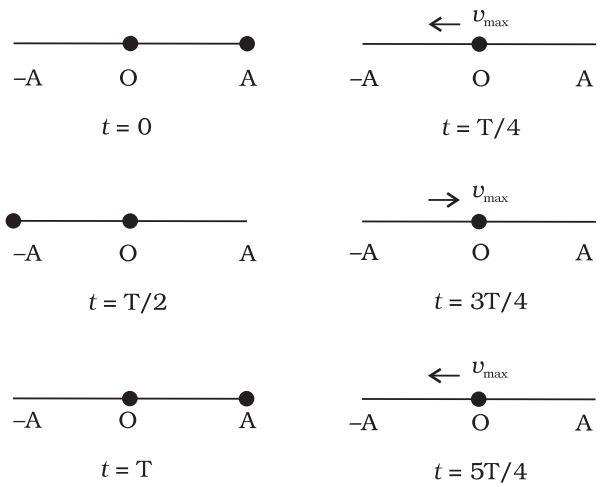


चित्र 13.3 x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ सीमाओं के भीतर अग्र और पश्च कंपन करते हुए कोई कण ।

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (13.4)$$

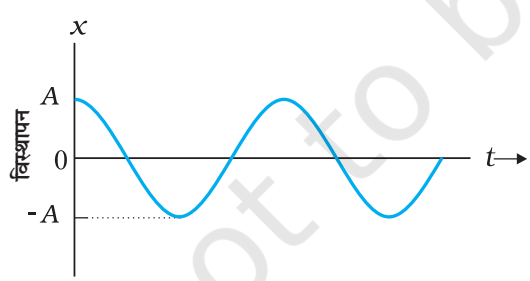
© NCERT not to be republished

यहाँ A, ω तथा ϕ स्थिरांक हैं। अतः प्रत्येक आवर्त गति सरल आवर्त गति (SHM) नहीं है; केवल ऐसी आवर्त गति जिसमें विस्थापन-समय का फलन ज्यावक्रीय है, सरल आवर्त गति होती है। चित्र 13.4 में सरल आवर्त गति करते हुए एक कण की



चित्र 13.4 सरल आवर्त गति करते हुए समय के असतत मान t = 0, $T/4$, $T/2$, $3T/4$, T, $5T/4$ पर कण की स्थिति। वह समय जिसके पश्चात गति की पुनरावृत्ति होती है, T कहलाती है। प्रारंभिक स्थिति (t = 0) आप कुछ भी चुनें, T का मान स्थिर रहेगा। कण की चाल शून्य विस्थापन (x = 0 पर) पर अधिकतम तथा गति की चरम स्थितियों पर शून्य होती है।

समय के असतत् मानों पर स्थिति दर्शायी गई है। प्रत्येक समय अन्तराल $T/4$ है जहाँ T गति का आवर्तकाल है।



चित्र 13.5 सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन समय के सतत फलन के रूप में

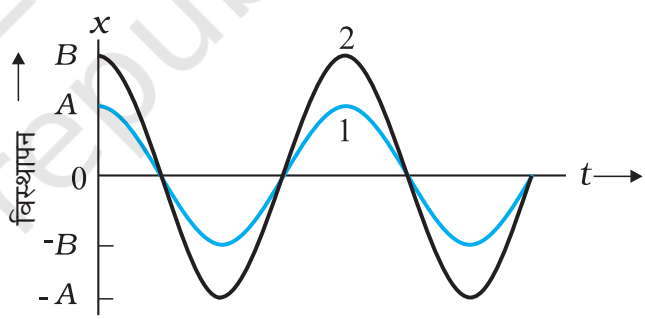
चित्र 13.5 में x के साथ t का ग्राफ आलेखित है जो समय के सतत फलन के रूप में कण के विस्थापन का मान देती है। राशियाँ A, ω तथा ϕ जो दी गई आवर्त गति की विशेषता बताती

$x(t)$	:	विस्थापन x, समय t के फलन के रूप में
A	:	आयाम
ω	:	कोणीय आवृत्ति
$\omega t + \phi$	:	कला (समय पर आश्रित)
ϕ	:	कला स्थिरांक

चित्र 13.6 समीकरण (13.4) में दिए मानक संकेतों का अर्थ

हैं, के मानक नाम हैं, जैसा कि चित्र 13.6 में संक्षिप्त किया गया है। आइए, इन राशियों को हम समझें।

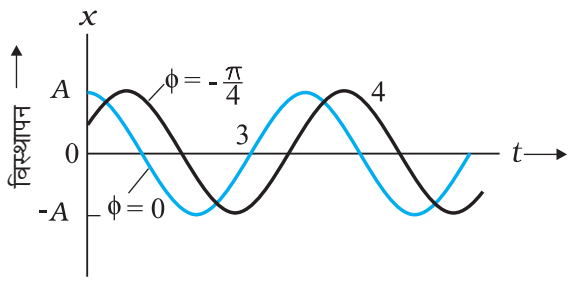
SHM का आयाम A, कण के अधिकतम विस्थापन का परिमाण होता है। [ध्यान दें, व्यापकीकृकता के बिना किसी नुकसान के, A को धनात्मक लिया जा सकता है]। चूंकि समय का कोज्या फलन +1 से –1 के बीच विचरण करता है, इसलिए विस्थापन चरम स्थिति $+A$ से $-A$ के बीच विचरण करेगा। दो सरल आवर्त गतियों के ω तथा ϕ समान, लेकिन आयाम अलग हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 13.7(a) में दिखाया गया है।



चित्र 13.7 (a) समीकरण (13.4) से प्राप्त ϕ = 0 पर समय के फलन के रूप में विस्थापन का आलेख। वक्र 1 और 2 दो भिन्न आयामों A तथा A के लिए हैं।

जब किसी दिए गए आवर्त गति का आयाम A नियत है, किसी समय t पर कण की गति की आवस्था को कोज्या फलन के कोणांक $(\omega t + \phi)$ के द्वारा दर्शाया जाता है। समय पर आश्रित रहने वाली इस राशि $(\omega t + \phi)$ को गति की कला कहते हैं। t = 0 पर कला का परिमाण ϕ होता है जिसे कला नियतांक (अथवा कला-कोण) कहते हैं। यदि आयाम ज्ञात हो तो t = 0 पर के विस्थापन मान से ϕ ज्ञात किया जा सकता है। दो सरल आवर्त गतियों के A तथा ω समान लेकिन कला-कोण ϕ विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 13.7 (b) में दर्शाया गया है।

© NCERT not to be republished



चित्र 13.7(b) समीकरण (13.4) से प्राप्त (x-t) आलेख। वक्र 3 तथा 4 क्रमशः कला कोण $\phi = 0$ rad तथा $\phi = -\pi/4$ rad के लिए हैं। दोनों आलेखों के लिए आयाम A समान है।

अंततः राशि ω को गति के आवर्तकाल T से संबंधित देखा जा सकता है। सरलता के लिए समीकरण (13.4) में $\phi = 0$ rad लेने पर हमें प्राप्त होता है–

$$x(t) = A\cos \omega t \qquad (13.5)$$

चूंकि गति का आवर्तकाल T है, $x(t)$ का मान $x(t+T)$ के समान होगा। अर्थात्,

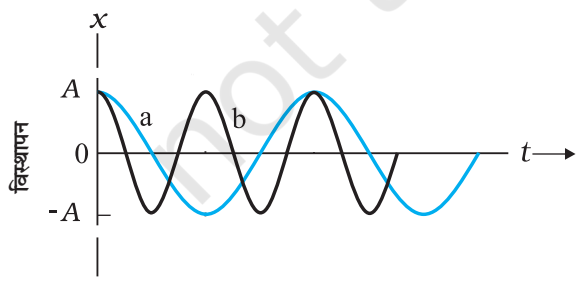
$$A\cos \omega t = A\cos \omega(t+T) \qquad (13.6)$$

अब चूँकि 2π आवर्त काल वाला कोज्या फलन आवर्ती है, अर्थात् जब कोणांक 2π रेडियन से परिवर्तित होता है, यह प्रथम बार स्वयं की पुनरावृत्ति करता है। अतः

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

अर्थात् $\omega = 2\pi/T \qquad (13.7)$

ω को SHM की कोणीय आवृत्ति कहते हैं। इसका S.I. मात्रक रेडियन प्रति सेकेंड है। चूंकि दोलन की आवृत्ति मात्र $1/T$ है, ω दोलन की आवृत्ति का 2π गुणा होता है। दो सरल आवर्त गति के A तथा ϕ समान, किन्तु ω विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 13.8 में देखा जा सकता है। इस आलेख में वक्र b का आवर्त काल वक्र a के आवर्त काल का आधा है जबकि इसकी आवृत्ति वक्र a की आवृत्ति की दुगुनी है।



चित्र 13.8 समीकरण (14.4) के $\phi = 0$ rad पर दो भिन्न आवर्तकालों के लिए आलेख।

उदाहरण 13.3 समय के निम्नलिखित फलनों में से कौन (a) सरल आवर्त गति तथा (b) आवर्ती गति को निरूपित करता है परंतु सरल आवर्त गति नहीं ? प्रत्येक का आवर्तकाल निकालिए।

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^2 \omega t$

हल (a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin(\pi/2 - \omega t)$

$= 2\cos(\pi/4)\sin(\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/4)$

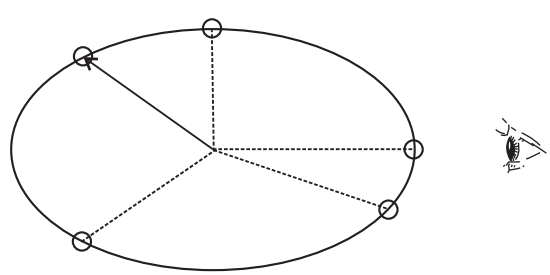
यह फलन सरल आवर्त गति का निरूपण करता है, जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega$ तथा कला-कोण $(-\pi/4)$ rad अथवा $(7\pi/4)$ rad है।

(b) $\sin^2 \omega t = ½ - ½\cos 2\omega t$

यह फलन आवर्ती है, जिसका आवर्तकाल $T=\pi/\omega$ है। ये संतुलन बिंदु शून्य के बदले ½ पर सरल आवर्त गति को भी दर्शाता है। ◀

13.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति

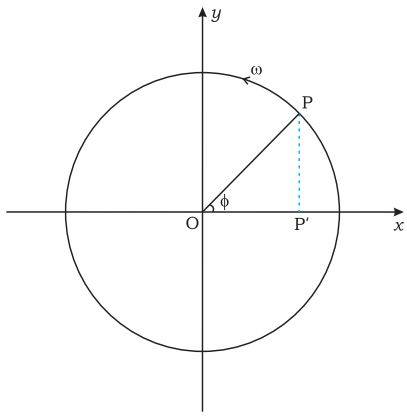
इस अनुभाग में हम देखेंगे कि वृत्त के व्यास पर एकसमान वर्तुल गति का प्रक्षेप सरल आवर्त गति करता है। एक सरल प्रयोग (चित्र 13.9) इस संबंध की सजीव कल्पना करने में हमारी मदद करता है। एक गेंद को किसी डोरी के सिरे से बाँधकर क्षैतिज तल में उसे किसी निश्चित बिंदु के परितः अचर कोणीय चाल से गति कराइये। तब गेंद क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति करेगी। अपनी आंख को गति के तल पर केन्द्रित रखते हुए तिरछी ओर से अथवा सामने से गेंद का अवलोकन कीजिए। घूर्णन बिन्दु को यदि हम मध्य बिन्दु मानें तो यह गेंद एक क्षैतिज तल के अनुदिश इधर-उधर गति करती हुई प्रतीत होगी। विकल्पतः आप गेंद की परछाईं वृत्त के तल के लंबवत् किसी दीवार पर भी देख सकते हैं। इस प्रक्रिया में हम जो कुछ अवलोकन करते हैं, वास्तव में वह हमारी दृष्टि की दिशा के अभिलंबवत् व्यास पर बॉल की गति होती है।



चित्र 13.9 किनारे से देखे गए एक समतल में बॉल की वृत्तीय गति सरल आवर्त गति है।

© NCERT not to be republished

चित्र 13.10 इसी स्थिति को गणितीय रूप में वर्णन करता है। मान लीजिए कोई कण P, त्रिज्या A के एक वृत्त पर कोणीय चाल ω से एकसमानीय गति कर रहा है। घूमने की दिशा वामावर्त है। कण की प्रारंभिक 'स्थिति सदिश' अर्थात् $t = 0$ पर सदिश **OP**, धनात्मक x अक्ष के साथ कोण ϕ बनाता है।



चित्र 13.10

t समय के बाद यह अगला कोण ωt पूरा करता है और इसकी 'स्थिति सदिश' +ve x-अक्ष के साथ एक कोण $\omega t+\phi$ बनाती है। अब x-अक्ष पर 'स्थिति सदिश' OP के प्रक्षेप पर विचार करें। यह OP′ होगा। जब कण P वृत्त पर गति करता है तो x-अक्ष पर P′ की स्थिति प्रदत्त की जाती है

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

जो कि SHM का पारिभाषिक समीकरण है। यह दर्शाता है कि यदि P किसी वृत्त पर एकसमानीय गति करता है तो इसका प्रक्षेप P′ वृत्त के व्यास पर सरल आवर्त गति करता है। कण P तथा वह वृत्त जिसपर यह गति करता है उसे क्रमशः संदर्भ कण तथा संदर्भ वृत्त कहते हैं।

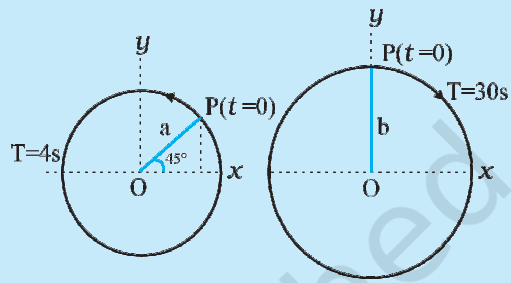
P की गति के प्रक्षेप को हम किसी भी व्यास, जैसे कि y-अक्ष पर ले सकते हैं। इस स्थिति में y-अक्ष पर P′ का विस्थापन $y(t)$ होगा।

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

यह भी एक SHM है जिसका आयाम x-अक्ष पर प्रक्षेप के समान ही है, लेकिन इसकी कला $\pi/2$ से भिन्न है।

वर्तुल गति तथा SHM के बीच इस संबंध के बावजूद रैखिक सरल आवर्ती गति में किसी कण पर लगता हुआ बल किसी कण को एकसमान वर्तुल गति में रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल से काफी अलग है।

▶ ***उदाहरण 13.4*** नीचे दिये चित्र में दो वर्तुल गतियाँ दर्शायी गई हैं। इन चित्रों पर वृत्त की त्रिज्या, घूर्णन का आवर्तकाल, आरंभिक स्थिति तथा घूर्णन की दिशा अंकित की गई है। प्रत्येक स्थिति में घूर्णी कण P के त्रिज्या सदिश के x-प्रक्षेप की सरल आवर्त गति प्राप्त कीजिए।



हल

(a) $t = 0$ पर, OP x-अक्ष (की धनात्मक दिशा) से $45° = \pi/4$ rad का कोण बनाता है। t समय पश्चात् यह वामावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ rad कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4}\right)$ rad कोण बनाता है। समय t पर x-अक्ष पर OP के प्रक्षेप इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$T = 4$ s के लिए

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

जो कि A आयाम, 4 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला* $\frac{\pi}{4}$ की सरल आवर्त गति है।

(b) इस स्थिति में $t = 0$ पर, OP x-अक्ष से $90° = \pi/2$ का कोण बनाता है। यह दक्षिणावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ कोण

* कोण की प्राकृतिक इकाई रेडियन है जिसे त्रिज्या की चाप के अनुपात द्वारा परिभाषित करते हैं। कोण अदिश राशि है। जब हम π को उसके बहुगुण या अपवर्तक लिखते हैं तो रेडियन इकाई का उल्लेख करना आवश्यक नहीं है। रेडियन और डिग्री के बीच रूपांतरण, मीटर, सेंटीमीटर या मील के बीच रूपांतरण के समरूप नहीं है। यदि किसी त्रिकोणमितीय फलन के कोणांक में इकाई नहीं दिया है तो मानना चाहिए कि इकाई रेडियन है। यदि कोण की इकाई डिग्री है तो उसको स्पष्टतः दर्शाना होगा। उदाहरण के लिए $\sin(15^0)$ का अर्थ है 15 डिग्री का sin। परन्तु sin (15) का तात्पर्य 15 रेडियन का sin है। आगे से 'rad' इकाई नहीं दर्शाया जाएगा। जब भी कोण का अंकिक मान बिना इकाई के दिया हुआ है तो इकाई वास्तव में रेडियन है।

© NCERT not to be republished

पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$ कोण बनाता है । समय t पर x-अक्ष पर OP प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$T = 30$ s के लिए,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

इसे इस प्रकार $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)$ लिखकर इसकी समीकरण (13.4) से तुलना करने पर हमें यह ज्ञात होता है कि यह B आयाम, 30 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला $-\frac{\pi}{2}$ rad की सरल आवर्त गति को निरूपित करता है ।

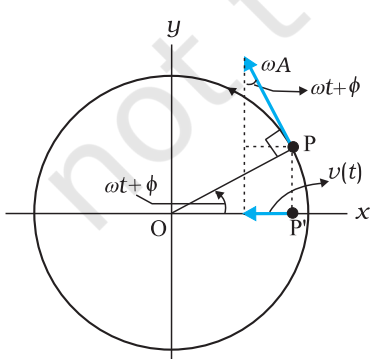
13.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण

एकसमानीय वर्तुल गति करते हुए किसी कण की चाल इसकी कोणीय चाल गुणा वृत्त की त्रिज्या A के बराबर होती है।

$$v = \omega A \qquad (13.8)$$

किसी समय t पर, वेग **v** की दिशा वृत्त के उस बिन्दु पर स्पर्शज्या के अनुदिश होती है जहाँ कण उस क्षण पर अवस्थित रहता है। चित्र 13.11 की ज्यामिति से यह स्पष्ट है कि समय t पर प्रक्षेप कण P′ का वेग है

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t+\phi) \qquad (13.9)$$



चित्र 13.11 कण P′ का वेग $v(t)$ संदर्भ कण P के वेग **v** *का प्रक्षेप है ।*

यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि $v(t)$ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के विपरीत है। समीकरण (13.9), सरल आवर्त गति करते हुए कण की तात्क्षणिक वेग प्रदत्त करता है, जहाँ विस्थापन समीकरण (13.4) से प्राप्त होता है। निस्संदेह इस समीकरण को हम बिना ज्यामितीय कोणांक के भी प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए सीधे समीकरण (13.4) को t के सापेक्ष अवकलित करते हैं :

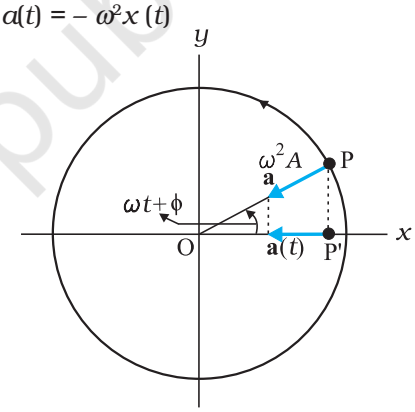
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t) \qquad (13.10)$$

सरल आवर्त गति करते हुए कण के तात्क्षणिक त्वरण को प्राप्त करने के लिए संदर्भ वृत्त की विधि को इसी प्रकार प्रयोग में लाया जा सकता है।

हमें ज्ञात है कि एकसमानीय वर्तुल गति में कण के अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण v^2/A अथवा $\omega^2 A$ है तथा यह केन्द्र की ओर निर्दिष्ट है, अर्थात इसकी दिशा PO की ओर है। प्रक्षेप कण P′ का तात्क्षणिक त्वरण तब होगा (चित्र 13.12 देखें)

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t+\phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (13.11)$$



चित्र 13.12 बिंदु P′ का त्वरण $a(t)$, संदर्भ बिंदु P के त्वरण **a** *का प्रक्षेप होता है ।*

समीकरण (13.11) सरल आवर्त गति करते हुए कण का त्वरण व्यक्त करता है। इसी समीकरण को, समीकरण (13.9) से प्रदत्त वेग $v(t)$ को समय के सापेक्ष अवकलित करके सीधे प्राप्त किया जा सकता है:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v(t) \qquad (13.12)$$

समीकरण (13.11) से हम एक महत्त्वपूर्ण परिणाम पर ध्यान देते हैं कि सरल आवर्त गति में कण का त्वरण इसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। $x(t) > 0$ के लिए $a(t) < 0$ तथा $x(t) < 0$ के लिए $a(t) > 0$ होता है। अत: $-A$ तथा A के

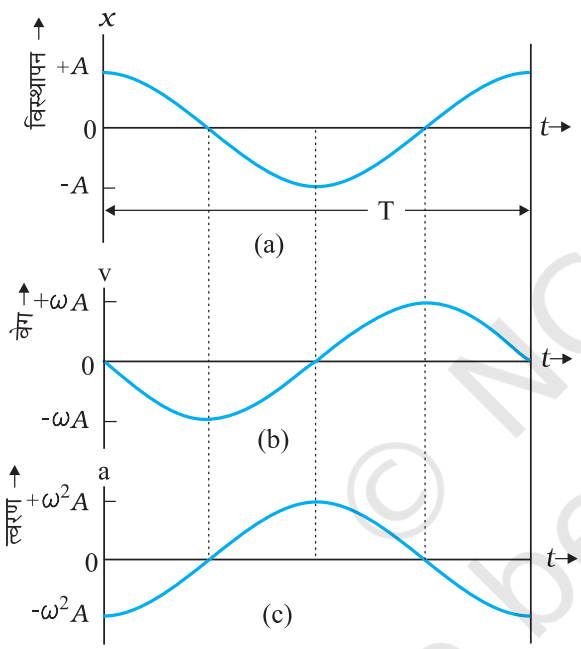
© NCERT not to be republished

बीच x का मान कुछ भी हो, त्वरण a(t) हमेशा केन्द्र की ओर निर्दिष्ट रहता है।

सरलता के लिए हम $\phi = 0$ रख कर $x(t)$, $v(t)$ और $a(t)$ के व्यंजक को लिखते हैं

$x(t) = A \cos \omega t$, $v(t) = -\omega A \sin \omega t$, $a(t) = -\omega^2 A \cos \omega t$

संगत आलेख को चित्र 13.13 में दर्शाया गया है। सभी राशियाँ समय के साथ ज्यावक्रीय विचरण करती हैं; केवल उनकी उच्चिष्ठ (maxima) में अन्तर होता है तथा उनके आलेखों में कलाओं की भिन्नता होती है। x, $-A$ तथा A के मध्य विचरण करता है; $v(t)$, $-\omega A$ तथा ωA के मध्य विचरण करता है एवं $a(t)$, $-\omega^2 A$ तथा $\omega^2 A$ के मध्य विचरण करता है। विस्थापन आलेख के सापेक्ष, वेग आलेख की कला में $\pi/2$ का अंतर है तथा त्वरण आलेख की कला में π का अंतर है।



चित्र 13.13 सरल आवर्त गति में किसी कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण का आवर्तकाल T समान होता है, लेकिन उनकी कलाओं में भिन्नता होती है।

उदाहरण 13.5 : कोई पिंड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है,

$x = (5.0\ \text{m}) \cos [(2\pi\ \text{rad/s})\ t + \pi/4]$

$t = 1.5$ s पर, पिंड का (a) विस्थापन, (b) वेग तथा (c) त्वरण परिकलित कीजिए ।

हल पिंड की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi\ \text{s}^{-1}$ तथा इसका आवर्तकाल $T = 1$ s

$t = 1.5$ s पर,

(a) विस्थापन $= (5.0\ \text{m}) \cos [(2\pi\ \text{s}^{-1}) \times 1.5\ \text{s} + \frac{\pi}{4}]$

$= (5.0\ \text{m}) \cos [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= -5.0 \times 0.707\ \text{m}$

$= -3.535\ \text{m}$

(b) समीकरण (13.9) का उपयोग करने पर पिंड का वेग

$= -(5.0\ \text{m})\ (2\pi\ \text{s}^{-1})\ \sin [(2\pi\ \text{s}^{-1}) \times (1.5\ \text{s} + \frac{\pi}{4})]$

$= -(5.0\ \text{m})\ (2\pi\ \text{s}^{-1}) \sin [(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= 10\pi \times 0.707\ \text{m s}^{-1}$

$= 22\ \text{m s}^{-1}$

(c) समीकरण (13.10) का उपयोग करने पर पिंड का त्वरण

$= -(2\pi\ \text{s}^{-1})^2 \times$ विस्थापन

$= -(2\pi\ \text{s}^{-1})^2 \times (-3.535\ \text{m})$

$= 130\ \text{m s}^{-2}$ ◀

13.6 सरल आवर्त गति के लिए बल का नियम

न्यूटन की गति के दूसरे नियम तथा आवर्त गति करते किसी कण के लिए त्वरण के व्यंजक (समीकरण 13.11) प्रयोग करने पर

$$F(t) = ma$$

$$= -m\omega^2 x(t)$$

अथवा, $F(t) = -k\,x(t)$ (13.13)

यहाँ $k = m\omega^2$ (13.14a)

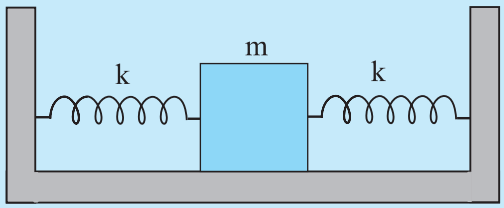
अथवा, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (13.14b)

त्वरण की तरह, बल हमेशा माध्य स्थिति की ओर निर्दिष्ट रहता है – इसलिए यह सरल आवर्त गति में प्रत्यानयन बल कहलाता है। अब तक की गई चर्चाओं को संक्षिप्त करने पर हम पाते हैं कि सरल आवर्त गति को दो प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है, या तो विस्थापन के लिए समीकरण (13.4) द्वारा अथवा समीकरण (13.13) द्वारा जो कि बल के नियम प्रदान करता है। समीकरण (13.4) से समीकरण (13.13) प्राप्त करने के लिए हमें इसे दो बार अवकलित करना पड़ा। इसी प्रकार बल के नियम, समीकरण (13.13) को दो बार समाकलित करने पर हमें वापस समीकरण (13.4) प्राप्त हो सकता है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (13.13) में बल $x(t)$ के रैखिकीय समानुपाती है। अत: इस तरह के बल के प्रभाव से दोलन करते हुए किसी कण को रैखिक आवर्ती दोलक कहते हैं। वास्तव में, बल के व्यंजक में x^2, x^3 आदि के समानुपाती कुछ पद हो सकते हैं। अत: इन्हें अरैखिक दोलक कहते हैं।

© NCERT not to be republished

▶ **उदाहरण 13.6** कमानी स्थिरांक k की दो सर्वसम कमानियाँ M संहति के किसी गुटके तथा स्थिर आधारों से चित्र 13.14 में दर्शाए गए अनुसार जुड़ी हुई हैं।



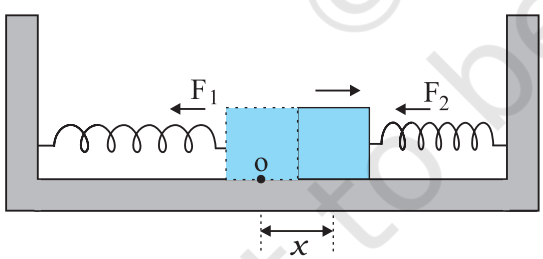
चित्र 13.14

यह दर्शाइए कि जब गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से किसी ओर विस्थापित किया जाता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से दाईं ओर x दूरी तक विस्थापित किया जाता है। इसे चित्र 13.15 में दिखाया गया है। इस स्थिति में बाईं ओर की कमानी x लंबाई द्वारा दीर्घित हो जाती है तथा दाईं ओर की कमानी भी उतनी ही लंबाई द्वारा संपीडित हो जाती है। तब गुटके पर कार्यरत बल

$F_1 = -kx$ (कमानी द्वारा बाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर खींचने का प्रयास करता है।)

$F_2 = -kx$ (कमानी द्वारा दाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर धकेलने का प्रयास करता है।)



चित्र 13.15

तब गुटके पर आरोपित नेट बल,

$$F = -2kx$$

अतः, गुटके पर आरोपित बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाती तथा माध्य-स्थिति की ओर निर्दिष्ट होता है; इसलिए, गुटके की गति सरल आवर्त गति है। इसमें दोलन का आवर्तकाल,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ है। ◀

13.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते हुए कण की स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाएँ दोनों शून्य तथा अपने अधिकतम परिमाण के बीच विचरण करती हैं।

अनुभाग 13.5 में हमने देखा है कि सरल आवर्त गति करते किसी कण का वेग समय का आवर्ती फलन होता है। विस्थापन की चरम स्थितियों में यह शून्य होता है। अतः ऐसे कण की गतिज ऊर्जा (K), जिसे हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) \qquad (13.15)$$

भी समय का आवर्ती फलन होती है जिसका परिमाण विस्थापन अधिकतम होने पर शून्य तथा कण के माध्य स्थिति पर होने पर अधिकतम होता है। ध्यान दीजिए, चूँकि गतिज ऊर्जा K में, v के चिह्न का कोई अर्थ नहीं होता, अतः K का आवर्तकाल $T/2$ है।

सरल आवर्त गति करने वाले किसी कण की स्थितिज ऊर्जा कितनी होती है ? अध्याय 5 में हमने देखा है कि स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना केवल संरक्षी बलों के लिए ही होती है। कमानी बल $F = -kx$ एक संरक्षी बल है जिससे स्थितिज ऊर्जा संयुक्त होती है।

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (13.16)$$

अतः सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \qquad (13.17)$$

इस प्रकार, सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा भी आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल $T/2$ होता है, यह ऊर्जा माध्य स्थिति में शून्य तथा चरम विस्थापनों पर अधिकतम होती है। अतः समीकरणों (13.15) तथा (13.17) से हमें निकाय की कुल ऊर्जा E, प्राप्त होती है,

$$E = U + K$$

© NCERT not to be republished

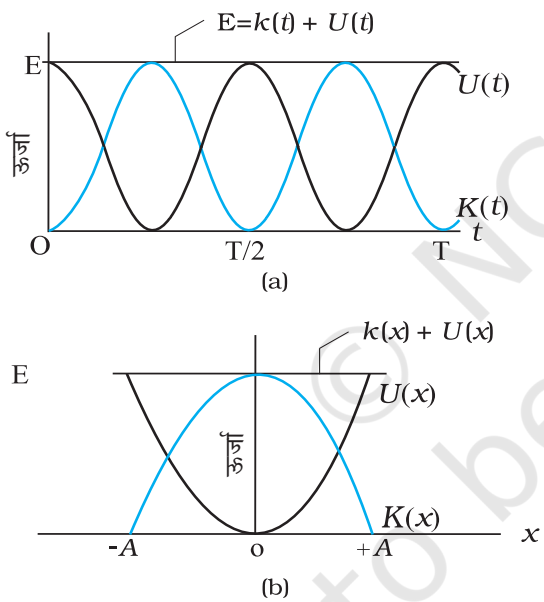
$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

त्रिकोणमिती की सामान्य तादात्मक को प्रयोग करने पर कोष्ठक में दी गई राशि का मान एक प्राप्त होता है। अत:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (13.18)$$

जैसा कि संरक्षी बलों के अधीन गतियों के लिए आशा की जाती है किसी भी सरल आवर्ती दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा कालाश्रित नहीं होती । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं की समय और विस्थापन पर निर्भरता चित्र 13.16 में दर्शायी गई है ।



चित्र 13.16 *गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा समय के फलन के रूप में [(a) में दर्शित] तथा सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन [(b) में दर्शित]। गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा दोनों आवर्तकाल $T/2$ के पश्चात पुनरावृत्ति करते हैं। t तथा x के सभी मानों के लिए कुल ऊर्जा नियत रहती है।*

ध्यान दीजिए कि सरल आवर्त गति में स्थितिज तथा गतिज दोनों ऊर्जाएँ चित्र 13.16 में हमेशा धनात्मक मानी गई हैं। निस्सन्देह गतिज ऊर्जा कभी ऋणात्मक नहीं हो सकती, क्योंकि यह चाल के वर्ग के समानुपाती होती है। स्थितिज ऊर्जा के समीकरण में गुप्त नियतांक के चयन के कारण स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है। गतिज तथा स्थितिज दोनों ऊर्जाएँ SHM के प्रत्येक आवर्तकाल में दो बार अपनी चरम स्थिति को प्राप्त करती हैं। $x = 0$ के लिए, ऊर्जा गतिज है; चरम स्थिति $x = \pm A$ पर यह पूरे तौर पर स्थितिज ऊर्जा है। इन सीमाओं के बीच गति करते हुए, स्थितिज ऊर्जा के घटने से गतिज ऊर्जा बढ़ती है तथा गतिज ऊर्जा के घटने से स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है।

▶ ***उदाहरण 13.7*** 1kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बाँधा गया है । कमानी का कमानी स्थिरांक $50\ \text{N m}^{-1}$ है । गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी $x = 10$ cm तक खींचा जाता है । जब गुटका अपनी माध्य-स्थिति से 5 cm दूर है, तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जाएँ परिकलित कीजिए ।

हल

गुटका सरल आवर्त गति करता है । समीकरण [13.14(b)] से इसकी कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$= \sqrt{\frac{50\ \text{N m}^{-1}}{1\ \text{kg}}}$$

$$= 7.07\ \text{rad s}^{-1} \text{ होगी,}$$

तब किसी समय t पर इसका विस्थापन

$$x(t) = 0.1 \cos (7.07t) \text{ होगा ।}$$

अत:, जब कण अपनी माध्य स्थिति से 5 cm दूर है, तब

$$0.05 = 0.1 \cos (7.07t)$$

अथवा $\cos (7.07t) = 0.5$,

अत:, $\sin (7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

तब गुटके का $x = 5$ cm पर वेग $= 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{m s}^{-1}$

$$= 0.61 \text{m s}^{-1}$$

अत:, गुटके की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} mw^2$

$$= \frac{1}{2}\left[1kg \times (0.6123 \text{ms}^{-1})^2\right]$$

$$= 0.19\ \text{J}$$

© NCERT not to be republished

तथा गुटके की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}kx^2$

$$= \frac{1}{2}(50\ \text{N m}^{-1} \times 0.05 \times 0.05\ \text{m})$$

$$= 0.0625\ \text{J}$$

$\therefore$ $x = 5$ cm पर गुटके की कुल ऊर्जा

$$= (0.19 + 0.0625)\ \text{J}$$

$$= 0.25\ \text{J}$$

हम यह भी जानते हैं कि अधिकतम विस्थापन पर, गतिज ऊर्जा शून्य होती है, अत: निकाय की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है । अत: निकाय की कुल ऊर्जा,

$$= \frac{1}{2}(50\ \text{N m}^{-1} \times 0.1\ \text{m} \times 0.1\ \text{m})$$

$$= 0.25\ \text{J}$$

यह ऊर्जा 5 cm विस्थापन पर दोनों ऊर्जाओं के योग के बराबर ही है । यह ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत के अनुकूल है। ◀

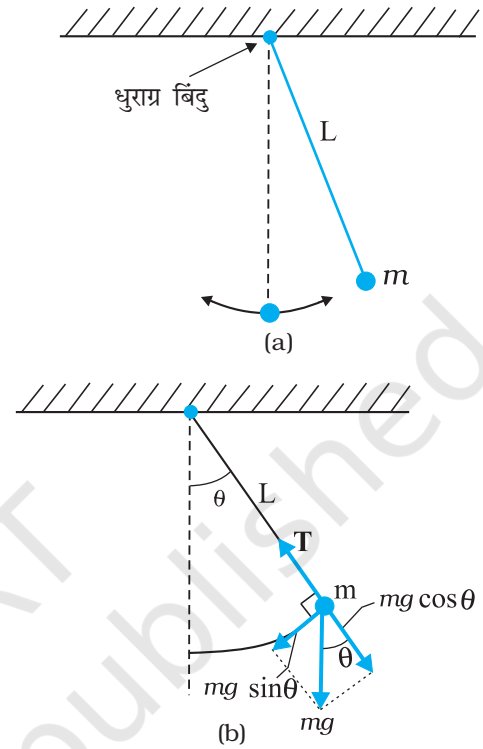
13.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

निरपेक्षत: शुद्ध सरल आवर्त गति के कोई भौतिक उदाहरण नहीं हैं । अपने व्यावहारिक जीवन में हम ऐसे निकाय देखते हैं जो किन्ही निश्चित परिस्थितियों में लगभग सरल आवर्त गति करते हैं । इस अनुभाग में इसके पश्चात् हम ऐसे ही कुछ निकायों की गतियों की चर्चा करेंगे ।

13.8.1 सरल लोलक

यह कहा जाता है कि गैलीलियो ने किसी चर्च में एक दोलायमान झाड़फानूस का आवर्तकाल अपनी नाड़ी की स्पंद गति द्वारा मापा था । उसने यह निष्कर्ष निकाला कि झाड़फानूस की गति आवर्ती है । यह निकाय लोलक का ही एक प्रकार होता है । लगभग 1 मीटर लंबे न खिंचने वाले धागे को लेकर उसके एक सिरे से पत्थर का टुकड़ा बाँधकर आप भी अपना एक लोलक बना सकते हैं । अपने लोलक को किसी उचित टेक से बाँधकर इस प्रकार लटकाइए कि वह स्वतंत्रतापूर्वक दोलन कर सके । पत्थर के टुकड़े को कम दूरी तक विस्थापित करके छोड़ दीजिए । पत्थर इधर-उधर गति करने लगता है । पत्थर की यह गति आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल लगभग 2 सेकंड होता है।

हम यह स्थापित करेंगे कि मध्यमान स्थिति से लघु विस्थापनों के लिए इस लोलक की आवर्त गति सरल आवर्त गति होती है। किसी ऐसे सरल लोलक पर विचार कीजिए जिसमें m द्रव्यमान का कोई लघु आमाप का गोलक L लम्बाई के द्रव्यमानहीन तथा न खिंचने योग्य डोरी के एक सिरे से बंधा हो। डोरी का दूसरा सिरा किसी दृढ़ टेक से जुड़ा है। गोलक इस ऊर्ध्वाधर दृढ़ टेक से होकर जाने वाली रेखा के अनुदिश तल में दोलन करता है। यह व्यवस्था चित्र 13.17(a) द्वारा दर्शाई गई है। चित्र 13.17(b) में दोलक पर कार्यरत बल प्रदर्शित किए गए हैं जो एक प्रकार का बल-निर्देशक आरेख है।



चित्र 13.17 (a) माध्य स्थिति के सापेक्ष दोलन करता कोई सरल लोलक, (b) त्रिज्य बल $T - mg\cos\theta$ अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है परंतु धुराग्र के सापेक्ष इसका कोई बल-आघूर्ण नहीं होता। स्पर्श रेखीय बल $mg\sin\theta$ प्रत्यानयन बल प्रदान करता है।

माना कि डोरी ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाती है। जब गोलक माध्य स्थिति में होता है तो $\theta = 0$

गोलक पर केवल दो बल कार्यरत हैं : डोरी की लंबाई के अनुदिश तनाव T तथा गुरुत्व के कारण ऊर्ध्वाधर बल $(=mg)$। हम बल mg का वियोजन डोरी के अनुदिश घटक $mg\cos\theta$ तथा उसके लंबवत् $mg\sin\theta$ के रूप में कर सकते हैं। चूँकि गोलक की गति L त्रिज्या के किसी वृत्त के अनुदिश है जिसका केन्द्र धुराग्र बिन्दु पर स्थित है, अत: गोलक का कोई त्रिज्य त्वरण $(\omega^2 L)$ तथा साथ ही स्पर्शरेखीय त्वरण होगा। स्पर्शरेखीय त्वरण का कारण वृत्त के चाप के अनुरूप गति का एकसमान न होना है। त्रिज्य त्वरण नेट त्रिज्य बल $T - mg\cos\theta$ के कारण होता है जबकि स्पर्शरेखीय त्वरण $mg\sin\theta$ के कारण उत्पन्न होता है। धुराग्र के सापेक्ष बल आघूर्ण पर विचार करना अधिक सुविधाजनक होता है क्योंकि तब त्रिज्य बल का आघूर्ण शून्य हो जाता है। इस प्रकार आधार के सापेक्ष बल आघूर्ण τ बल के स्पर्शरेखीय घटक द्वारा ही पूर्णतया प्राप्त होता है।

$$\tau = -L\,(mg\sin\theta) \qquad (13.19)$$

© NCERT not to be republished

यह एक प्रत्यानयन बल आघूर्ण है जो विस्थापन के परिणाम को कम करने का प्रयास करता है; इसी कारण इसे ऋणात्मक चिह्न द्वारा व्यक्त किया गया है। घूर्णी गति के लिए न्यूटन के नियम के अनुसार

$$\tau = I\alpha \qquad (13.20)$$

यहाँ I धुराग्र बिंदु के परित: लोलक का घूर्णी जड़त्व है तथा α उसी बिंदु के परित: कोणीय त्वरण है । इस प्रकार

$$I\alpha = -mgL\sin\theta \qquad (13.21)$$

अथवा $$\alpha = -\frac{mgL\sin\theta}{I} \qquad (13.22)$$

यदि हम यह मानें कि विस्थापन θ छोटा है, तो समीकरण (13.22) को सरल बना सकते हैं । हम जानते हैं कि $\sin\theta$ को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\cdots \qquad (13.23)$$

यहाँ θ रेडियन में है।

अब यदि θ छोटा है, तो $\sin\theta$ का सन्निकटन θ द्वारा किया जा सकता है । ऐसी परिस्थिति के समीकरण (13.22) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad (13.24)$$

सारणी 13.1 में हमने कोण θ को अंशों में, इसके तुल्यांक रेडियनों में, तथा फलन $\sin\theta$ के मान सूचीबद्ध किए हैं । सारणी से यह देखा जा सकता है कि θ के 20 अंश तक बड़े मानों के लिए $\sin\theta$ के मान लगभग वही होते हैं जैसे θ को **रेडियनों में व्यक्त** करने पर मिलते हैं

सारणी 13.1 $\sin\theta$ कोण θ के फलन के रूप में

θ (अंशों में)	θ (रेडियनों में)	$\sin\theta$
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.259
20	0.349	0.342

गणितीय रूप में समीकरण (13.24) समीकरण (13.11) के तुल्य है, अंतर केवल यह है कि यहाँ चर राशि कोणीय त्वरण है। अत: हमने यह सिद्ध कर दिया है कि θ के लघु मानों के लिए गोलक की गति सरल आवर्त गति है।

समीकरण (13.24) तथा समीकरण (13.11) से हम यह देखते हैं कि

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

तथा लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (13.25)$$

अब क्योंकि लोलक की डोरी द्रव्यहीन है, अत: जड़त्व आघूर्ण I केवल mL^2 के तुल्य होगा। इससे हमें सरल लोलक के आवर्त काल के लिए सुपरिचित सूत्र मिल जाता है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (13.26)$$

▶ ***उदाहरण 13.8*** उस सरल लोलक की लंबाई क्या है, जो हर सेकंड के बाद टिक करता है ?

हल समीकरण (13.26) से किसी सरल लोलक का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

इस संबंध से हमें प्राप्त होता है,

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

हर एक सेकंड के बाद टिक करने वाले सरल लोलक का आवर्तकाल T, 2 s होता है । अत: $g = 9.8\ \text{m s}^{-2}$ तथा $T = 2$ s के लिए सरल लोलक की लंबाई

$$L = \frac{9.8\,(\text{m s}^{-2}) \times 4\,(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1\ \text{m}$$ ◀

सारांश

1. वह गति जो स्वयं को दोहराती है *आवर्ती गति* कहलाती है,
2. एक दोलन अथवा चक्र को पूरा करने के लिए आवश्यक समय T को *आवर्तकाल* कहते हैं । यह आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित है,

$$T = \frac{1}{\nu}$$

© NCERT not to be republished

किसी आवर्ती अथवा दोलनी गति की *आवृत्ति* उसके द्वारा 1 सेकंड में पूरे किए गए दोलनों की संख्या होती है । SI मात्रक पद्धति में इसे हर्ट्ज़ में मापा जाता है;

1 हर्ट्ज़ = 1Hz = 1 दोलन प्रति सेकंड = $1s^{-1}$

3. *सरल आवर्त गति* में, किसी कण का उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापन $x(t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(विस्थापन)}$$

यहाँ x_m *विस्थापन का आयाम* $(\omega t + \phi)$ *गति की कला,* तथा ϕ *कला स्थिरांक* है । कोणीय आवृत्ति ω गति के आवर्तकाल तथा आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित होती है

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \text{ (कोणीय आवृत्ति)}$$

4. सरल आवर्त गति, एकसमान वर्तुल गति के उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है, जिस पर गति हो रही है ।

5. सरल आवर्त गति के समय कण के वेग तथा त्वरण को समय t के फलन के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$v(t) = -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) \text{ (वेग)}$$

$$a(t) = -\omega^2 A_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t) \quad \text{(त्वरण)}$$

समयकालिक क्रिया और सरल आवर्त गति द्वारा हम वेग और गति को इस प्रकार देख सकते हैं।

6. सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर कोई ऐसा बल आरोपित रहता है, जो कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती, तथा सदैव गति के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है ।

7. सरल आवर्त गति करते किसी कण में, किसी भी क्षण, गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ तथा स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ होती है । यदि कोई घर्षण न हो, तो निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा, $E = K+U$ सदैव ही अचर रहती है यद्यपि K और U परिवर्तित होते हैं ।

8. m द्रव्यमान का कोई कण जो हुक के नियम के अनुसार लगे प्रत्यानयन बल $F = -kx$ के प्रभाव में दोलन करता है, सरल आवर्त गति दर्शाता है जिसके लिए,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

तथा $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(आवर्तकाल)}$$

ऐसे निकाय को रैखिक दोलक भी कहते हैं ।

9. लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । इसका आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
आवर्तकाल	T	[T]	s	गति की स्वयं पुनरावृत्ति के लिए न्यूनतम समय
आवृत्ति	f या ν	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
कोणीय आवृत्ति	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$= 2\pi\nu$
कला नियतांक	ϕ	विमाहीन	रेडियन	सरल आवर्त गति में विस्थापन की कला का आरंभिक मान
बल नियतांक	k	$[MT^{-2}]$	$N\ m^{-1}$	सरल आवर्त गति में $F = -kx$

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

1. आवर्तकाल T वह *न्यूनतम समय* होता है जिसके पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है। इस प्रकार, समय अंतराल nT के पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है, यहाँ n कोई पूर्णांक है।
2. प्रत्येक आवर्ती गति सरल आवर्त गति नहीं होती। केवल वही आवर्ती गति जो बल-नियम $F = -k\,x$ द्वारा नियंत्रित होती है, सरल आवर्त गति होती है।
3. वर्तुल गति व्युत्क्रम-वर्ग नियम बल (जैसे ग्रहीय गति में) तथा द्विविमा में सरल आवर्त बल $-m\omega^2 r$ के कारण उत्पन्न हो सकती है। बाद के प्रकरण में, गति की कलाएँ, दो लंबवत् दिशाओं (x तथा y) में $\pi/2$ rad द्वारा भिन्न होनी चाहिए। इस प्रकार, कोई कण जिसकी आरंभिक स्थिति $(0, a)$ तथा वेग $(\omega A, 0)$ है $-m\,\omega^2 r$ बल आरोपित किए जाने पर A त्रिज्या के वृत्त में एकसमान वर्तुल गति करेगा।
4. ω के किसी दिए गए मान की रैखिक सरल आवर्त गति के लिए दो आरंभिक शर्तें आवश्यक हैं और ये शर्तें गति को पूर्णतः निर्धारित करने के लिए पर्याप्त हैं। ये आवश्यक शर्तें हो सकती हैं (i) आरंभिक स्थिति तथा आरंभिक वेग, अथवा (ii) आयाम तथा कला, अथवा (iii) ऊर्जा तथा कला।
5. उपरोक्त बिंदु (4) से, दिए गए आयाम अथवा ऊर्जा गति की कला का निर्धारण आरंभिक स्थिति अथवा आरंभिक वेग द्वारा किया जाता है।
6. यादृच्छिक आयामों तथा कलाओं वाली दो सरल आवर्त गतियों का संयोजन व्यापक रूप में आवर्ती नहीं होता। यह केवल तभी आवर्ती होता है जब एक गति की आवृत्ति दूसरी गति की आवृत्ति की पूर्णांक गुणज हो। तथापि, किसी आवर्ती गति को सदैव ही उपयुक्त आयामों की अनंत सरल आवर्त गतियों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
7. सरल आवर्त गति का आवर्तकाल आयाम अथवा ऊर्जा अथवा कला नियतांक पर निर्भर नहीं करता। गुरुत्वाकर्षण के अधीन ग्रहीय कक्षों के आवर्तकाल इसके विपरीत हैं (केप्लर का तृतीय नियम)।
8. किसी सरल लोलक की गति लघु कोणीय विस्थापन के लिए ही सरल आवर्त गति होती है।
9. किसी कण की गति यदि सरल आवर्त गति है, तो उसके विस्थापन को निम्न रूपों में से किसी एक रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t;$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha);\ x = B\sin(\omega t + \beta)$$

ये तीनों रूप पूर्णतः समतुल्य हैं (किसी भी एक रूप को अन्य दो रूपों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।)

अभ्यास

13.1 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है ?

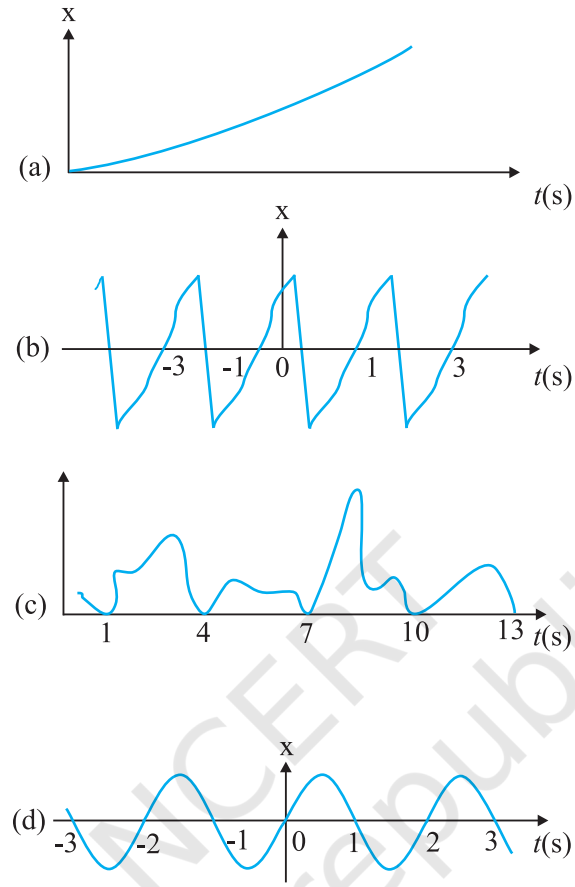
(i) किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना और अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।
(ii) किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुंबक को उसकी N-S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।
(iii) अपने द्रव्यमान केंद्र के परितः घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।
(iv) किसी कमान से छोड़ा गया तीर।

13.2 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं निरूपित करते हैं ?

(i) पृथ्वी की अपने अक्ष के परितः घूर्णन गति।
(ii) किसी U-नली में दोलायमान पारे के स्तंभ की गति।
(iii) किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बॉल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिंदु से कुछ ऊपर के बिंदु से मुक्त रूप से छोड़ा जाए।
(iv) किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के परितः व्यापक कंपन।

© NCERT not to be republished

13.3 चित्र 13.18 में किसी कण की रैखिक गति के लिए चार x-t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है ? उस गति का आवर्तकाल क्या है (आवर्ती गति वाली गति का)।



चित्र 13.18

13.4 नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति (b) आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (c) अनावर्ती गति का निरूपण करते हैं। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए : (ω कोई धनात्मक अचर है।)

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos (\frac{\pi}{4} - 2 \omega t)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3 \omega t + \cos 5 \omega t$

(e) $\exp (-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

13.5 कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित दो बिंदुओं A तथा B के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। A से B की ओर की दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण

(a) A सिरे पर है,

(b) B सिरे पर है,

(c) A की ओर जाते हुए AB के मध्य बिंदु पर है,

(d) A की ओर जाते हुए B से 2 cm दूर है,

© NCERT not to be republished

(e) B की ओर जाते हुए A से 3 cm दूर है, तथा

(f) A की ओर जाते हुए B से 4 cm दूर है।

13.6 नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच संबंधों में से किससे सरल आवर्त गति संबद्ध है :

(a) $a = 0.7\,x$

(b) $a = -200\,x^2$

(c) $a = -10\,x$

(d) $a = 100\,x^3$

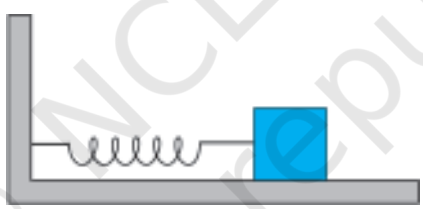
13.7 सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

यदि कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति 1 cm तथा उसका आरंभिक वेग π cm s^{-1} है, तो कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या है ? कण की कोणीय आवृत्ति π s^{-1} है। यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फलन चुनें; $x = B\sin(\omega t + \alpha)$, तो उपरोक्त आरंभिक प्रतिबंधों में कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या होगा ?

13.8 किसी कमानीदार तुला का पैमाना 0 से 50 kg तक अंकित है और पैमाने की लंबाई 20 cm है। इस तुला से लटकाया गया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6 s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिंड का भार कितना है ?

13.9 1200 N m^{-1} कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र 13.19 में दर्शाए अनुसार किसी क्षैतिज मेज से जड़ी है। कमानी के मुक्त सिरे से 3 kg द्रव्यमान का कोई पिण्ड जुड़ा है। इस पिण्ड को एक ओर 2.0 cm दूरी तक खींच कर मुक्त किया जाता है,



चित्र 13.19

(i) पिण्ड के दोलन की आवृत्ति,

(ii) पिण्ड का अधिकतम त्वरण, तथा

(iii) पिण्ड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

13.10 अभ्यास 13.9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिण्ड की स्थिति $x = 0$ है तथा बाएँ से दाएँ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिण्ड के विस्थापन x को समय के फलन के रूप मे दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरंभ ($t = 0$) करते समय पिण्ड,

(a) अपनी माध्य स्थिति,

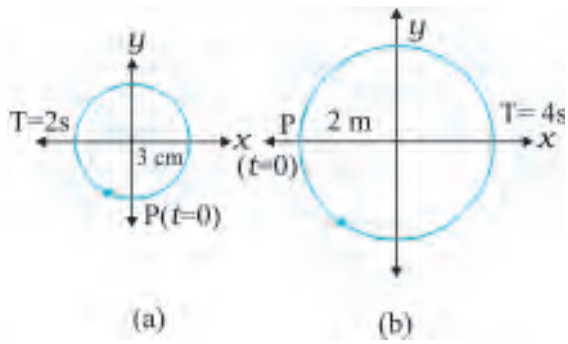
(b) अधिकतम तानित स्थिति, तथा

(c) अधिकतम संपीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरंभिक कला में किस रूप में भिन्न हैं ?

13.11 चित्र 13.20 में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तदनुरूपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्य, परिक्रमण-काल, आरंभिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शायी गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्य-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तदनुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished



चित्र 13.20

13.12 नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तदनुरूपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिए। घूर्णी कण की आरंभिक (t = 0) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm में तथा t को s में लीजिए।)

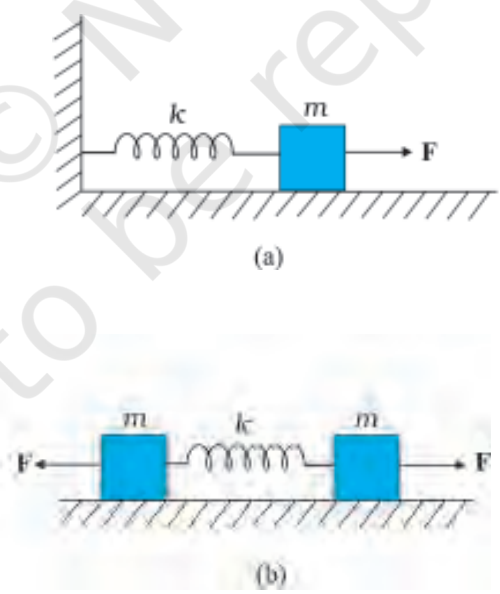
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

13.13 चित्र 13.21(a) में k बल-स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल **F** आरोपित करने से कमानी तन जाती है। चित्र 13.21(b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र 13.21 में समान बल **F** द्वारा तानित किया गया है।



चित्र 13.21

(a) दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

(b) यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

13.14 किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिंडर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम का दो गुना) 1.0 m का है । यदि पिस्टन 200 rad/min की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है ?

13.15 चंद्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण 1.7 m s^{-2} है । यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5s है, तो उसका चंद्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा ? (पृथ्वी के पृष्ठ पर $g = 9.8 \text{m s}^{-2}$)

13.16 किसी कार की छत से l लंबाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, लटकाया गया है । कार R त्रिज्या की वृत्तीय पथ पर एकसमान चाल v से गतिमान है । यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है, तो इसका आवर्तकाल क्या होगा ?

13.17 आधार क्षेत्रफल A तथा ऊँचाई h के एक कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρ_l घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है । कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतंत्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कॉर्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका आवर्तकाल

$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_l g}}$ है ।

यहाँ ρ कॉर्क का घनत्व है (द्रव की श्यानता के कारण अवमंदन को नगण्य मानिए) ।

13.18 पारे से भरी किसी U नली का एक सिरा किसी चूषण पंप से जुड़ा है, तथा दूसरा सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया गया है । दोनों स्तंभों में कुछ दाबांतर बनाए रखा जाता है । यह दर्शाइए कि जब चूषण पंप को हटा देते हैं, तब U नली में पारे का स्तंभ सरल आवर्त गति करता है ।

© NCERT not to be republished

11089CH15

अध्याय 14

तरंगें

14.1 भूमिका
14.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें
14.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध
14.4 प्रगामी तरंग की चाल
14.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत
14.6 तरंगों का परावर्तन
14.7 विस्पंदें

सारांश
विचारणीय विषय
अभ्यास

14.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने ऐसे पिण्डों की गति के बारे में अध्ययन किया जो एकाकी दोलन करते हैं। यदि कोई निकाय इसी प्रकार के पिण्डों का समूह है, तो उस निकाय में क्या होगा? एक द्रव्यमान युक्त माध्यम इसी प्रकार के निकाय का उदाहरण है। इस प्रकार के माध्यम में प्रत्यास्थ बल माध्यम के अवयवों को एक-दूसरे से बाँध रखते हैं जिसके कारण किसी एक अवयव की गति दूसरे अवयव की गति को प्रभावित करती है। यदि आप एक छोटे कंकड़ को किसी तालाब के शांत जल में धीरे से गिराएँ, तो जल का पृष्ठ विक्षुब्ध हो जाता है । यह विक्षोभ किसी एक स्थान तक ही सीमित नहीं रहता, वरन् एक वृत्त के अनुदिश बाहर की ओर संचरित होता है। यदि आप इसी प्रकार तालाब में निरंतर कंकड़ गिराते रहें, तो आप यह देखेंगे कि तालाब के पृष्ठ के जिस बिंदु पर विक्षोभ उत्पन्न हुआ है वहाँ से यह विक्षोभ वृत्तों के रूप में तीव्रता से बाहर की ओर गति करता है । हमें ऐसा प्रतीत होता है जैसे विक्षोभ बिंदु से जल स्वयं बाहर की ओर गति कर रहा हो । यदि आप विक्षुब्ध पृष्ठ पर कुछ छोटे-छोटे कॉर्क के टुकड़े धीरे से रख दें, तो आप पाएँगे कि ये कॉर्क के टुकड़े अपने-अपने स्थानों पर ही ऊपर-नीचे गति करते हैं, परंतु विक्षोभ के केंद्र बिंदु से दूर नहीं जाते अर्थात् उनकी विक्षोभ के केंद्र से दूरी नियत बनी रहती है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि जल का द्रव्यमान स्वयं वृत्तों के साथ बाहर की ओर गति नहीं करता, बस, एक गतिशील विक्षोभ उत्पन्न हो जाता है । इसी प्रकार जब हम बोलते हैं, तो ध्वनि हवा (माध्यम) में हमसे दूर जाती है । परंतु इस प्रक्रिया में (वायु) एक भाग से दूसरे भाग में प्रवाहित नहीं होती । वायु में उत्पन्न हुए विक्षोभ हमें स्पष्ट रूप से दिखाई नहीं देते, हमारे कानों अथवा माइक्रोफोनों द्वारा ही हम इनको जान पाते हैं। इस प्रकार के विक्षोभों के प्रतिरूप या पैटर्न जो द्रव्य के वास्तविक भौतिक स्थानांतरण अथवा समूचे द्रव्य के प्रवाह के बिना ही माध्यम के एक स्थान से दूसरे स्थान तक गति करते हैं, **तरंग** कहलाते हैं । इस अध्याय में हम तरंगों के विषय में अध्ययन करेंगे ।

तरंगों द्वारा एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ऊर्जा तथा विक्षोभ के पैटर्न की सूचना का संचरण होता है। हमारा समस्त संचार-तंत्र तरंगों द्वारा संकेतों के संचरण पर निर्भर करता है। वाक् (बातचीत) का अर्थ है वायु में ध्वनि तरंगें उत्पन्न करना तथा श्रवण

© NCERT not to be republished

उनके संसूचन को व्यक्त करता है। सूचना का आदान-प्रदान प्रायः विभिन्न प्रकार की तरंगों के माध्यम द्वारा होता है। उदाहरण के लिए ध्वनि तरंगों को सर्वप्रथम विद्युत संकेतों के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है जिनसे विद्युत-चुंबकीय तरंगें जनित की जा सकती हैं जिनका संचरण प्रकाशिक रेशों की केबिल अथवा उपग्रह द्वारा हो सकता है। मूल संकेत के संसूचन में समान्यतया यही चरण व्युत्क्रम क्रम में अपनाए जाते हैं।

सभी तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । हम जानते हैं कि प्रकाश तरंगें निर्वात से गमन कर सकती हैं । हमसे सैकड़ों प्रकाश वर्ष की दूरी पर स्थित तारों से उत्सर्जित प्रकाश अंतरतारकीय अंतरिक्ष, जो व्यावहारिक रूप से निर्वात ही है, से गमन करता हुआ हम तक पहुँचता है ।

किसी डोरी तथा जल में उत्पन्न तरंगों, ध्वनि तरंगों, भूकंपी तरंगों जैसी सुपरिचित तरंगें यांत्रिक तरंगों के रूप में जानी जाती हैं। इन सभी तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है, ये बिना माध्यम के संचरित नहीं हो सकतीं। इनका संचरण माध्यम के कणों के दोलनों के कारण संभव हो पाता है तथा माध्यम के प्रत्यास्थ गुणों पर निर्भर करता है। विद्युत-चुंबकीय तरंगें सर्वथा भिन्न प्रकार की तरंगें होती हैं जिनके विषय में आप कक्षा 12 में अध्ययन करेंगे। विद्युत-चुंबकीय तरंगों के संचरण के लिए माध्यम का होना आवश्यक नहीं है– इनका संचरण निर्वात में भी होता है। प्रकाश, रेडियो तरंगें, X-किरणें सभी विद्युत-चुंबकीय किरणें हैं। निर्वात में सभी विद्युत-चुंबकीय तरंगों की चाल, c, समान होती है जिसका मान है:

$$c = 29,97,92,458 \text{ m s}^{-1} \qquad (14.1)$$

तीसरी प्रकार की एक अन्य तरंग है जिसे द्रव्य तरंग के नाम से जाना जाता है। यह द्रव्य के इलेक्ट्रॉन, प्रोटान, न्यूट्रान, परमाणु तथा अणु जैसे घटकों से संबद्ध हैं। ये तरंगें प्रकृति के क्वांटम यांत्रिकीय विवरण में प्रकट होती हैं जिसके विषय में आप अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे । यद्यपि ये तरंगें संकल्पनात्मक रूप में यांत्रिक तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों की तुलना में अधिक अमूर्त हैं, तथापि इनका अनुप्रयोग आधुनिक प्रौद्योगिकी की बहुत सी मूल युक्तियों में पाया जाता है; इलेक्ट्रॉन से संबद्ध द्रव्य तरंगों का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है ।

इस अध्याय में हम केवल यांत्रिक तरंगों के बारे में, जिनके संचरण के लिए द्रव्यात्मक माध्यम आवश्यक है, अध्ययन करेंगे ।

पुरातन काल से ही हमारी कला तथा साहित्य पर तरंगों का सौंदर्यबोधात्मक प्रभाव दृष्टिगोचर होता है, फिर भी तरंग गति का वैज्ञानिक विश्लेषण सर्वप्रथम सत्रहवीं शताब्दी में किया गया था । क्रिश्चियन हाइगेन्स (1629-1695), राबर्ट हुक तथा आइज़क न्यूटन कुछ ऐसे प्रसिद्ध भौतिकविद हैं जिनके नाम तरंग गति की भौतिकी से संबद्ध हैं । कमानी से बँधे पिण्डों के दोलनों की भौतिकी तथा सरल लोलक की भौतिकी के पश्चात् ही तरंगों की भौतिकी को समझा गया । प्रत्यास्थ माध्यमों में तरंगों का आवर्ती दोलनों के साथ अंतरंग संबंध होता है । (तानित डोरियाँ, कुंडलित कमानियाँ, वायु आदि प्रत्यास्थ माध्यमों के उदाहरण हैं ।) इस संबंध की व्याख्या हम सरल उदाहरणों द्वारा करेंगे ।

चित्र 14.1 में दर्शाए अनुसार एक दूसरे से संबद्ध कमानियों की व्यवस्था पर विचार कीजिए । यदि इसके एक सिरे की कमानी को यकायक खींचकर छोड़ दें, तो उत्पन्न विक्षोभ दूसरे सिरे तक गमन करता है । इस प्रक्रिया में क्या होता है ? यकायक खींचने पर पहली कमानी अपनी साम्यावस्था की लंबाई से विक्षोभित होती है । चूँकि दूसरी कमानी पहली कमानी से संबद्ध है, अतः उसमें तनाव अथवा संपीडन होता है और इस प्रकार यह प्रक्रिया आगे बढ़ती जाती है । यहाँ विक्षोभ तो एक सिरे से दूसरे तक संचरित हो जाता है, परंतु प्रत्येक कमानी अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर ही लघु दोलन करती रहती है । ऐसे ही एक व्यावहारिक उदाहरण के रूप में रेलवे स्टेशन पर विराम की स्थिति में खड़ी किसी रेलगाड़ी पर विचार कीजिए । रेलगाड़ी के विभिन्न



चित्र 14.1 एक-दूसरे से संबद्ध कमानियों का संग्रह । सिरे A को यकायक खींचा जाता है; तब विक्षोभ दूसरे सिरे तक संचरित हो जाता है ।

डिब्बे, कमानी युग्मकों द्वारा एक-दूसरे से युग्मित होते हैं । जब इन डिब्बों के किसी एक सिरे से किसी इंजन को जोड़ते हैं, तो वह अपने से अगले डिब्बे को धक्का देता है तथा यह धक्का एक डिब्बे से दूसरे डिब्बे में, दूसरे से फिर तीसरे में, इसी प्रकार आगे संचरित होते हुए आखिरी डिब्बे तक पहुँच जाता है, लेकिन समस्त रेलगाड़ी अपने ही स्थान पर खड़ी रहती है ।

आइए, अब हम वायु में ध्वनि तरंगों के संचरण पर विचार करते हैं । जैसे ही कोई ध्वनि तरंग वायु से होकर गुजरती है, तो वह उस स्थान की वायु के छोटे से क्षेत्र को संपीडित अथवा विस्तारित करती है । इसके कारण उस छोटे क्षेत्र की वायु के घनत्व में, मान लीजिए ($\delta\rho$), परिवर्तन होता है । दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल होता है, अतः कमानी की ही भाँति

© NCERT not to be republished

इस स्थिति में भी विक्षोभ के अनुक्रमानुपात में 'प्रत्यानयन बल' उत्पन्न हो जाता है। यहाँ इस प्रकरण में, घनत्व में परिवर्तन, कमानी में उत्पन्न संपीडन अथवा विस्तारण के समरूप है। यदि किसी क्षेत्र को संपीडित किया जाता है, तो उस क्षेत्र के अणु बाहर निकलकर समीपवर्ती क्षेत्र में जाने का प्रयास करते हैं। इस प्रकार, समीपवर्ती क्षेत्र में घनत्व बढ़ता है, अथवा उस क्षेत्र में 'संपीडन' उत्पन्न होता है जिसके फलस्वरूप पूर्ववर्ती क्षेत्र में 'विरलन' उत्पन्न हो जाता है। यदि कोई क्षेत्र अपने चारों ओर के क्षेत्रों की तुलना में विरलित हो, तो उस क्षेत्र के चारों ओर के परिवेश की वायु उस क्षेत्र में प्रवेश करके विरलन को समीपवर्ती क्षेत्र की ओर धकेल देती है। इस प्रकार, संपीडन अथवा विरलन एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र की ओर गति करते हैं, जिसके कारण वायु में विक्षोभ का संचरण संभव हो पाता है।

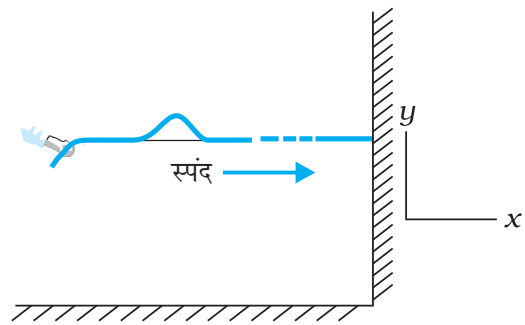
ठोसों में भी इसी के सदृश तर्क दिया जा सकता है। क्रिस्टलीय ठोसों में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह आवर्ती जालकों में व्यवस्थित होते हैं। इनमें, प्रत्येक परमाणु अथवा परमाणुओं का समूह, अपने चारों ओर के परमाणुओं द्वारा आरोपित बलों के कारण, साम्यावस्था में होता है। यदि अन्य परमाणुओं को स्थिर रखते हुए किसी एक परमाणु को विस्थापित किया जाए, तो ठीक उसी प्रकार जैसा कि कमानी के प्रकरण में था, इस स्थिति में भी एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है। अतः हम जालक (lattice) के परमाणुओं को अंत्य बिंदुओं की भाँति ले सकते हैं तथा परमाणु-युगलों के बीच कमानियाँ लगी मान सकते हैं।

अब हम इस अध्याय के अगले अनुभागों में तरंगों के विभिन्न अभिलाक्षणिक गुणों की चर्चा करेंगे।

14.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें

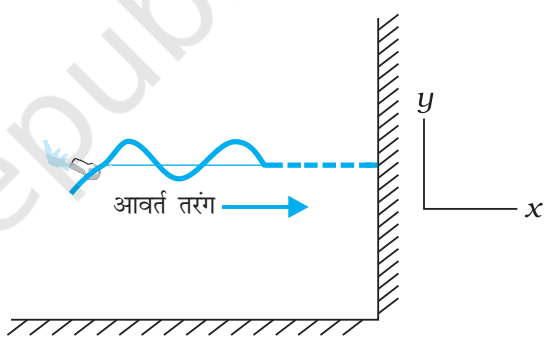
हम जानते हैं कि यांत्रिक तरंगों की गति में माध्यम के घटक दोलन करते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं तो ऐसी तरंग को हम अनुप्रस्थ तरंग कहते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं तो तरंग को अनुदैर्घ्य तरंग के रूप में जाना जाता है।

चित्र 14.2 में किसी डोरी के अनुदिश एक ऐसे स्पंद को गति करते दिखाया गया है जिसे डोरी को एक बार ऊपर-नीचे झटकने के बाद उत्पन्न किया गया है। यदि स्पंद के आमाप की तुलना में डोरी की लंबाई अत्यधिक हो तो उसके दूसरे सिरे तक पहुँचने से पहले ही स्पंद का अवमंदन हो जाएगा। अतः दूसरे सिरे पर स्पंद के परावर्तन को अनदेखा किया जा सकता है। चित्र 14.3



चित्र 14.2 *जब किसी तानित डोरी के अनुदिश (x-अक्ष) कोई एकल स्पंद गतिशील होता है तो डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव ऊपर-नीचे (y-अक्ष) दोलन करता है।*

में भी ऐसी ही एक स्थिति प्रदर्शित की गई है अंतर केवल इतना है कि इसमें बाह्य कारक द्वारा डोरी के एक सिरे पर ऊपर-नीचे की ओर सतत आवर्ती ज्यावक्रीय झटके प्रदान किए जा रहे हैं। इस प्रकार से डोरी में उत्पन्न विक्षोभ का परिणाम उसमें प्रग्रामी



चित्र 14.3 *किसी डोरी के अनुदिश प्रेषित कोई आवर्त (ज्यावक्रीय) तरंग अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है। तरंग के क्षेत्र में डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव तरंग की गमन दिशा के लंबवत् अपनी साम्यावस्था के सापेक्ष दोलन करता है।*

ज्यावक्रीय तरंग होता है। दोनों ही परिस्थितियों में माध्यम के अवयव अपनी माध्य साम्यावस्था के इर्द-गिर्द दोलन करते हैं जबकि स्पंद अथवा तरंग उनसे संचरित होती है। दोलन डोरी में तरंग की गति की दिशा के लंबवत् हैं, अतः यह अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है।

हम किसी तरंग पर दो प्रकार से विचार कर सकते हैं। हम किसी निश्चित काल-क्षण पर आकाश में तरंग का चित्रण कर सकते हैं। इससे हमें किसी काल-क्षण पर तरंग की आकृति मिल जाएगी। एक अन्य विधि तरंग की किसी स्थान विशेष पर विचार

© NCERT not to be republished

करना है अर्थात् हम अपना ध्यान डोरी के किसी निश्चित अवयव पर केंद्रित करें तथा समय के साथ इसके दोलनों को देखें।

चित्र 14.4 में अनुदैर्घ्य तरंगों के सबसे सामान्य उदाहरण ध्वनि तरंगों की स्थिति प्रदर्शित की गई है। वायु से भरे किसी लंबे पाइप के एक सिरे पर एक पिस्टन लगा है। पिस्टन को एक बार अंदर की ओर धकेलते और फिर बाहर की ओर खींचने से संपीडन



चित्र 14.4 पिस्टन को आगे-पीछे गति कराकर वायु से भरी नली में ध्वनि तरंग उत्पन्न की जाती है। चूँकि वायु-अवयव के दोलन तरंग गति की दिशा के समांतर हैं, अतः यह अनुदैर्घ्य तरंग है।

(उच्च घनत्व) तथा विरलन (न्यून घनत्व) का स्पंद उत्पन्न हो जाएगा। यदि पिस्टन को अंदर की ओर धकेलने तथा बाहर की ओर खींचने का क्रम सतत तथा आवर्ती (ज्यावक्रीय) हो तो एक ज्यावक्रीय तरंग उत्पन्न होगी जो पाइप की लंबाई के अनुदिश वायु में गमन करेगी। स्पष्ट रूप से यह अनुदैर्घ्य तरंग का उदाहरण है।

उपरोक्त वर्णित तरंगें, चाहे वह अनुप्रस्थ हों अथवा अनुदैर्घ्य, प्रगामी तरंगें हैं क्योंकि वह माध्यम के एक बिन्दु से दूसरे बिंदु तक गमन करती हैं। जैसा कि पहले बताया गया है, वह द्रव्य जिससे तरंग संचरित होती है, गति नहीं करता है। उदाहरणार्थ, किसी धारा में जल की पूर्ण रूप से गति होती है। परन्तु, किसी जल तरंग में विक्षोभ गति करते हैं न कि पूर्ण रूप से जल। इसी प्रकार, पवन (वायु का पूर्ण रूप से गति) तथा ध्वनि तरंग को एक नहीं समझना चाहिए– ध्वनि तरंग में विक्षोभ (दाब घनत्व में) का वायु में संचरण होता है वायु माध्यम पूर्ण रूपेण गति नहीं करता है।

अनुप्रस्थ तरंगों में कणों की गति तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होती है। अतः तरंग संचरण के समय माध्यम के प्रत्येक अवयव में अपरूपण विकृति होती है। अतः अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों, जैसे ठोसों में हो सकता है जो अपरूपक प्रतिबलों का परिपालन कर सकें जबकि तरलों में यह संचरण नहीं हो सकता। तरलों के साथ-साथ ठोस भी संपीडन विकृति का प्रतिपालन कर सकते हैं, अतः अनुदैर्घ्य तरंगों का संचरण सभी प्रत्यास्थ माध्यमों में कराया जा सकता है। उदाहरण के लिए, स्टील जैसे माध्यमों में अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्घ्य दोनों प्रकार की तरंगें संचरित हो सकती हैं, जबकि वायु में केवल अनुदैर्घ्य यांत्रिक तरंगों का ही संचरण संभव है। जल के पृष्ठ पर दो प्रकार की तरंग होती हैं : केशिकात्वीच (अथवा पृष्ठ तनावी) तरंगें तथा गुरुत्व तरंगें। पहले प्रकार की तरंगें काफी कम तरंगदैर्घ्य की उर्मिकाएं होती हैं जिनकी तरंगदैर्घ्य कुछ सेंटीमीटर से अधिक नहीं होती तथा इनके बनने का कारण जल के पृष्ठ तनाव के कारण प्रत्यानयन बल होता है। गुरुत्व तरंगों की तरंगदैर्घ्य का प्रारूपिक परिसर कई मीटर से कई सौ मीटर तक होता है। ये तरंगें गुरुत्वीय खिंचाव के रूप में लगने वाले प्रत्यानयन बल द्वारा बनती हैं जो जल के पृष्ठ को अपने न्यूनतम स्तर पर रखने का प्रयास करती हैं।

इन तरंगों में कणों के दोलन पृष्ठ तक ही सीमित नहीं रहते बल्कि इनका विस्तार घटते आयाम के साथ तली तक होता है जल-तरंगों में कण-गति के साथ एक जटिल गति सम्मिलित होती है, वे न केवल ऊपर-नीचे गति करते हैं बल्कि उनकी पश्च तथा अग्र-गति भी होती है। समुद्र में उत्पन्न तरंगें अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्घ्य तरंगों का संयोजन होती हैं।

व्यापक रूप में यह पाया गया है कि एक ही माध्यम में अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल भिन्न-भिन्न होती है।

▶ ***उदाहरण 14.1*** नीचे तरंग गति के कुछ उदाहरण दिए गए हैं, प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि क्या तरंग गति अनुप्रस्थ है, अनुदैर्घ्य है अथवा दोनों का संयोजन है :

(a) किसी लंबी कुंडलित कमानी के एक सिरे को एक ओर विस्थापित करने पर उस कमानी की किसी विभंग (ऐंठन) की गति।

(b) द्रव से भरे किसी सिलिंडर में इसके पिस्टन को आगे-पीछे करके सिलिंडर में उत्पन्न तरंगें।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटरबोट द्वारा उत्पन्न तरंगें।

(d) किसी कंपायमान क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल द्वारा वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें।

हल

(a) अनुप्रस्थ

(b) अनुदैर्घ्य

(c) अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य

(d) अनुदैर्घ्य ◀

14.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध

किसी प्रगामी तरंग के गणितीय विवरण के लिए, हमें स्थिति x तथा समय t दोनों के किसी फलन की आवश्यकता होती है। प्रत्येक

© NCERT not to be republished

क्षण पर यह फलन तरंग की उस क्षण पर आकृति का विवरण देता है। साथ ही दी हुई प्रत्येक स्थिति पर यह फलन उस स्थिति पर माध्यम की अवयव की गति का विवरण भी देता है। यदि हम किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग (ऐसी एक तरंग चित्र 14.3 में दर्शायी गई है) का वर्णन करना चाहते हैं तो संलग्न फलन भी ज्यावक्रीय होना चाहिए। सुविधा के लिए हम किसी अनुप्रस्थ तरंग पर विचार करेंगे जिससे यदि माध्यम के किसी अवयव की स्थिति को x से निरूपित करें तो अवयव की माध्य स्थिति से विस्थापन को y से निरूपित करना होगा। किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग को तब निम्न रूप से वर्णित करते हैं

$$y(x, t) = a \sin (k x - \omega t + \phi) \qquad (14.2)$$

ज्या फलन के कोणांक में पद ϕ का तात्पर्य है कि हम ज्या और कोज्या फलनों के रैखिक संयोजन पर विचार कर रहे हैं :

$$y(x, t) = A \sin (kx - \omega t) + B \cos (kx - \omega t) \qquad (14.3)$$

तब समीकरण (14.2) एवं (14.3) से

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{तथा} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

समीकरण (14.2) क्यों ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग निरूपित करता है यह समझने के लिए किसी निश्चित क्षण, मान लीजिए $t = t_0$, पर विचार करें। तब समीकरण (14.2) में ज्या फलन का कोणांक (kx + स्थिरांक) होगा। अत: तरंग का आकार (किसी निश्चित क्षण पर) x के फलन के रूप में ज्या तरंग है। इसी प्रकार, किसी निश्चित स्थिति $x = x_0$ पर विचार करें। तब समीकरण (14.2) में ज्या फलन का कोणांक एक स्थिरांक $-\omega t$ है। अत: किसी निश्चित स्थिति पर विस्थापन y समय के साथ ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होता है। अर्थात, विभिन्न स्थितियों पर माध्यम के अवयव सरल आवर्त गति करते हैं। ध्यान दीजिए कि जैसे t का मान बढ़ता है, x का मान भी धनात्मक दिशा में बढ़ेगा जिससे $kx - \omega t + \phi$ का मान अचर रहे। अत: समीकरण (14.2) x - अक्ष के धनात्मक दिशा के अनुदिश ज्यावक्रीय (आवर्त) तरंग निरूपित करता है। इसके विपरीत, फलन

$$y(x, t) = a \sin (kx + \omega t + \phi) \qquad (14.4)$$

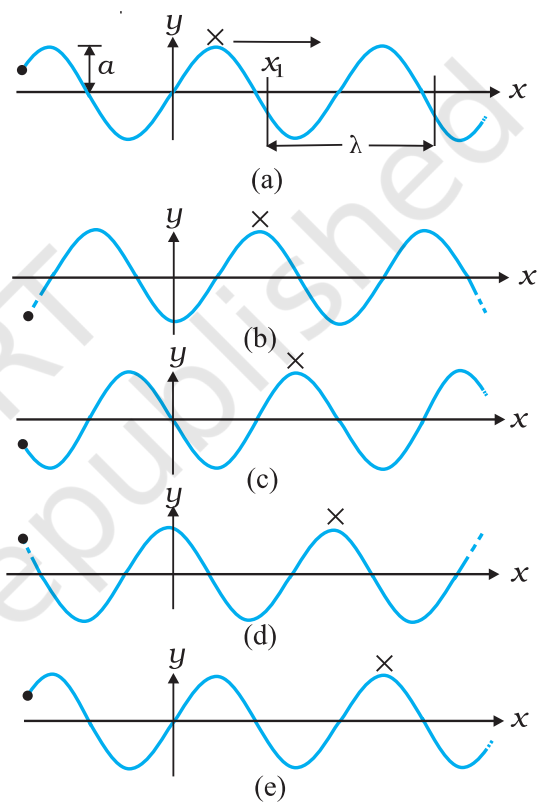
x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील तरंग को निरूपित

$y(x,t)$	:	स्थिति x तथा समय t के फलन के रूप में विस्थापन
a	:	तरंग का आयाम
ω	:	तरंग की कोणीय आवृत्ति
k	:	कोणीय तरंग संख्या
$kx-\omega t+\phi$	:	आरंभिक कला कोण ($a+x = 0$, $t = 0$)

चित्र 14.5 समीकरण (14.2) के मानक चिह्नों की परिभाषा।

करता है। चित्र 14.5 समीकरण (14.2) के विभिन्न भौतिक राशियों के नाम दर्शाता है जिसको हम अब परिभाषित करेंगे।

चित्र 14.6 समान अंतराल पर पाँच भिन्न मानों के लिए समीकरण (14.2) के आलेख दर्शाता है। किसी तरंग में अधिकतम धनात्मक विस्थापन वाले बिंदु को शीर्ष कहते हैं तथा अधिकतम ऋणात्मक विस्थापन वाले बिंदु को गर्त कहते हैं। यह देखने के लिए कि कोई तरंग कैसे गति करती है हम शीर्ष पर ध्यान केन्द्रित कर सकते हैं और फिर देखें कि यह शीर्ष समय के साथ कैसे गति



चित्र 14.6 भिन्न समयों पर x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील कोई आवर्ती तरंग

करता है। चित्र में इसे शीर्ष पर क्रास (×) से दर्शाया गया है। इसी प्रकार हम माध्यम के किसी निश्चित स्थिति, मान लीजिए x अक्ष के मूल बिंदु पर किसी अवयव की गति पर विचार कर सकते हैं। इसे चित्र पर ठोस बिन्दु (•) से दर्शाया गया है। चित्र 14.6 के आलेख दर्शाते हैं कि मूल बिंदु पर ठोस बिंदु (•) समय के साथ आवर्ती रूप से गति करता है। अर्थात, तरंग के गति के साथ मूल बिंदु पर स्थित कण अपनी माध्य स्थिति के पारित: दोलन करता है। यह किसी अन्य स्थिति के कण के लिए भी सत्य है। हम यह भी देखते हैं कि जितने समय में ठोस बिंदु (•) एक पूर्ण दोलन करता है उतने में शीर्ष एक निश्चित दूरी चल लेता है।

© NCERT not to be republished

चित्र 14.6 के आलेखों के आधार पर अब हम समीकरण (14.2) की विभिन्न राशियों को परिभाषित करेंगे

14.3.1 आयाम तथा कला

समीकरण (14.2) में, चूंकि ज्या फलन का मान +1 तथा –1 के बीच परिवर्तित होता है, विस्थापन $y\,(x,t)$ का मान a तथा $-a$ के बीच परिवर्तित होता है। हम यदि a को धनात्मक अचर मानें तो व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है। तब a माध्यक के किसी अवयव का अपने माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन दर्शाता है। ध्यान दें कि विस्थापन y धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है परंतु a धनात्मक है। a को तरंग का *आयाम* कहते हैं।

समीकरण (14.2) के कोणांक की राशि $(kx - \omega t + \phi)$ को तरंग की कला कहते हैं। दिये हुए आयाम a के लिए, किसी स्थिति एवं समय पर कला तरंग का विस्थापन निर्धारित करता है। स्पष्टत: $x=0$ तथा $t=0$ पर कला ϕ है। अत: ϕ को आरंभिक कला कोण कहते हैं। x-अक्ष पर मूल बिंदु तथा आरंभिक क्षण का इस प्रकार चुनाव सदैव ही संभव होता है कि $\phi = 0$। अत: समीकरण (14.2) में $\phi = 0$ लेने पर व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है।

14.3.2 तरंगदैर्घ्य तथा कोणीय तरंग संख्या

समान कला के दो बिंदुओं के बीच की न्यूनतम दूरी को तरंगदैर्घ्य कहते हैं और इसे सामान्यत: λ से दर्शाते हैं। सुविधा के लिए हम समान कला वाले बिंदुओं को शीर्ष या गर्त ले सकते हैं। तब तरंगदैर्घ्य दो क्रमागत शीर्षों अथवा गर्तों के बीच की दूरी है। समीकरण (14.2) में $\phi = 0$ लेने पर, $t = 0$ पर विस्थापन होगा

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (14.5)$$

चूंकि कोण में 2π से प्रत्येक परिवर्तन पर ज्या फलन का मान वही रहता है :

$$\sin kx = \sin (kx + 2n\pi) = \sin k\left[x + \frac{2n\pi}{k}\right]$$

अर्थात बिंदुओं x तथा $x+\frac{2n\pi}{k}a$ पर विस्थापन समान होते हैं – यहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$। समान विस्थापन किसी दिये हुए क्षण पर वाले बिंदुओं के मध्य न्यूनतम दूरी $n = 1$ लेने पर प्राप्त होती है। λ तब दिया जाता है समीकरण

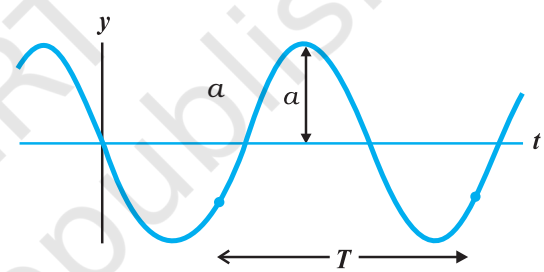
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \text{ या } k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (14.6)$$

k को **संचरण स्थिरांक** अथवा **कोणीय तरंग संख्या** कहते हैं। इसका SI मात्रक रेडियन प्रति मीटर अथवा rad m^{-1} है।*

14.3.3 आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति तथा आवृत्ति

चित्र 14.7 में एक ज्यावक्रीय आलेख दिखाया गया है। यह किसी निश्चित क्षण पर तरंग का आकार नहीं दर्शाता है बल्कि माध्यम के एक अवयव (किसी निश्चित स्थिति पर) का समय के साथ विस्थापन दर्शाता है। सुविधा के लिए हम समीकरण (14.2) में $\phi=0$ लेते हैं और अवयव (मान लीजिए $x=0$ पर) की गति पर ध्यान देते हैं। तब हमें प्राप्त होता है

$$y(0,t) = a \sin(-\omega t)$$
$$= -a \sin \omega t$$



चित्र 14.7 जब तरंग डोरी में से गुजरती है तो किसी निश्चित स्थिति पर डोरी का अवयव आयाम a से समय के साथ दोलन करता है।

तरंग के दोलन का आवर्त काल डोरी के किसी अवयव द्वारा एक पूर्ण दोलन में लिया गया समय है। अर्थात्

$$-a \sin \omega t = -a \sin \omega(t + T)$$
$$= -a \sin(\omega t + \omega T)$$

चूंकि ज्या फलन प्रत्येक 2π कोण पर पुनरावृत्ति करता है,

$$\omega T = 2\pi, \text{ या } \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (14.7)$$

ω को तरंग की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं। इसका SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड अथवा rad s^{-1} है। किसी तरंग की आवृत्ति ν प्रति सेकंड दोलनों की संख्या है। अत:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (14.8)$$

*यहाँ भी rad को छोड़ सकते हैं और मात्रक को केवल m^{-1} से व्यक्त कर सकते हैं। अत:, k, इकाई लंबाई में समा सकने वाली तरंगों की संख्या का 2π से गुणा करने पर प्राप्त होने वाली m^{-1} SI मात्रक में मापी जाने वाली राशि है।

© NCERT not to be republished

ν को हर्ट्ज (Hz) में मापते हैं।

उपर्युक्त चर्चा में सदैव ही किसी डोरी के अनुदिश गतिशील तरंग अथवा अनुप्रस्थ तरंग का संदर्भ लिया गया है । अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के किसी अवयव में तरंग संचरण की दिशा के समांतर विस्थापन होता है । समीकरण (14.2) में किसी अनुदैर्घ्य तरंग के लिए विस्थापन फलन इस प्रकार लिखा जाता है,

$$s(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \qquad (14.9)$$

यहाँ $s(x, t)$ स्थिति x तथा समय t पर माध्यम के किसी अवयव का तरंग संचरण की दिशा में विस्थापन है। समीकरण (14.9) में a विस्थापन आयाम है। अन्य सभी राशियों के वही अर्थ हैं जो अनुप्रस्थ तरंग के प्रकरण में थे। केवल एक ही अंतर है कि विस्थापन फलन $y(x, t)$ के स्थान पर फलन $s(x, t)$ लिया गया है।

उदाहरण 14.2 : किसी डोरी के अनुदिश गमन करती तरंग का विवरण इस प्रकार दिया गया है,

$y(x, t) = 0.005 \sin (80.0\, x - 3.0\, t)$

यहाँ आंकिक स्थिरांक SI मात्रकों में हैं (0.005 m, 80.0 rad/m तथा 3.0 rad/s)। तरंग का (a) आयाम, (b) तरंगदैर्घ्य (c) आवर्तकाल एवं आवृत्ति परिकलित कीजिए । दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर तरंग का विस्थापन y भी परिकलित कीजिए ।

हल इस विस्थापन की तुलना समीकरण (14.2) से करने पर

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं,

(a) तरंग का आयाम = 0.005 m = 5 mm

(b) कोणीय तरंग संख्या = 80.0 m^{-1} तथा कोणीय आवृत्ति $\omega = 30\ s^{-1}$

अब हम समीकरण (14.6) के द्वारा तरंगदैर्घ्य λ तथा k में संबंध लिखते हैं

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$= \frac{2\pi}{80.0\ m^{-1}}$$

$$= 7.85\ cm$$

(c) अब हम नीचे दिए गए T तथा ω में संबंध द्वारा T का मान ज्ञात करते हैं,

$$T = 2\pi/\omega$$

$$= \frac{2\pi}{3.0\ s^{-1}}$$

$$= 2.09\ s$$

अब चूँकि आवृत्ति $\nu = 1/T$

$$= 0.48\ Hz$$

दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर विस्थापन

$$y = 0.005 m \sin (80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$$

$$= 0.005 m \sin (-36 + 12\pi) = (0.005\ m) \sin (1.699)$$

$$= (0.005\ m) \sin (97°) \simeq 5\ mm$$ ◀

14.4 प्रगामी तरंग की चाल

किसी प्रगामी तरंग की चाल निरूपित करने के लिए हम तरंग के किसी बिन्दु (किसी कला कोण द्वारा अभिलक्षित) पर ध्यान केंद्रित कर सकते हैं और देखते हैं कि यह बिंदु समय के साथ किस तरह गमन करता है। तरंग के शीर्ष की गति पर ध्यान देना सुविधाजनक होता है। चित्र 14.8 में दो विभिन्न समयों, जिनके बीच Δt का लघु समय अंतराल है, पर तरंग का आकार दर्शाया गया है। समस्त तरंग पैटर्न दाईं ओर (x-अक्ष की धनात्मक दिशा) Δx दूरी चलता है। वास्तव में, बिन्दु (•) द्वारा दर्शाया शीर्ष समय Δt में दूरी Δx चलता है। इस प्रकार तरंग की चाल $\Delta x/\Delta t$ है। किसी अन्य कला वाले बिंदु पर भी हम बिन्दु (•) लगा सकते हैं। यह उसी वेग v से गमन करेगा (अन्यथा तरंग पैटर्न अपरिवर्तित नहीं रहेगा)। तरंग पर किसी निश्चित कला बिंदु की गति को दिया जाता है

$$kx - \omega t = \text{नियतांक} \qquad (14.10)$$

अत: जब समय t बदलता है, तो निश्चित कला बिंदु की स्थिति x भी इस प्रकार बदलती है कि कला कोणांक अचर रहे। अत:

$$kx - \omega t = k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t)$$

या $$k\Delta x - \omega \Delta t = 0$$

$\Delta x, \Delta t$ का अल्पतम मान लेने पर

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \qquad (14.11)$$

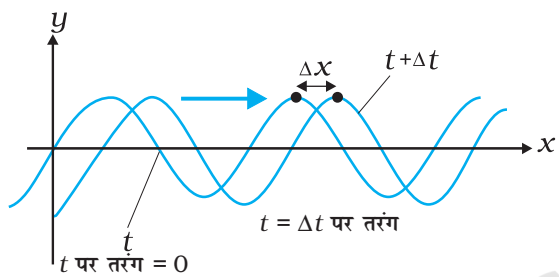
ω को T से तथा k को λ से संबंधित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$v = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \qquad (14.12)$$

समीकरण (14.12) सभी प्रगामी तरंगों के लिए एक व्यापक संबंध है। यह बताती है कि माध्यम के किसी अवयव के एक

© NCERT not to be republished

पूर्ण दोलन काल में तरंग पैटर्न एक तरंगदैर्घ्य के बराबर दूरी तय करती है। ध्यान दीजिए कि किसी यांत्रिक तरंग की चाल माध्यम के जड़त्वीय गुणों (डोरी के लिए रैखिक द्रव्यमान घनत्व, सामान्यतया द्रव्यमान घनत्व) तथा प्रत्यास्थ गुणों (रैखिक निकायों के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक/अपरूपण गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक) द्वारा निर्धारित होता है। माध्यम चाल निर्धारित करता है। यथा समीकरण (14.2) एक निश्चित चाल के लिए तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति का संबंध देता है। वास्तव में, जैसा पहले बताया जा चुका है, माध्यम में अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य दोनों तरंगें संभव हैं तथा इनकी चाल उसी माध्यम में अलग-अलग होगी। इस अध्याय के अनुवर्ती उपभागों में कुछ माध्य यांत्रिक तरंगों की चाल के लिए हम विशिष्ट व्यंजक प्राप्त करेंगे।



चित्र 14.8 समय t से $t+\Delta t$ तक किसी आवृत्ति तरंग का गमन, जहाँ Δt लघु समय अंतराल है। तरंग पैटर्न समस्त रूप से दाईं ओर स्थानांतरित हो जाता है। तरंग का शीर्ष (या निश्चित कला वाला कोई और बिंदु) समय Δt में दूरी Δx गमन करता है।

14.4.1 तनित डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल

किसी यांत्रिक तरंग की चाल विक्षोभ के कारण माध्यम में उत्पन्न प्रत्यानयन बल और जड़त्वीय गुणों (द्रव्यमान घनत्व) द्वारा निर्धारित होती है। चाल प्रथम कारक से अनुलोम रूप से तथा दूसरे कारक से प्रतिलोम रूप से संबंधित होती है। किसी डोरी पर तरंग के लिए प्रत्यानयन बल डोरी में तनाव T प्रदान करता है। इस संदर्भ में जड़त्वीय गुण रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है जो डोरी के द्रव्यमान m को उसकी लंबाई l से विभाजित करने पर प्राप्त होता है। न्यूटन के गतिकीय नियमों का उपयोग करके किसी डोरी पर तरंग की चाल के लिए यथार्थ सूत्र प्राप्त किया जा सकता है परन्तु यह उत्पत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। अत: हम विमीय विश्लेषण का उपयोग करेंगे। परन्तु हम यह जान चुके हैं कि केवल विमीय विश्लेषण से यथार्थ सूत्र नहीं प्राप्त हो सकता है। इस विधि से प्राप्त संबंध में स्थिरांक संबंधी अनिश्चितता रहती है। μ की विमा $[ML^{-1}]$ है तथा T की बल की, अर्थात $[MLT^{-2}]$ है। हमें इन विमाओं को इस प्रकार संयोजित करना है कि चाल की विमा $[LT^{-1}]$ प्राप्त हो। हम आसानी से देख सकते हैं कि अनुपात T/μ में यही विमा है

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

अत:, यदि T तथा μ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$v = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (14.13)$$

जहाँ C विमाहीन स्थिरांक है, जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है । वास्तव में यथार्थ सूत्र में C का मान 1 है। अत: तानित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (14.14)$$

ध्यान दीजिए कि चाल v माध्यम के गुण T और μ (T बाहरी बल के कारण तानित डोरी का अभिलक्षण है) पर तरंग की तरंगदैर्घ्य या आवृत्ति पर स्वत: निर्भर नहीं करती है। आगे की कक्षाओं में आप ऐसी तरंगों के बारे में पढ़ेंगे जिनकी चाल आवृत्ति से स्वतंत्र नहीं है। दो कारकों λ तथा ν उत्पन्न तरंग की आवृत्ति विक्षोभ के स्रोत पर निर्भर करता है। माध्यम में किसी निश्चित चाल तथा आवृत्ति के लिए, समीकरण (14.12) तरंगदैर्घ्य का निर्धारण करता है:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \qquad (14.15)$$

उदाहरण 14.3 : 0.72 m लंबे किसी स्टील के तार का द्रव्यमान 5.0×10^{-3} kg है । यदि तार पर तनाव 60 N है, तो तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल क्या है ?

हल: तार की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\,\text{kg}}{0.72\,\text{m}}$$

$$= 6.9\times10^{-3}\,\text{kg m}^{-1}$$

तनाव, $T = 60$ N

तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\ \text{N}}{6.9\times10^{-3}\,\text{kg m}^{-1}}} = 93\ \text{m s}^{-1}$$

© NCERT not to be republished

14.4.2 अनुदैर्घ्य तरंग की चाल - ध्वनि की चाल

किसी अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के अवयव तरंग संचरण की दिशा में अपनी स्थिति के आगे-पीछे दोलन करते हैं । हम पहले भी देख चुके हैं कि ध्वनि तरंगें वायु के लघु आयतन-अवयवों के संपीडनों तथा विरलनों के रूप में गमन करती हैं । संपीडन विकृति में प्रतिबल का निर्धारण करने वाली प्रत्यास्थ गुणधर्म माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक है जिसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad (14.16)$$

यहाँ दाब में परिवर्तन ΔP आयतन विकृति $\Delta V/V$ उत्पन्न करता है। B की विमा वही है जो दाब की है और SI मात्रक में इसे पास्कल (Pa) में व्यक्त करते हैं। तरंग के संचरण के लिए प्रासंगिक जड़त्वीय गुण द्रव्यमान घनत्व ρ है जिसकी विमा $[ML^{-3}]$ है । हम आसानी से देख सकते हैं कि राशि B/ρ में उपेक्षित विमा है :

$$\frac{[M\,L^{-1}\,T^{-2}]}{[M\,L^{-3}]} = [L^2\,T^{-2}] \qquad (14.17)$$

अत:, यदि B तथा ρ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$v = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (14.18)$$

यहाँ C एक स्थिरांक है जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है। यथार्थ उत्पत्ति से C=1 प्राप्त होता है । अत: किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल के लिए व्यापक सूत्र है:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (14.19)$$

किसी ठोस छड़ जैसे रैखीय माध्यम के लिए, छड़ में पार्श्वीय प्रसार नगण्य होता है और हमें छड़ को केवल अनुदैर्घ्य विकृति पर विचार करने की आवश्यकता होती है। इस प्रकरण में, प्रासंगिक प्रत्यास्थता गुणांक 'यंग गुणांक' है जिसकी विमा आयतन-प्रत्यास्थता गुणांक की विमा है। इस प्रकरण के लिए विमीय विश्लेषण पहले जैसा है और हमें समीकरण (14.18) जैसी समीकरण प्राप्त होती है जिसमें अनिर्धारित स्थिरांक C होता है जिसका मान यथार्थ उत्पत्ति से 1 प्राप्त होता है। इस प्रकार किसी ठोस छड़ में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (14.20)$$

यहाँ Y छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक है। सारणी 14.1 में विभिन्न माध्यमों में ध्वनि की चाल दर्शायी गई है।

सारणी 14.1 कुछ माध्यमों में ध्वनि की चाल

माध्यम	चाल (ms^{-1})
गैसें	
वायु (0°C)	331
वायु (20°C)	343
हीलियम	965
हाइड्रोजन	1284
द्रव	
जल (0°C)	1402
जल (20°C)	1482
समुद्र-जल	1522
ठोस	
ऐलुमिनियम	6420
कॉपर (ताँबा)	3560
स्टील	5941
ग्रेनाइट	6000
वल्केनाइज्ड रबर	54

द्रवों तथा ठोसों में ध्वनि की चाल गैसों की तुलना में अधिक है। [ध्यान दें कि ठोसों के प्रकरण में, प्रासंगिक चाल ठोस में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल है]। इसका कारण यह है कि द्रवों व ठोसों को गैसों की तुलना में संपीडित करना अधिक कठिन होता है। अत: इनके आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के मान अधिक होते हैं। समीकरण (14.19) देखें । ठोसों और द्रवों का गैसों की तुलना में द्रव्यमान घनत्व अधिक होता है । परन्तु उनमें अनुरूपी आयतन प्रत्यास्थता गुणांकों में वृद्धि कहीं अधिक होती है । यही कारण है कि ठोसों और द्रवों में ध्वनी की तीव्र गति होती है ।

किसी गैस में ध्वनि के चाल का आकलन हम आदर्श गैस सन्निकटन में कर सकते हैं। किसी आदर्श गैस (देखें अध्याय 10) के लिए दाब P, आयतन V तथा ताप T के नीचे संबंध इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$PV = Nk_BT \qquad (14.21)$$

यहाँ N गैस में अणुओं की संख्या, k_B बोल्ट्ज़मान नियतांक तथा T गैस का केल्विन में ताप है । अत: किसी समतापी परिवर्तन के लिए समीकरण (14.21) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

अथवा $$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$$

© NCERT not to be republished

अत: समीकरण (14.16) में यह मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$B = P$$

अत: समीकरण (14.19) से किसी आदर्श गैस में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (14.22)$$

इस संबंध को सर्वप्रथम न्यूटन ने स्थापित किया था, अत: इसे न्यूटन का सूत्र भी कहते हैं ।

उदाहरण 14.4 न्यूटन के सूत्र का उपयोग करके मानक ताप एवं दाब (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए । वायु के 1 मोल का द्रव्यमान 29.0×10^{-3} kg है ।

हल : हम जानते हैं कि किसी भी गैस के 1 मोल का STP पर आयतन 22.4 लीटर होता है । अत: वायु का STP पर घनत्व

$$\rho_0 = \frac{\text{1 मोल वायु का द्रव्यमान}}{\text{STP पर 1 मोल वायु का आयतन}}$$

$$= \frac{29.0 \times 10^{-3}\,\text{kg}}{22.4 \times 10^{-3}\,\text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

किसी माध्यम से ध्वनि की चाल के लिए न्यूटन के सूत्र के अनुसार हमें STP पर वायु में ध्वनि के वेग का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है,

$$v = \left[\frac{1.01 \times 10^5\,\text{N m}^{-2}}{1.29\ \text{kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{m s}^{-1} \qquad (14.23)$$

समीकरण (14.23) से प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल का मान, सारणी 14.1 में दिए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल के मान 331 m s^{-1} की तुलना में 15% कम है। आखिर हमसे कहाँ गलती हुई? यदि हम न्यूटन की इस मूल कल्पना का परीक्षण करें जिसमें न्यूटन ने ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब में होने वाले परिवर्तन को समतापी माना, तो हम यह पाते हैं कि उनकी यह कल्पना सही नहीं थी । लाप्लास ने यह बताया कि ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब-परिवर्तन इतनी तीव्र गति से होते हैं कि ऊष्मा प्रवाह के लिए ताप को स्थायी बनाए रखने का आवश्यक समय उपलब्ध नहीं हो पाता। फलस्वरूप यह परिवर्तन समतापी नहीं होते वरन् रुद्धोष्म (adiabatic) होते हैं । रुद्धोष्म प्रक्रियाओं के लिए आदर्श गैसों पर निम्न संबंध लागू होता है (खण्ड 11.8 देखें)

$$PV^{\gamma} = \text{स्थिरांक}$$

अथवा $\Delta (PV^{\gamma}) = 0$

$$P\gamma V^{\gamma-1}\Delta V + V^{\gamma}\Delta P = 0$$

यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात C_p/C_v है ।

इस प्रकार, आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P$$

अत: वायु में ध्वनि की चाल [समीकरण (14.19)],

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (14.24)$$

न्यूटन के सूत्र में इस संशुद्धि को **लाप्लास संशोधन** कहते हैं । वायु के लिए $\gamma = 7/5$, अत: अब यदि हम STP पर वायु में ध्वनि की चाल के आकलन के लिए समीकरण (14.24) का प्रयोग करें तो ध्वनि की चाल का मान 331.3 m s^{-1} प्राप्त होता है, जो मापित चाल से मेल खाता है ।

14.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

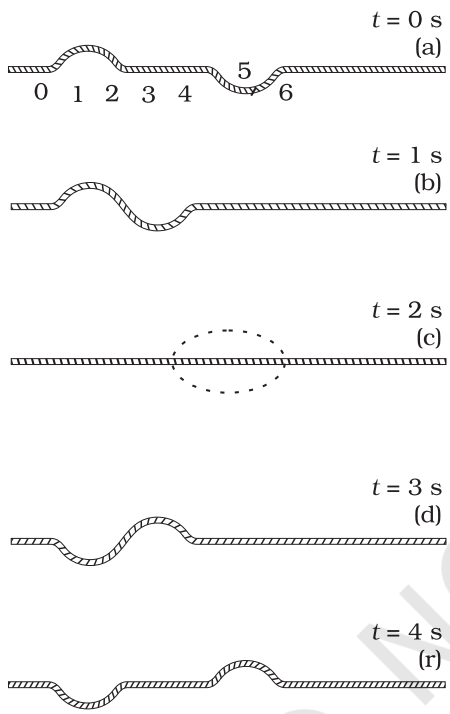
जब विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंग स्पंद एक दूसरे को पार करते हैं तो क्या होता है (चित्र 14.9)? यह देखा जाता है कि पार करने के बाद भी तरंग स्पंद अपना व्यष्टित्व बनाए रखती है। परंतु, अतिव्यापन के दौरान, तरंग पैटर्न दोनों तरंग स्पंदों से भिन्न होता है। चित्र 14.9 बराबर एवं विपरीत आकारों वाले दो तरंग स्पंदों के एक दूसरे की ओर गमन की स्थिति दर्शाता है। जब स्पंद अतिव्याप्ति होते हैं तो परिणामी विस्थापन पृथक-पृथक स्पंदों के कारण विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है। इस प्रकार जोड़ना तरंगों का **अध्यारोपण का सिद्धांत** कहलाता है। इस सिद्धांत के अनुसार, प्रत्येक स्पंद इस प्रकार गमन करता है मानो दूसरे स्पंद विद्यमान नहीं हैं। अत: माध्यम के अवयव दोनों के कारण विस्थापित होते हैं और चूंकि विस्थापन धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं, नेट विस्थापन दोनों विस्थापनो का बीजगणितीय योग होता है। चित्र 14.9 विभिन्न समयों पर तरंग आकार का आलेख दर्शाता है। आलेख (c) में विशेष प्रभाव पर ध्यान दें : दोनों स्पंदों के कारण पृथक-पृथक उत्पन्न विस्थापन एक दूसरे को ठीक से निरस्त कर देते हैं तथा प्रत्येक बिंदु पर कुल विस्थापन शून्य है।

अध्यारोपण के सिद्धांत को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ माध्यम के किसी

© NCERT not to be republished

अवयव के विस्थापन हैं, जो यदि तरंग अलग-अलग गमन करती तो उस अवयव के होते। यदि दो तरंगें किसी क्षेत्र में एक साथ पहुंचती हैं और अतिव्यापित होती हैं तो नेट विस्थापन $y(x, t)$ होगा

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (14.25)$$



चित्र 14.9 *समान एवं विपरीत विस्थापन वाली विपरीत दिशा में गमन करती दो स्पंद। आलेख (c) में दोनों स्पंदों के अतिव्यापन से शून्य विस्थापन होता है।*

यदि किसी माध्यम में एक ही क्षण दो अथवा अधिक तरंगें गमन कर रहीं हैं तो उनका परिणामी तरंग रूप दोनों तरंगों के पृथक-पृथक तरंग फलनों का योग होता है । अर्थात यदि गतिशील तरंगों के तरंग फलन इस प्रकार हैं,

$y_1 = f_1(x - vt)$,

$y_2 = f_2(x - vt)$,

.....

.....

$y_n = f_n(x - vt)$,

तब माध्यम में विक्षोभ का वर्णन करने वाला तंरग फलन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y = f_1(x - vt) + f_2(x - vt) + \ldots\ldots\ldots + f_n(x - vt)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - vt) \quad (14.26)$$

अध्यारोपण का सिद्धांत व्यतिकरण की परिघटना का मूल है।

सरलता के लिए, किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करती दो आवर्ती प्रगामी तरंगों पर विचार करिये। दोनों तरंगों की कोणीय आवृत्तियाँ ω समान हैं तथा कोणीय तरंग संख्या k भी समान है। अतः इनके तरंगदैर्घ्य भी समान हैं। इनकी तरंग चाल भी समान होगी। मान लीजिए कि इनके आयाम समान हैं तथा दोनों x-अक्ष के धनात्मक दिशा में गमन करती हैं। इन तरंगों में अन्तर केवल आरंभिक कला में है। समीकरण (14.2) के अनुसार इन दोनों तरंगों को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \quad (14.27)$$

और $$y_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (14.28)$$

अब अध्यारोपण के सिद्धांत का प्रयोग करने पर, नेट विस्थापन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (14.29)$$

$$\alpha\left[2\sin\left[\frac{(kx - \omega t) + (kx - \omega t + \phi)}{2}\right]\cos\frac{\phi}{2}\right] \quad (14.30)$$

यहाँ हमने $(\sin A + \sin B)$ के लिए त्रिकोणमिति के सुपरिचित सूत्र का प्रयोग किया है। अतः

$$y(x,t) = \left[2a\cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \quad (14.31)$$

समीकरण (14.31) यह दर्शाता है कि परिणामी तरंग भी, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती आवर्ती तरंग है जिसकी आवृत्ति तथा तरंगदैर्घ्य दोनों तरंगों के समान है। परन्तु इसका कलान्तर $\phi/2$ है। महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि इसका आयाम दोनों घटक तरंगों के बीच कलान्तर ϕ का फलन है :

$$A(\phi) = 2a\cos\frac{1}{2}\phi \quad (14.32)$$

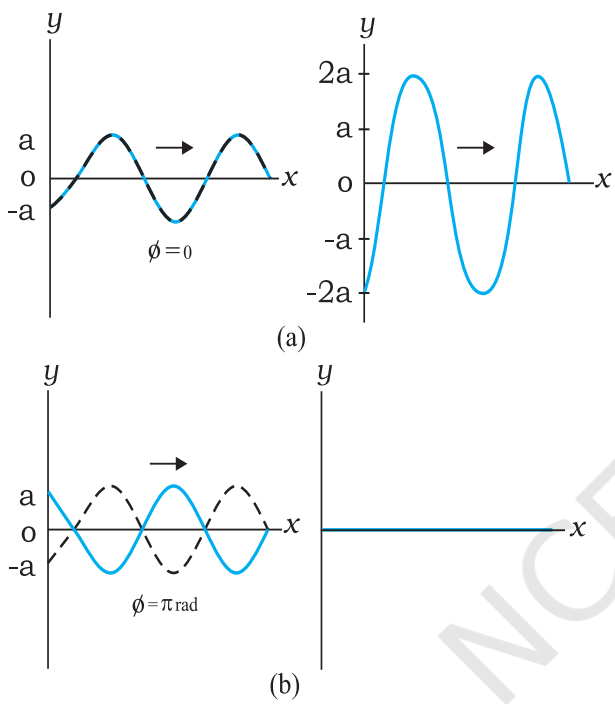
यदि $\phi = 0$, अर्थात् दोनों तरंगें समान कला में हैं,

$$y(x,t) = 2\,a \sin(kx - \omega t) \quad (14.33)$$

© NCERT not to be republished

अर्थात् परिणामी तरंग का आयाम $2a$ है, जो A के संभावित मानों में अधिकतम है। $\phi = \pi$ के लिए, दोनों तरंगें पूर्णत: एक दूसरे से विपरीत कलाओं में होती हैं तथा परिणामी तरंग का आयाम सर्वत्र हर क्षण शून्य होता है :

$$y(x, t) = 0 \qquad (14.34)$$



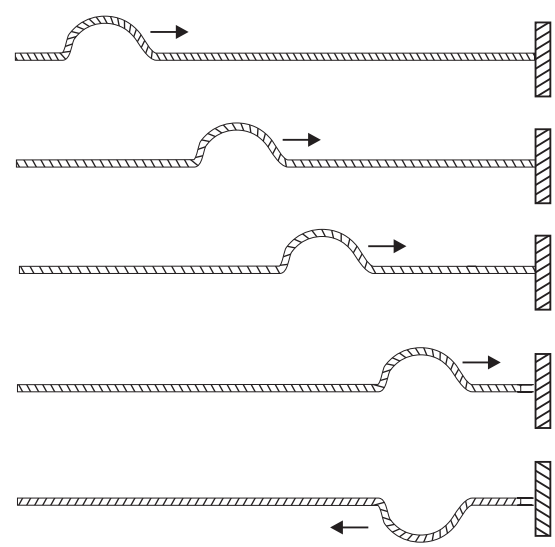
चित्र 14.10 अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार समान आयाम तथा तरंगदैर्ध्य वाले दो आवृत्ति तरंगों का परिणामी तरंग। परिणामी तरंग का आयाम कलांतर ϕ पर निर्भर करता है। यह कलांतर (a) के लिए शून्य है तथा (b) के लिए π।

समीकरण (14.33) दो तरंगों का संपोषी व्यतिकरण दर्शाता है। इस प्रकरण में दोनों आयाम जुड़ जाते हैं। समीकरण (14.34) दो तरंगों का विनाशी व्यतिकरण दर्शाता है जिसमें परिणामी तरंग में दोनों आयाम का अंतर होता है। चित्र 14.10 व्यतिकरण के इन दोनों प्रकरणों को दर्शाता है जो अध्यारोपण के सिद्धांत का परिणाम है।

14.6 तरंगों का परावर्तन

पिछले अनुभागों में हमने अपरिबद्ध माध्यमों में तरंग संचरण की चर्चा की । क्या होता है जब कोई स्पंद अथवा तरंग किसी परिसीमा का सामना करती है ? यदि परिसीमा दृढ़ है तो स्पंद अथवा तरंग परावर्तित हो जाती है। प्रतिध्वनि की परिघटना दृढ़ परिसीमा से परावर्तन का उदाहरण है। यदि परिसीमा पूर्णत: दृढ़ नहीं है, अथवा वह किन्हीं दो भिन्न प्रत्यास्थ माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ है, तो स्थिति कुछ जटिल हो जाती है। इस स्थिति में आपतित तरंग का कुछ भाग परावर्तित हो जाता है तथा कुछ भाग दूसरे माध्यम में पारगमित हो जाता है। यदि कोई तरंग दो भिन्न माध्यमों की परिसीमा पर तिरछी आपतित होती है तो पारगमित तरंग को **अपवर्तित तरंग** कहते हैं। आपतित एवं अपवर्तित तरंगें स्नेल के अपवर्तन के नियमों का पालन करती हैं, तथा आपतित एवं परावर्तित तरंगें परावर्तन के सामान्य नियमों का पालन करती हैं।

चित्र 14.11 किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करती तथा परिसीमा से परावर्तित होती तरंग दर्शाता है। यदि मान लें कि परिसीमा द्वारा ऊर्जा का कोई अवशोषण नहीं होता है तो परावर्तित तरंग का आकार वही होता है जो आपतित स्पंद का है परंतु परावर्तन से इसके कला में π या 180° का कलांतर उत्पन्न हो जाता है। इसका कारण यह है कि परिसीमा दृढ़ है तथा परिसीमा पर सभी क्षणों पर विक्षोभ का विस्थापन शून्य होना चाहिए। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, यह तभी संभव है जब आपतित एवं परावर्तित तरंगों में π कलांतर हो ताकि परिणामी विस्थापन शून्य हो। यह तर्क दृढ़ दीवार में परिसीमा प्रतिबंध पर आधारित है। इस परिणाम को हम गतिकीय दृष्टि से भी प्राप्त कर सकते हैं। जब स्पंद दीवार पर पहुँचता है तो वह दीवार पर बल आरोपित करता है। न्यूटन के तीसरे नियम के अनुसार दीवार डोरी पर परिणाम में समान तथा दिशा में विपरीत बल आरोपित



चित्र 14.11 किसी दृढ़ परिसीमा से स्पंद का परावर्तन।

© NCERT not to be republished

करती है। परिणामस्वरूप परावर्तित स्पंद उत्पन्न होता है जिसकी कला में π का अंतर होता है।

इसके विपरीत, यदि परिसीमा बिंदु दृढ़ नहीं है और गति के लिए पूर्ण रूप से स्वतंत्र है (जैसे एक डोरी एक ऐसे छल्ले से बंधी है जो किसी छड़ पर स्वतंत्र रूप से गति कर सके) तो परावर्तित स्पंद की कला तथा आयाम (मान लें ऊर्जा ह्रास न हो) वही हैं जो आपतित स्पंद के हैं। नेट परिसीमा पर अधिकतम विस्थापन तब प्रत्येक स्पंद के आयाम का दो गुना है। अदृढ़ परिसीमा का उदाहरण आर्गन पाइप का खुला सिरा है।

संक्षेप में, किसी प्रगामी तरंग या स्पंद की किसी दृढ़ परिसीमा से परावर्तन में π कलांतर उत्पन्न होता है तथा खुले परिसीमा से परावर्तन में कोई कलांतर उत्पन्न नहीं होता है। इस कथन को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए आपतित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं :

$$y_i(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

तब, दृढ़ परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \pi)$$

$$= -a \sin(kx + \omega t) \quad (14.35)$$

किसी खुली परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t) \quad (14.36)$$

स्पष्टत: दृढ़ परिसीमा पर $y = y_i + y_r = 0$ सभी बलों पर।

14.6.1 अप्रगामी तरंगें तथा प्रसामान्य विधाएँ

पिछले अनुभाग में हमने एक सिरे पर परिसीमित निकाय पर विचार किया । परंतु ऐसी कई सुपरिचित स्थितियाँ हैं (जैसे दोनों सिरों पर परिबद्ध डोरी अथवा परिमित लम्बाई का वायु कॉलम) जिसमें परावर्तन दो या अधिक सिरों पर होता है। उदाहरण के लए, किसी डोरी में एक दिशा में गमन करती तरंग एक सिरे से परावर्तित होती है। यह परावर्तित तरंग दूसरी दिशा में गमन करके दूसरे सिरे से परावर्तित होती है। यह प्रक्रिया तब तक चलती रहती है जब तक डोरी में एक अपरिवर्ती तरंग पैटर्न न बन जाय। ऐसे तरंग पैटर्न अप्रगामी तरंगें कहलाते हैं। गणितीय रूप में इसे व्यक्त करने के लिए, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती किसी तरंग तथा x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में गमन करती समान आयाम एवं तरंगदैर्घ्य वाली परावर्तित तरंग पर विचार कीजिए। $\phi = 0$ के लिए समीकरण (14.2) और (14.4) से

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = a \sin(kx + \omega t)$$

तब, अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार प्राप्त परिणामी तरंग इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= a[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$$

सुपरिचित त्रिकोणमितीय तत्समक

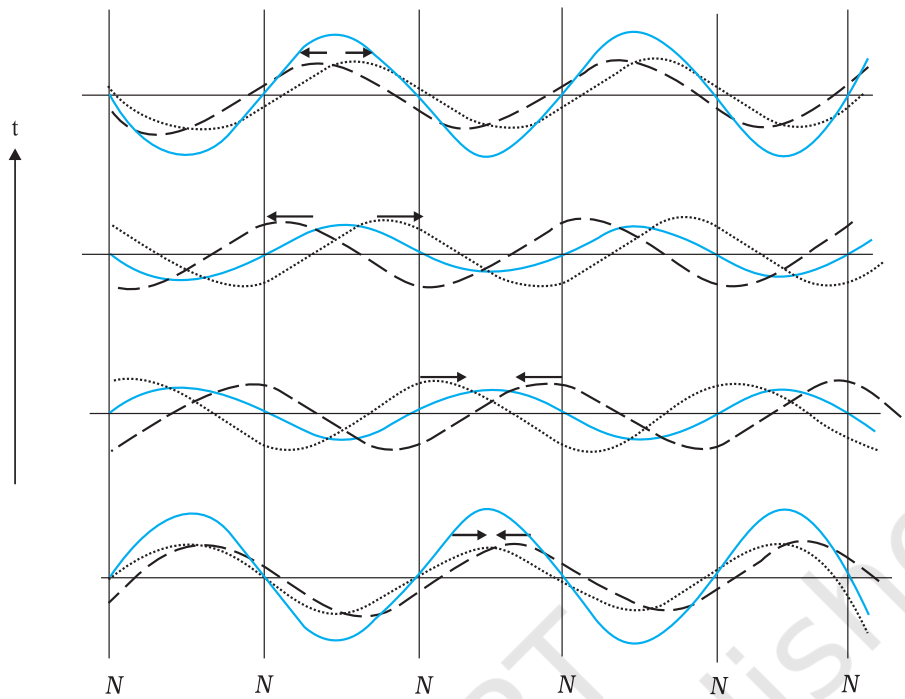
$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$, का उपयोग करने पर

$$y(x,t) = 2a \sin kx \cos \omega t \quad (14.37)$$

समीकरण (14.37) द्वारा निरूपित तरंग पैटर्न तथा समीकरण (14.2) अथवा समीकरण (14.4) द्वारा निरूपित तरंगों के बीच महत्वपूर्ण अंतर पर ध्यान दें। समीकरण (14.37) में पद kx एवं ωt अलग-अलग विद्यमान हैं, न कि $(kx - \omega t)$ के संयोजन के रूप में। इस तरंग का आयाम $2a \sin kx$ है। अत: इस तरंग पैटर्न में, आयाम प्रत्येक बिंदु पर भिन्न होता है परन्तु डोरी का प्रत्येक अवयव समान कोणीय आवृत्ति ω या आवर्त काल से दोलन करता है। तरंग के विभिन्न अवयवों के दोलन में कोई कलांतर नहीं होता है। डोरी पूर्ण रूप से विभिन्न बिंदुओं पर विभिन्न आयामों से एक ही कला में दोलन करती है। तरंग पैटर्न न तो बाईं और और न दाईं ओर गमन करता है। अत: इन्हें अप्रगामी तरंगें कहते हैं। किसी निश्चित स्थिति पर इसका आयाम निश्चित होता है परंतु जैसा पहले बताया गया है विभिन्न स्थितियों पर आयाम भिन्न होता है। जिन बिंदुओं पर आयाम शून्य होता है उन्हें **निस्पंद** कहते हैं तथा जिन बिंदुओं पर अधिकतम होता है उन्हें **प्रस्पंद** कहते हैं। चित्र 14.12 विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के फलस्वरूप परिणामी अप्रगामी तरंग दर्शाता है।

अप्रगामी तरंगों का सबसे महत्वपूर्ण लक्षण यह है कि निकाय के दोलन की संभावित तरंग दैर्घ्यों या आवृत्तियों के मान, परिसीमा प्रतिबंध के कारण, प्रतिबंधित होते हैं। निकाय किसी स्वेच्छ आवृत्ति से दोलन नहीं कर सकता है (इसकी तुलना आवर्ती प्रगामी तरंग से करें) वरन् इसकी दोलन की आवृत्तियाँ स्वाभाविक आवृत्तियों का एक समुच्चय होती हैं। इन आवृत्तियों को दोलन का **प्रसामान्य विधा** कहते हैं। अब हम दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी के लिए प्रसामान्य विधा का निर्धारण करेंगे।

© NCERT not to be republished



चित्र 14.12 विपरीत दिशाओं में गमन करती दो आवर्ती तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न अप्रगामी तरंगें। ध्यान दें कि निस्पंदों (शून्य विस्थापन वाले बिंदु) की स्थिति सभी समयों पर अपरिवर्तित रहती है।

समीकरण (14.37) से निस्पंद की स्थितियों (जहाँ आयाम शून्य होता है) में

$$\sin kx = 0$$

अर्थात् $kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3...$

चूंकि $k = 2\pi/\lambda$ है, अत:

$$x = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (14.38)$$

स्पष्टत: दो क्रमागत निस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ होती है। उसी प्रकार स्पंदों की स्थितियों (जहाँ आयाम अधिकतम होते हैं) में $\sin kx$ का मान अधिकतम होता है :

$$|\sin kx| = 1$$

अर्थात् $kx = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3...$

$k = 2\pi/\lambda$ लेने पर

$$x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (14.39)$$

पुन: दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है। समीकरण (14.38) का उपयोग दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई के तानित डोरी के लिए कर सकते हैं। यदि एक सिरे पर $x = 0$ मान लें तो परिसीमा प्रतिबंध होंगे $x = 0$ तथा $x = L$ पर निस्पंद होंगे। $x = 0$ प्रतिबंध की पहले से संतुष्टि होती है। $x = L$ निस्पंद प्रतिबंध के लिए आवश्यक है कि लंबाई L तरंगदैर्घ्य λ से निम्न प्रकार से संबंधित हो

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1, 2, 3... \qquad (14.40)$$

अत: L लंबाई की डोरी पर सीमित तरंगदैर्घ्य की अप्रगामी तरंगें बन सकती हैं जिनका मान निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त किया जाता है,

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3... \qquad (14.41)$$

तदनुरूपी आवृत्तियों के मान होंगे

$$\nu = n\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3... \qquad (14.42)$$

इस प्रकार हमने निकाय के दोलन की स्वाभाविक आवृत्तियाँ अथवा सामान्य विधा निर्धारित कर लिया है। किसी निकाय की न्यूनतम संभावित स्वाभाविक आवृत्ति को निकाय की *मूल विधा* या *प्रथम गुणावृत्ति* कहते हैं। दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई के तानित डोरी के लिए $\nu = \frac{v}{2L}$ जो समीकरण (14.42) में

© NCERT not to be republished

n =1 के संगत है। यहाँ v माध्यम के लक्षणों पर आधारित तरंग की चाल है। n = 2 की दोलन विधा को द्वितीय गुणावृत्ति कहते हैं। n = 3 के तदनुरूपी तृतीय गुणावृत्ति होती है और इसी प्रकार अगली गुणावृत्तियाँ होती हैं । इन विधाओं से संबद्ध आवृत्तियों को ν_n $(n = 1, 2, ...)$ द्वारा चिह्नित किया जाता है।

चित्र 14.13 में दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में प्रथम छः गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं।

यह आवश्यक नहीं है कि कोई तानित डोरी इन विधाओं में से किसी विधा में कंपन करे। सामान्यतया किसी डोरी का कंपन विभिन्न विधाओं का अध्यारोपण होता है। कुछ विधाएँ अधिक प्रबलता से उत्तेजित हो सकती हैं और कुछ कम प्रबलता से। सितार व वायलिन जैसे वाद्य यंत्र इस सिद्धांत पर आधारित हैं। कौन सी विधा दूसरी विधा से अधिक उत्तेजित है यह इस बात पर निर्भर करता है कि डोरी को किस बिंदु पर झंकृत किया गया है।

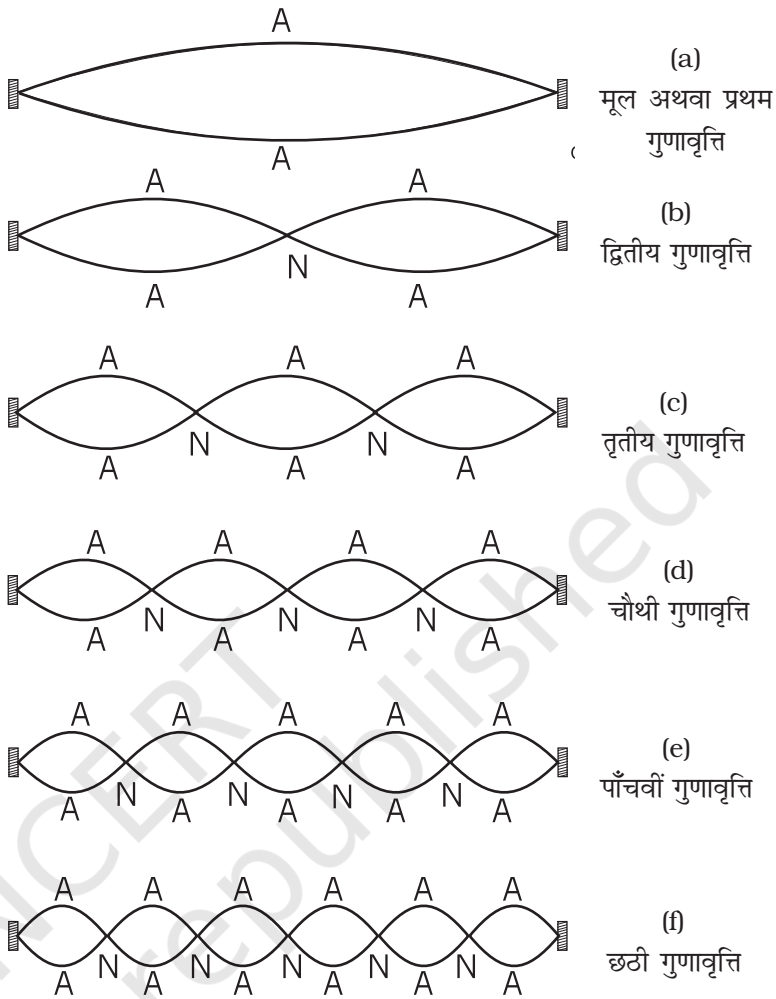
अब हम किसी ऐसे निकाय के कंपनों की विधाओं का अध्ययन करेंगे जिनका एक सिरा बंद है जबकि दूसरा सिरा मुक्त है। अंशतः जल से भरी लम्बी काँच की नलिका का वायु कॉलम ऐसे निकाय का एक उदाहरण है। वायु कॉलम में जल को छूने वाले सिरे पर निस्पंद होता है तथा खुले सिरे पर प्रस्पंद होता है। निस्पंद पर दाब में परिवर्तन अधिकतम होते हैं जबकि विस्थापन न्यूनतम (शून्य) होता है। इसके विपरीत खुले सिरे पर जहाँ प्रस्पंद होते हैं, न्यूनतम दाब परिवर्तन होते हैं तथा विस्थापन का आयाम अधिकतम होता है। जल के संपर्क वाले सिरे को $x = 0$ लेने पर निस्पंद प्रतिबंध (समीकरण 14.38) की स्वतः संतुष्टि होती है। यदि दूसरा सिरा $x = L$ प्रस्पंद हो तो समीकरण (14.39) से यह परिणाम निकलता है कि

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

संभावित तरंगदैर्घ्य निम्नलिखित संबंध से प्रतिबंधित होगी

$$\lambda = \frac{2L}{(n+1/2)}, \quad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (14.43)$$

निकाय की सामान्य विधाएँ स्वाभाविक आवृत्तियाँ इस प्रकार व्यक्त की जाती हैं :



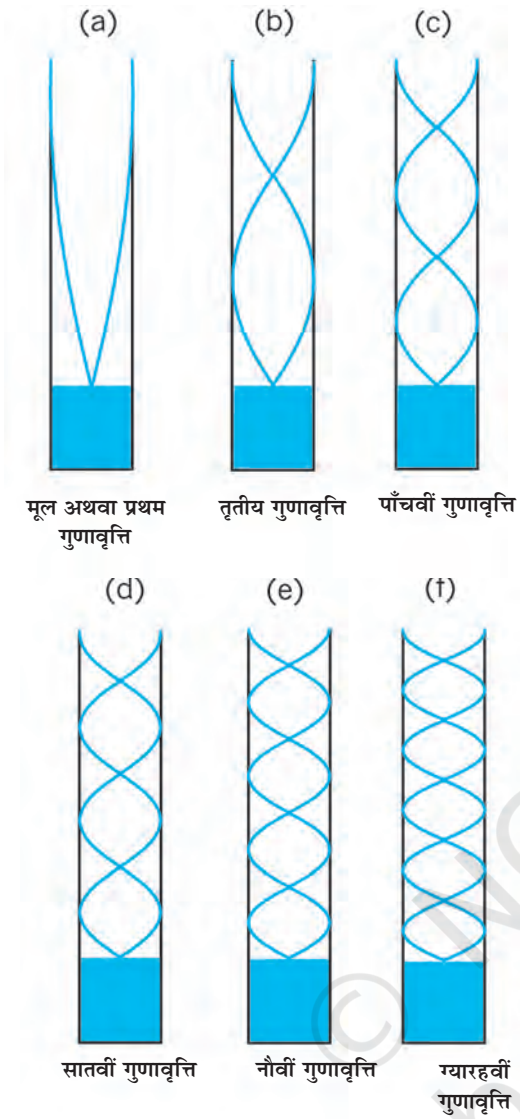
चित्र 14.13 दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में दोलन की प्रथम छः गुणावृत्तियाँ।

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L}, \; n = 0, 1, 2, 3... \; (14.44)$$

मूल विधा n = 0 के संगत है और यह $\frac{v}{4L}$ है। अन्य उच्च आवृत्तियाँ मूल आवृत्ति की विषम गुणावृत्तियाँ अर्थात् $3\frac{v}{4L}$, $5\frac{v}{4L}$ आदि होती हैं ।

चित्र 14.14 एक सिरे पर खुले तथा दूसरे सिरे पर बंद वायु कॉलम के प्रथम छः विषम गुणावृत्तियाँ दर्शाता है। दोनों सिरों पर खुले पाइप के लिए प्रत्येक सिरे पर प्रस्पंद होता है। इस प्रकार यह स्पष्ट है कि दोनों सिरों पर खुले वायु कॉलम में सभी गुणावृत्तियाँ उत्पन्न होती हैं (देखें चित्र 14.15)। उपरोक्त वर्णित निकायों, डोरी एवं वायु कॉलम में प्रणोदित दोलन (अध्याय 13)

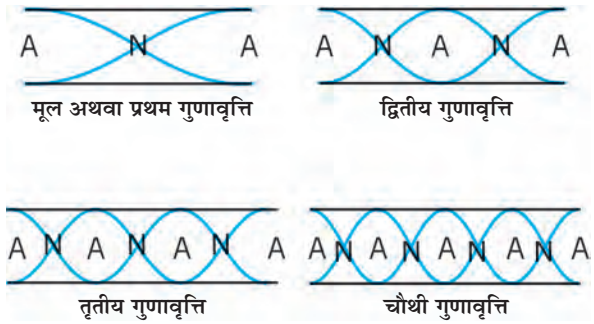
© NCERT not to be republished



चित्र 14.14 एक सिरे से खुले तथा दूसरे सिरे पर बंद किसी वायु-कॉलम की कुछ प्रसामान्य विधाएँ। केवल विषम विधाएँ संभव हैं।

उत्पन्न हो सकते हैं। यदि बाह्य आवृत्ति निकाय की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तो निकाय में **अनुनाद** उत्पन्न होता है।

किसी पात्र की परिधि से दृढ़तापूर्वक परिबद्ध वृत्ताकार झिल्ली, उदाहरणार्थ, तबले की झिल्ली के कंपनों की प्रसामान्य विधाओं का निर्धारण इस परिसीमा शर्त के द्वारा किया जाता है कि झिल्ली की परिधि पर स्थित कोई भी बिंदु कंपन नहीं करता। इस निकाय के कंपन की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियों का आकलन अधिक जटिल कार्य है । इस समस्या में दो विमाओं में तरंग संचरण सम्मिलित होता है । फिर भी इसमें अन्तर्निहित भौतिकी वही है ।



चित्र 14.15 किसी खुले पाइप में अप्रगामी तरंगें । पहली चार गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं ।

▶ ***उदाहरण 14.5*** दोनों सिरों से खुले किसी पाइप की लंबाई 30.0 cm है । 1.1 kHz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा को अनुनाद द्वारा उत्तेजित किया जाता है ? यदि इस पाइप के एक सिरे को बंद कर दिया जाए तो क्या हम फिर भी इसी स्रोत द्वारा अनुनाद सुन सकते हैं ? वायु में ध्वनि की चाल 330 m s^{-1} है ।

हल: खुले पाइप के कंपन की पहली कुछ विधाएँ चित्र 14.15 में दर्शायी गई हैं । पहली गुणावृत्ति की आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \qquad \text{(खुला पाइप)}$$

यहाँ L पाइप की लंबाई है । n वीं गुणावृत्ति की आवृत्ति

$$\nu_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3...) \text{ (खुला पाइप)}$$

यहाँ $L = 30.0$ cm, $v = 330$ m s^{-1}

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \ \text{m s}^{-1}}{2 \times 0.3 \ \text{m}} = 550n \ \text{s}^{-1}$$

स्पष्ट है कि 1.1 kHz आवृत्ति का स्रोत, अनुनाद द्वारा ν_2 आवृत्ति अर्थात् द्वितीय गुणावृत्ति को उत्तेजित करेगा ।

अब यदि पाइप का एक सिरा बंद है तब समीकरण (14.40) से यह परिणाम निकलता है कि इस पाइप की मूल आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L} \qquad \text{(एक सिरे पर बंद पाइप)}$$

इस पाइप में केवल विषम संख्या की गुणावृत्तियाँ ही विद्यमान होती हैं :

$$\nu_3 = \frac{3v}{4L}, \ \nu_5 = \frac{5v}{4L} \text{ तथा इसी प्रकार आगे भी...।}$$

$L = 30$ cm तथा $v = 300$ m s^{-1} के लिए, एक सिरे से बंद पाइप की मूल आवृत्ति 275 Hz है तथा स्रोत की आवृत्ति

© NCERT not to be republished

चतुर्थ गुणावृत्ति के तदनुरूपी है। चूँकि यह गुणावृत्ति पाइप के कंपन की संभावित विधा नहीं है, अत: इस स्रोत के साथ पाइप का एक सिरा बंद करने पर कोई अनुनाद सुनाई नहीं देगा। ◄

14.7 विस्पंदें

विस्पंद तरंगों के व्यतिकरण से उत्पन्न एक रोचक परिघटना है। जब लगभग सन्निकट आवृत्ति (परंतु बराबर नहीं) वाली दो आवर्त ध्वनि तरंगें एक ही समय सुनाई देती हैं तो हमें समान आवृत्ति (दोनों सन्निकट आवृत्तियों का औसत) सुनाई देता है परन्तु हमें कुछ और भी सुनाई देता है। हमें ध्वनि की तीव्रता में धीरे-धीरे घटाव और बढ़ाव सुनाई देता है जिसकी आवृत्ति दो सन्निकट आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है। संगीतज्ञ इस परिघटना का उपयोग अपने वाद्यों के समस्वरण में करते हैं। वे अपने यंत्र को तब तक समस्वरक करते रहते हैं जब तक उनके सुग्राही कानों को कोई विस्पंद सुनाई न दे।

इस घटना की गणितीय विवेचना के लिए, हम दो लगभग बराबर कोणीय आवृत्तियों ω_1 एवं ω_2 की आवर्ती ध्वनि तरंगों पर विचार करते हैं तथा सुविधा के लिए स्थिति को $x = 0$ मान लें। समीकरण (14.2) में कला का एक समुचित मान ($\phi = \pi/2$ प्रत्येक तरंग के लिए) तथा बराबर आयाम लेने पर हमें प्राप्त होता है:

$$s_1 = a\cos\omega_1 t \text{ तथा } s_2 = a\cos\omega_2 t \qquad (14.45)$$

यहाँ पर हमने प्रतीक y के स्थान पर s का उपयोग किया है क्योंकि हम अनुदैर्घ्य न कि अनुप्रस्थ विस्थापन की बात कर रहे हैं। मान लीजिए कि दोनों आवृत्तियों में ω_1 थोड़ी बड़ी है। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, परिणामी विस्थापन को हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$s = s_1 + s_2 = a(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

$\cos A + \cos B$ के सुपरिचित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका का उपयोग करने पर

$$s = 2a\cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \qquad (14.46)$$

यदि हम $\omega_b = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ तथा $\omega_a = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ लिखें तब समीकरण (14.46) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$s = [2a\cos\omega_b t]\cos\omega_a t \qquad (14.47)$$

यदि $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$; $\omega_a >> \omega_b$ है, तब समीकरण (14.47) से निष्कर्ष निकलता है, परिणामी तरंग औसत कोणीय आवृत्ति ω_a से दोलन करता है परन्तु इसका आयाम समय के साथ अचर नहीं है जैसा कि एक शुद्ध आवर्त तरंग के प्रकरण में होता है। जब भी $\cos\omega_b t$ का मान + 1 अथवा –1 होता है आयाम अधिकतम होता है। दूसरे शब्दों में, परिणामी तरंग की तीव्रता में आवृत्ति $2\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ से उतार-चढ़ाव होता है। चूंकि $\omega = 2\pi\nu$ विस्पंद ν_{beat} को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\upsilon_{\text{beat}} = \nu_1 - \nu_2 \qquad (14.48)$$

11 Hz तथा 9 Hz के दो आवृत्ति तरंगों से उत्पन्न विस्पंद की परिघटना चित्र 14.16 दर्शाता है। परिणामी तरंग का आयाम 2Hz की आवृत्ति पर विस्पंद दर्शाता है।

संगीत स्तंभ



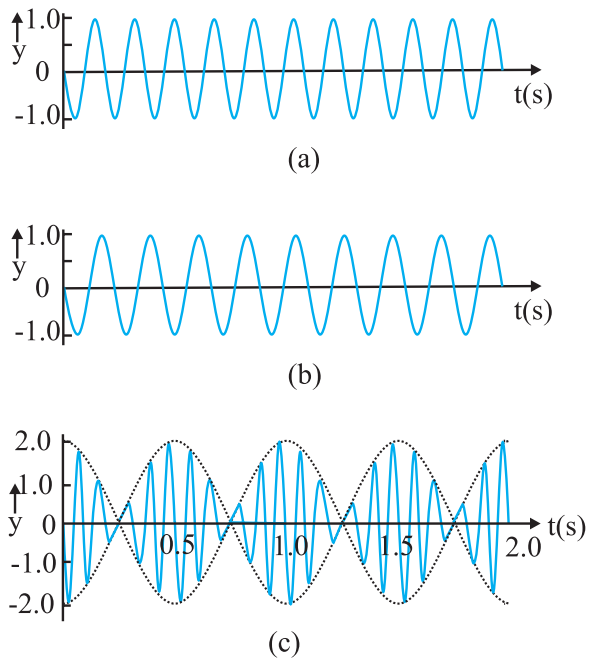
मंदिरों में, स्तंभों पर बनी संगीत वाद्य बजाती मानवमूर्तियाँ अक्सर देखने में आती हैं, लेकिन, ये स्तंभ, स्वयं संगीत शायद ही कहीं उत्पन्न करते हों। तमिलनाडु के नेल्ल्याप्पर मंदिर में एकल शिला में उत्कीर्णित ऐसे स्तंभों का समूह है जिनको धीरे से टकटकाने पर, भारतीय शास्त्रीय संगीत के मूल स्वर-सा, रे, गा, मा, पा, धा, नी, सा, उत्पन्न होते हैं। इन स्तंभों के कंपन उनमें इस्तेमाल किए गए पत्थर की प्रत्यास्थता, घनत्व और स्तंभ के आकार पर निर्भर करते हैं।

संगीत स्तंभों को तीन श्रेणियों में बाँटा जा सकता है : पहली श्रेणी में है **श्रुति स्तंभ** जो प्राथमिक स्वर-सरगम उत्पन्न करते हैं, दूसरी श्रेणी है **गण-थूंगल** की जो रागों की मूल धुनें उत्पन्न करते हैं और तीसरी श्रेणी है **लय थूंगल** की, यह वह स्तंभ है जो थाप लगाने पर ताल उत्पन्न करते हैं। नेल्ल्याप्पर मंदिर के स्तंभ श्रुति एवं लय श्रेणी के हैं।

पुरातत्ववेत्ता मानते हैं कि नेल्ल्याप्पर मंदिर पाण्डयन कुल के शासकों द्वारा सातवीं शताब्दी में बनवाये गए थे।

नेल्ल्याप्पर मंदिर तथा दक्षिण भारत में बने कई दूसरे मंदिरों (जैसे हम्पी (देखिये चित्र), कन्याकुमारी और तिरुअनन्तपुरम् के मंदिर) में लगे संगीत-स्तंभ हमारे देश की ही विशिष्टता है और दुनिया के किसी भी भाग में ये नहीं पाए जाते।

© NCERT not to be republished



चित्र 14.16 (a) 11 Hz *आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (b)* 9 Hz *आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (c) तरंगों (a) तथा (b) का अध्यारोपण से उत्पन्न* 2 Hz *आवृत्ति का विस्पंद दर्शाता है।*

► ***उदाहरण 14.6*** दो सितारों की डोरियाँ A तथा B एक साथ 'धा' स्वर बजा रहीं हैं तथा स्वरों में थोड़ा अंतर होने के कारण 5 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी B के तनाव में कुछ वृद्धि करने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की आवृत्ति 427 Hz है, तो B की मूल आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

हल : डोरी में तनाव बढ़ाने पर उसकी कंपन की आवृत्ति बढ़ जाती है। यदि डोरी B की मूल आवृत्ति (ν_B) A की आवृत्ति (ν_A) से अधिक है, तब ν_B में और वृद्धि होने पर विस्पंदों की आवृत्ति बढ़नी चाहिए, परंतु विस्पंद-आवृत्ति में गिरावट पाई गई। अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $\nu_B < \nu_A$। चूँकि $\nu_A - \nu_B = 5$Hz, तथा $\nu_A = 427$ Hz, अतः डोरी B की मूल आवृत्ति $\nu_B = 422$ Hz ◄

सारांश

1. *यांत्रिक तरंगें* द्रव्यात्मक माध्यमों में विद्यमान रह सकती हैं तथा ये न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं।
2. *अनुप्रस्थ तरंगें* वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं।
3. *अनुदैर्घ्य तरंगें* वे तंरगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं।
4. *प्रगामी तरंग* वह तरंग होती है जो माध्यम के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गमन करती है।
5. धनात्मक x-दिशा में संचरित ज्यावक्रीय तरंग का *विस्थापन* इस प्रकार व्यक्त किया जाता है-

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi)$$

यहाँ a तरंग का आयाम, k कोणीय तरंग संख्या, ω कोणीय आवृत्ति, $(kx - \omega t + \phi)$ कला, तथा ϕ कला-नियतांक अथवा प्रारंभिक कला कोण है।

6. किसी प्रगामी तरंग का तरंगदैर्घ्य λ, उसके किन्हीं ऐसे दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी के बराबर होती है जो किसी क्षण पर समान कला में होते हैं। अप्रगामी तरंगों के लिए यह दो क्रमागत निस्पंदों अथवा प्रस्पंदों के बीच की दूरी के दोगुने के बराबर होती है।
7. किसी तरंग के *आवर्तकाल* T को उस समय द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसमें माध्यम का कोई अवयव अपना एक दोलन पूर्ण करता है। यह तरंग की कोणीय आवृत्ति ω से इस प्रकार संबधित होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

8. किसी तरंग की *आवृत्ति* ν को $1/T$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा आवृत्ति व कोणीय आवृत्ति में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

© NCERT not to be republished

9. प्रगामी तरंग की *चाल* $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$

10. किसी तानित डोरी पर *अनुप्रस्थ तरंग की चाल* उस डोरी के गुणों से निर्धारित होती है । यदि किसी डोरी में तनाव T है तथा डोरी का रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है तो उस डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

11. *ध्वनि तरंगें* अनुदैर्घ्य यांत्रिक तरंगें होती हैं जो ठोसों, द्रवों तथा गैसों में गमन कर सकती हैं । यदि किसी माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक B तथा घनत्व ρ है तो उस माध्यम में ध्वनि तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

धातु की छड़ में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

किसी गैस में, चूँकि $B = \gamma P$, अतः ध्वनि की चाल

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात ($\gamma = C_p/C_v$), ρ गैस का घनत्व तथा P गैस का दाब है ।

12. जब दो या अधिक तरंगें किसी माध्यम में एक साथ गमन करती हैं, तब माध्यम के किसी अवयव का विस्थापन प्रत्येक तरंग के विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है । इसे तरंगों के *अध्यारोपण का सिद्धांत* कहते हैं ।

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i\,(x - vt)$$

13. एक ही डोरी पर गमन करती दो ज्यावक्रीय तरंगें अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार संकलन अथवा निरसन द्वारा व्यतिकरण की परिघटना प्रदर्शित करती हैं । यदि समान आयाम a तथा समान आवृत्ति वाली परंतु कला में कला-नियतांक ϕ के अंतर वाली दो तरंगें एक ही दिशा में गतिमान हैं तो उनके व्यतिकरण का परिणाम एक एकल तरंग होती हैं जिसकी आवृत्ति भी उनके समान होती है :

$$y(x,t) = \left[2a\cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right)$$

यदि $\phi = 0$ अथवा 2π का पूर्णांक गुणज हो तो तरंगें एकदम समान कला में होती हैं तथा व्यतिकरण संपोषी होता है; यदि $\phi = \pi$ अथवा π रेडियन का विषम गुणज हो तो तरंगें एकदम विपरीत कलाओं में होती है तथा व्यतिकरण विनाशी होता है ।

14. किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला-उत्क्रमण के साथ होता है, परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला-परिवर्तन के होता है ।

किसी आपतित तरंग के लिए

$y_i\,(x, t) = a \sin\,(kx - \omega t)$

दृढ़ परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$y_r\,(x, t) = -\,a \sin\,(kx + \omega t)$

© NCERT not to be republished

खुली परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$$y_r\ (x, t) = a \sin (kx + \omega t)$$

15. विपरीत दिशाओं में गतिशील दो सर्वसम तरंगों के व्यतिकरण से अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं । दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में उत्पन्न अप्रगामी तरंगों को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$y\ (x, t) = [2\ a \sin kx] \cos \omega t$$

अप्रगामी तरंगों का एक अभिलक्षण यह है कि इनमें शून्य विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें निस्पंद कहते हैं तथा अधिकतम विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें प्रस्पंद कहते हैं, होती हैं । दो क्रमागत निस्पंदों अथवा दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी होती है ।

L लंबाई की तानित डोरी जो दोनों सिरों पर परिबद्ध हो, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करती है :

$$\nu = n\frac{v}{2L},\ n = 1, 2, 3....$$

यहाँ v तरंग की डोरी पर गमन की चाल है । इस संबंध से प्राप्त आवृत्तियों को सेट निकाय के कंपन अथवा दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* कहते है । निम्नतम आवृत्ति से दोलन की विधा *मूल विधा* अथवा *प्रथम गुणावृत्ति* कहलाती है । $n = 2$ की दोलन विधा को *द्वितीय गुणावृत्ति* कहते हैं, और इसी प्रकार क्रम बढ़ता जाता है ।

L लंबाई की कोई नली जिसका एक सिरा बंद तथा दूसरा सिरा खुला हो, जैसे वायु-कॉलम, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करता है :

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L},\ n = 0, 1, 2, 3....$$

उपरोक्त संबंध द्वारा निरूपित आवृत्तियों का सेट इस प्रकार के निकाय के दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* होती हैं । इस संबंध द्वारा $n = 0$ के लिए प्राप्त निम्नतम आवृत्ति $v/4L$ है, जो इस प्रकार के निकाय की मूल विधा अथवा प्रथम गुणावृत्ति होती है ।

16. दोनों सिरों से परिबद्ध L लंबाई की तानित डोरी अथवा एक सिरे से बंद तथा दूसरे सिरे पर मुक्त अथवा दोनों सिरों पर मुक्त वायु-कॉलम जिन नियत आवृत्तियों से कंपन करते हैं उन्हें इन निकायों की प्रसामान्य विधाएँ कहते हैं । इनमें से प्रत्येक आवृत्ति निकाय की *अनुनाद आवृत्ति* होती है ।

17. *विस्पंद* तब उत्पन्न होते हैं जब बहुत कम अंतर की दो आवृत्तियों ν_1 तथा ν_2 की तरंगें एक साथ संसूचित की जाती हैं। विस्पंद आवृत्ति इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$\nu_{beat} = \nu_1 \sim \nu_2$$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
तरंगदैर्घ्य	λ	[L]	m	एक ही क्षण पर समान कला के दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी
संचरण नियतांक	k	[L^{-1}]	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
तरंग चाल	v	[LT^{-1}]	$m\ s^{-1}$	$\nu = v\lambda$
विस्पंद आवृत्ति	ν_{beat}	[T^{-1}]	s^{-1}	दो निकट आवृत्तियों की अध्यारोपित तरंगों की आवृत्तियों का अंतर

© NCERT not to be republished

विचारणीय विषय

1. तरंग किसी माध्यम में समूचे द्रव्य की गति नहीं है । पवन वायु में ध्वनि तरंग से भिन्न होती है । पवन में एक स्थान से दूसरे स्थान तक वायु की गति सम्मिलित होती है । ध्वनि तरंग में वायु की परतों का संपीडन तथा विरलन सम्मिलित होता है।
2. तरंग में एक स्थान से दूसरे स्थान तक ऊर्जा स्थानांतरित होती है न कि द्रव्य।
3. किसी यांत्रिक तरंग में, माध्यम के निकटतम दोलनी भागों के बीच आद्योपांत (शुरू से अंत तक) प्रत्यास्थ बलों के युग्मन के कारण ऊर्जा स्थानांतरण होता है।
4. अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों में हो सकता है जिनमें अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक हो, उदाहरणार्थ ठोस । अनुदैर्घ्य तरंगों को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की आवश्यकता होती है, अतः ये तरंगें सभी माध्यमों-ठोस, द्रव तथा गैस में संभव होती हैं।
5. दी गई आवृत्ति की किसी सरल आवर्त प्रगामी तरंग में सभी कणों का आयाम समान होता है, परंतु किसी दिए गए नियत समय पर उनकी कलाएँ भिन्न होती हैं । किसी अप्रगामी तरंग में किसी निश्चित क्षण पर सभी कणों की कलाएँ समान होती हैं परंतु उनके आयाम भिन्न होते हैं।
6. किसी माध्यम में विराम की स्थिति वाले प्रेक्षक के सापेक्ष उस माध्यम में किसी यांत्रिक तरंग की चाल (v) केवल माध्यम के प्रत्यास्थ तथा अन्य गुणों (जैसे द्रव्यमान घनत्व) पर निर्भर करती है । यह ध्वनि-स्रोत के वेग पर निर्भर नहीं करती।

अभ्यास

14.1 2.50 kg द्रव्यमान की 20 cm लंबी तानित डोरी पर 200 N बल का तनाव है । यदि इस डोरी के एक सिरे को अनुप्रस्थ झटका दिया जाए तो उत्पन्न विक्षोभ कितने समय में दूसरे सिरे तक पहुँचेगा ?

14.2 300 m ऊँची मीनार के शीर्ष से गिराया गया पत्थर मीनार के आधार पर बने तालाब के पानी से टकराता है । यदि वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है तो पत्थर के टकराने की ध्वनि मीनार के शीर्ष पर पत्थर गिराने के कितनी देर बाद सुनाई देगी ? (g = 9.8 m s^{-2})

14.3 12.0 m लंबे स्टील के तार का द्रव्यमान 2.10 kg है । तार में तनाव कितना होना चाहिए ताकि उस तार पर किसी अनुप्रस्थ तरंग की चाल 20 °C पर शुष्क वायु में ध्वनि की चाल (343 m s^{-1}) के बराबर हो ।

14.4 सूत्र $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ का उपयोग करके स्पष्ट कीजिए कि वायु में ध्वनि की चाल क्यों

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती,

(b) ताप के साथ बढ़ जाती है, तथा

(c) आर्द्रता के साथ बढ़ जाती है ?

14.5 आपने यह सीखा है कि एक विमा में कोई प्रगामी तरंग फलन $y = f(x, t)$ द्वारा निरूपित की जाती है जिसमें x तथा t को $x - vt$ अथवा $x + vt$ अर्थात् $y = f(x \pm vt)$ संयोजन में प्रकट होना चाहिए । क्या इसका प्रतिलोम भी सत्य है ? नीचे दिए गए y के प्रत्येक फलन का परीक्षण करके यह बताइए कि वह किसी प्रगामी तरंग को निरूपित कर सकता है:

(a) $(x - vt)^2$

(b) $\log[(x+vt)/x_0]$

(c) $1/(x + vt)$

14.6 कोई चमगादड़ वायु में 1000 k Hz आवृत्ति की पराश्रव्य ध्वनि उत्सर्जित करता है । यदि यह ध्वनि जल के पृष्ठ से टकराती है, तो (a) परावर्तित ध्वनि तथा (b) पारगमित ध्वनि की तरंगदैर्घ्य ज्ञात कीजिए । वायु तथा जल में ध्वनि की चाल क्रमशः 340 m s^{-1} तथा 1486 m s^{-1} है ।

14.7 किसी अस्पताल में ऊतकों में ट्यूमरों का पता लगाने के लिए पराश्रव्य स्कैनर का प्रयोग किया जाता है । उस ऊतक में ध्वनि में तरंगदैर्घ्य कितनी है जिसमें ध्वनि की चाल 1.7 k m s^{-1} है ? स्कैनर की प्रचालन आवृत्ति 4.2 MHz है ।

14.8 किसी डोरी पर कोई अनुप्रस्थ गुणावृत्ति तरंग का वर्णन

$$y(x, t) = 3.0 \sin(36\, t + 0.018\, x + \pi/4)$$

© NCERT not to be republished

द्वारा किया जाता है । यहाँ x तथा y सेंटीमीटर में तथा t सेकंड में है । x की धनात्मक दिशा बाएँ से दाएँ है ।

(a) क्या यह प्रगामी तरंग है अथवा अप्रगामी ? यदि यह प्रगामी तरंग है तो इसकी चाल तथा संचरण की दिशा क्या है ?

(b) इसका आयाम तथा आवृत्ति क्या है ?

(c) उद्गम के समय इसकी आरंभिक कला क्या है ?

(d) इस तरंग में दो क्रमागत शिखरों के बीच की न्यूनतम दूरी क्या है ?

14.9 प्रश्न 14.8 में वर्णित तरंग के लिए x = 0 cm, 2 cm तथा 4 cm के लिए विस्थापन (y) और समय (t) के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए। इन ग्राफों की आकृति क्या है ? आयाम, आवृत्ति अथवा कला में से किन पहलुओं में प्रगामी तरंग में दोलनी गति एक बिंदु से दूसरे बिंदु पर भिन्न है ?

14.10 प्रगामी गुणावृत्ति तरंग

$y\,(x, t) = 2.0 \cos 2\pi\,(10\,t - 0.0080\,x + 0.35)$

जिसमें x तथा y को m में तथा t को s में लिया गया है, के लिए उन दो दोलनी बिंदुओं के बीच कलांतर कितना है जिनके बीच की दूरी है

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\lambda/2$

(d) $\dfrac{3\lambda}{4}$

14.11 दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी पर अनुप्रस्थ विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त किया गया है

$$y(x, t) = 0.06 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \cos (120\,\pi\,t)$$

जिसमें x तथा y को m तथा t को s में लिया गया है। इसमें डोरी की लंबाई 1.5 m है जिसकी संहति 3.0×10^{-2} kg है। निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) यह फलन प्रगामी तरंग अथवा अप्रगामी तरंग में से किसे निरूपित करता है ?

(b) इसकी व्याख्या विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के रूप में करते हुए प्रत्येक तरंग की तरंगदैर्घ्य, आवृत्ति तथा चाल ज्ञात कीजिए।

(c) डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए।

14.12 (i)प्रश्न 14.11 में वर्णित डोरी पर तरंग के लिए बताइए कि क्या डोरी के सभी बिंदु समान (a) आवृत्ति, (b) कला, (c) आयाम से कंपन करते हैं ? अपने उत्तरों को स्पष्ट कीजिए।

(ii)एक सिरे से 0.375 m दूर के बिंदु का आयाम कितना है ?

14.13 नीचे किसी प्रत्यास्थ तरंग (अनुप्रस्थ अथवा अनुदैर्घ्य) के विस्थापन को निरूपित करने वाले x तथा t के फलन दिए गए हैं। यह बताइए कि इनमें से कौन (i) प्रगामी तरंग को, (ii) अप्रगामी तरंग को, (iii) इनमें से किसी भी तरंग को नहीं निरूपित करता है

(a) $y = 2 \cos (3x) \sin 10\,t$

(b) $y = 2\sqrt{x - v\,t}$

(c) $y = 3 \sin (5x - 0.5\,t) + 4 \cos (5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

14.14 दो दृढ़ टेकों के बीच तानित तार अपनी मूल विधा में 45 Hz आवृत्ति से कंपन करता है। इस तार का द्रव्यमान 3.5×10^{-2} kg तथा रैखिक द्रव्यमान घनत्व 4.0×10^{-2} kg m^{-1} है। (a) तार पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल क्या है, तथा (b) तार में तनाव कितना है ?

© NCERT not to be republished

14.15 एक सिरे पर खुली तथा दूसरे सिरे पर चलायमान पिस्टन लगी 1 m लंबी नलिका, किसी नियत आवृत्ति के स्रोत (340 Hz आवृत्ति का स्वरित्र द्विभुज) के साथ, जब नलिका में वायु कॉलम 25.5 cm अथवा 79.3 cm होता है तब अनुनाद दर्शाती है। प्रयोगशाला के ताप पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए। कोर-प्रभाव को नगण्य मान सकते हैं।

14.16 100 cm लंबी स्टील-छड़ अपने मध्य बिंदु पर परिबद्ध है। इसके अनुदैर्घ्य कंपनों की मूल आवृत्ति 2.53 kHz है। स्टील में ध्वनि की चाल क्या है ?

14.17 20 cm लंबाई के पाइप का एक सिरा बंद है। 430 Hz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा अनुनाद द्वारा उत्तेजित की जाती है ? यदि इस पाइप के दोनों सिरे खुले हों तो भी क्या यह स्रोत इस पाइप के साथ अनुनाद करेगा ? वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है।

14.18 सितार की दो डोरियाँ A तथा B एक साथ 'गा' स्वर बजा रही हैं तथा थोड़ी-सी बेसुरी होने के कारण 6 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी A का तनाव कुछ घटाने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की मूल आवृत्ति 324 Hz है तो B की आवृत्ति क्या है ?

14.19 स्पष्ट कीजिए क्यों (अथवा कैसे) :

(a) किसी ध्वनि तरंग में विस्थापन निस्पंद दाब प्रस्पंद होता है और विस्थापन प्रस्पंद दाब निस्पंद होता है।

(b) आँख न होने पर भी चमगादड़ अवरोधकों की दूरी, दिशा, प्रकृति तथा आकार सुनिश्चित कर लेते है।

(c) वायलिन तथा सितार के स्वरों की आवृत्तियाँ समान होने पर भी हम दोनों से उत्पन्न स्वरों में भेद कर लेते हैं।

(d) ठोस अनुदैर्घ्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगों का पोषण कर सकते हैं जबकि गैसों में केवल अनुदैर्घ्य तरंगें ही संचरित हो सकती हैं, तथा

(e) परिक्षेपी माध्यम में संचरण के समय स्पंद की आकृति विकृत हो जाती है।

© NCERT not to be republished

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर

अध्याय 8

8.1 1.8

8.2 (a) दिए गए ग्राफ के अनुसार 150×10^6 N m^{-2} प्रतिबल के लिए विकृति 0.002 है । अतः पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $= 7.5 \times 10^{10}$ N m^{-2}

(b) पदार्थ की सन्निकट पराभव सामर्थ्य $= 3 \times 10^8$ N m^{-2}

8.3 (a) पदार्थ A

(b) पदार्थ A अधिक तन्य पदार्थ है क्योंकि इसमें प्रत्यास्थता सीमा तथा विभंजन बिंदु के मध्य अप्रत्यास्थ विरूपण पदार्थ B की अपेक्षा अधिक है ।

8.4 (a) गलत

(b) सत्य

8.5 1.5×10^{-4} m (स्टील); 1.3×10^{-4} m (पीतल)

8.6 विस्थापन $= 4 \times 10^{-6}$ m

8.7 2.8×10^{-6}

8.8 0.127

8.9 7.07×10^4 N

8.10 $D_{copper}/D_{iron} = 1.25$

8.11 1.539×10^{-4} m

8.12 2.026×10^9 Pa

8.13 1.034×10^3 kg/m^3

© NCERT not to be republished

8.14 0.0027

8.15 $0.058\ cm^3$

8.16 $2.2 \times 10^6\ N/m^2$

अध्याय 9

9.3 (a) घटता है, (b) बढ़ती, घटती, (c) अवरूपण विकृति, अवरूपण विकृति की दर (d) द्रव्यमान संरक्षण नियम, बर्नूली के समीकरण से (e) अधिक

9.5 $6.2 \times 10^6\ Pa$

9.6 10.5 m

9.7 समुद्र में उस गहराई पर दाब लगभग $3 \times 10^7\ Pa$ है । यह संरचना उपयुक्त है क्योंकि यह इससे कहीं अधिक प्रतिबल/दाब को सँभाल सकती है ।

9.8 $6.92 \times 10^5\ Pa$

9.9 0.800

9.10 स्पिरिट वाली भुजा में पारे का स्तर ऊपर उठेगा; पारे के स्तरों में अंतर = 0.221 cm

9.11 नहीं, बर्नूली का नियम केवल धारारेखीय प्रवाहों पर ही लागू होता है ।

9.12 नहीं, जिन दो बिंदुओं पर बर्नूली के समीकरण का अनुप्रयोग करना है उनके बीच वायुमंडलीय दाबों में सार्थक अंतर होना चाहिए ।

9.13 $9.8 \times 10^2\ Pa$ (रेनल्ड्स संख्या लगभग 0.3 है, अतः प्रवाह स्तरीय है ।)

9.14 $1.5 \times 10^3\ N$

9.15 चित्र (a) सही नहीं है [कारण : संकीर्णन पर (जहाँ नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल कम है) द्रव्यमान सरंक्षण नियम के कारण प्रवाह की चाल अधिक है । परिणामस्वरूप, बर्नूली के सिद्धांत के अनुसार वहाँ पर दाब कम है । हमने यह परिकल्पना की है कि तरल असंपीड्य है ।]

9.16 $0.64\ m\ s^{-1}$

9.17 $2.5 \times 10^{-2}\ N\ m^{-1}$

9.18 (b) तथा (c) के लिए 4.5×10^{-2} N अर्थात् ठीक उतना ही जितना (a) में है ।

9.19 दाब-आधिक्य = 310 Pa, कुल दाब = 1.031×10^5 Pa । तथापि, चूंकि प्रश्न में दिया गया आंकड़ा तीन अंकों तक यथार्थ है, हमें बूँद के भीतर कुल दाब को 1.01×10^5 Pa लिखना चाहिए ।

9.20 साबुन के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य = 20.0 Pa ; साबुन के विलयन में डूबे वायु के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य = 10.0 Pa । वायु के बुलबुले के लिए बाहर का दाब = $1.01 \times 10^5 + 0.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 1.2 = 1.06 \times 10^5$ Pa । दाब आधिक्य इतना कम है कि तीन सार्थक अंकों तक वायु के बुलबुले के भीतर कुल दाब = 1.06×10^5 Pa ।

अध्याय 10

10.1 नियॉन : $-248.58\ °C = -415.44\ °F$

CO_2 : $-56.60\ °C = -69.88\ °F$ [$t_F = \frac{9}{5} t_c + 32$] उपयोग कीजिए ।

10.2 $T_A = \left(\frac{4}{7}\right) T_B$

10.3 384.8 K

© NCERT not to be republished

10.4 (a) त्रिक बिंदु एक अद्वितीय तापांक होता है; गलन बिंदु तथा क्वथन बिंदु के तापांक दाब पर निर्भर करते हैं; (b) एक अन्य नियत तापांक स्वयं निरपेक्ष शून्य होता है; (c) त्रिक बिंदु 0.01 °C है 0 °C नहीं है; (d) 491.69

10.5 (a) $T_A = 392.69$ K, $T_B = 391.98$ K ; (b) यह विसंगति इसलिए उत्पन्न होती है क्योकि गैसें पूर्णत: आदर्श गैसें नहीं होतीं । इस विसंगति को कम करने के लिए पाठ्यांक कम से कम दाबों पर लेने चाहिए और मापे गए तापों तथा गैस के त्रिक बिंदु पर परम दाब के बीच खींचे गए आरेख को जबकि दाब शून्य की ओर अग्रसित होता है तो अन्य तापों को प्राप्त करने के लिए बहिर्वेशित (extrapolate) करना चाहिए । इन परिस्थितियों में गैसें आदर्श गैस जैसा व्यवहार करने लग जाती हैं ।

10.6 छड़ की 45.0 °C पर वास्तविक लंबाई = 63.0 + 0.0136 = 63.0136 cm (तथापि हमें यह कहना चाहिए कि तीन सार्थक अंकों पर लंबाई में अंतर 0.0136 cm है, परंतु कुल लंबाई तीन सार्थक अंकों तक 63.0 cm ही है । इसी छड़ की 27.0 °C पर लंबाई = 63.0 cm

10.7 जब धुरी को –69 °C तक ठंडा किया जाता है तो पहिया धुरी पर चढ़ता है।

10.8 व्यास में वृद्धि का परिमाण = 1.44×10^{-2} cm

10.9 3.8×10^2 N

10.10 चूंकि संयोजित छड़ के सिरे शिंकजे में जकड़े नहीं हैं अत: दोनों में मुक्त रूप से प्रसार होगा ।

$\Delta l_{\text{पीतल}} = 0.21$ cm ; $\Delta l_{\text{स्टील}} = 0.126$ cm $= 0.13$ cm

लंबाई में कुल परिवर्तन = 0.34 cm । चूंकि छड़ें प्रसार के लिए स्वतंत्र हैं, उनमें कोई तापीय प्रतिबल उत्पन्न नहीं होता ।

10.11 $0.0147 = 1.5 \times 10^{-2}$

10.12 103 °C

10.13 1.5 kg

10.14 0.43 J g^{-1} K^{-1} ; कमतर

10.15 गैसें द्विपरमाणुक हैं, तथा स्थानांतरण की स्वातंत्र्य कोटि के अतिरिक्त उनकी अन्य स्वातंत्र्य कोटि (अर्थात् गति की अन्य विधाएँ) भी संभव हैं । गैस के ताप में कुछ वृद्धि के लिए सभी विधाओं की माध्य ऊर्जा में वृद्धि करने के लिए ऊष्मा की आपूर्ति करनी होती है । फलस्वरूप, एक परमाणुक गैसों की तुलना में द्विपरमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा अधिक होती है । यह दर्शाया जा सकता है कि यदि हम केवल गति की घूर्णी विधा पर ही विचार करें तो द्विपरमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा (5/2)R होती है जो केवल क्लोरीन को छोड़कर सारणी में दिए गए सभी गैसों के प्रेक्षणों के लिए सत्य है । क्लोरीन की मोलर विशिष्ट ऊष्मा का अधिक मान यह दर्शाता है कि क्लोरीन के अणु में कमरे के ताप पर घूर्णी विधा के अतिरिक्त कंपन विधा भी उपस्थित है ।

10.16 4.3 g/min

10.17 3.7 kg

10.18 238 °C

10.20 9 min

अध्याय 11

11.1 16 g/min

11.2 934 J

11.4 $(2)^{7/5} = 2.64$

11.5 16.9 J

11.6 (a) 0.5 atm (b) शून्य (c) शून्य (गैस को आदर्श मानते हुए) (d) नहीं, चूंकि प्रक्रिया (जिसे मुक्त प्रसार कहते हैं) तीव्र है तथा नियंत्रित नहीं की जा सकती । अंतर अवस्थाएँ साम्य अवस्थाएँ नहीं होतीं तथा गैस समीकरण का पालन नहीं करतीं । कुछ समय के पश्चात् गैस साम्यावस्था में लौट आती है जो उसके *P-V-T* पृष्ठ पर स्थित होती है ।

© NCERT not to be republished

अध्याय 12

12.1 4×10^{-4}

12.3 (a) बिंदुकित आरेख 'आदर्श' गैस व्यवहार के तदनुरूपी है; (b) $T_1 > T_2$; (c) 0.26 J K^{-1}; (d) नहीं, 6.3×10^{-5} kg H_2 से समान मान प्राप्त होगा ।

12.4 0.14 kg

12.5 5.3×10^{-6} m^3

12.6 6.10×10^{26}

12.7 (a) 6.2×10^{-21} J; (b) 1.24×10^{-19} J; (c) 2.1×10^{-16} J

12.8 हाँ, आवोगाद्रो नियम के अनुसार । नहीं, तीनों गैसों में सबसे हलकी गैस के लिए v_{rms} सर्वाधिक है; नियॉन ।

12.9 2.52×10^3 K

12.10 माध्य मुक्त पथ के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करिए

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}$$

यहाँ d अणु का व्यास है । दिए गए ताप तथा दाब के लिए $N/V = 5.0 \times 10^{25}$ m^{-3} तथा $\bar{l} = 1.0 \times 10^{-7}$ m; $v_{rms} = 5.1 \times 10^2$ m s^{-1} संघट्ट आवृत्ति $= \frac{v_{rms}}{\bar{l}} = 5.1 \times 10^9$ s^{-1} । संघट्ट द्वारा लिया गया समय $= \frac{d}{v_{rms}} = 4 \times 10^{-13}$ s । क्रमागत संघट्टों के बीच लिया गया समय $= \frac{\bar{l}}{v_{rms}} = 2 \times 10^{-10}$ s । इस प्रकार, क्रमागत संघट्टों के बीच का समय 1 संघट्ट में लगे समय का 500 गुना है । इस प्रकार किसी गैस का कोई अणु अवश्य ही अधिकांश समय मुक्त गति करता है ।

अध्याय 13

13.1 (b), (c)

13.2 (b) तथा (c) सरल आवर्त गति; (a) तथा (d) आवर्ती गति को निरूपित करते हैं परंतु सरल आवर्त गति का निरूपण नहीं करते [किसी बहुपरमाणुक अणु की कई प्राकृतिक आवृत्तियाँ होती हैं; अत: व्यापक रूप में, इसका कंपन विभिन्न आवृत्तियों की कई सरल आवर्त गतियों का अध्यारोपण होता है । यह अध्यारोपण आवर्ती तो होता है, परंतु सरल आवर्त गति नहीं होता]।

13.3 (b) तथा (d) आवर्ती हैं जिनमें प्रत्येक का आवर्तकाल 2 s है; (a) तथा (c) आवर्ती नहीं हैं [ध्यान दीजिए, किसी गति के आवर्ती होने के लिए केवल किसी एक स्थिति की पुनरावृत्ति होना ही पर्याप्त नही होता; एक आवर्तकाल की समस्त गति की क्रमागत पुनरावृत्ति होनी चाहिए] ।

13.4 (a) सरल आवर्त गति, $T = 2\pi/\omega$; (b) आवर्ती, $T = 2\pi/\omega$ परंतु सरल आवर्त गति नहीं; (c) सरल आवर्त गति, $T = \pi/\omega$; (d) आवर्ती, $T = 2\pi/\omega$ परंतु सरल आवर्त गति नहीं; (e) अनावर्ती; (f) अनावर्ती (प्राकृतिक नियमों के अनुसार स्वीकार करने योग्य नहीं क्योंकि जैसे ही $t \to \infty$, फलन $\to \infty$)

13.5 (a) 0, +, +; (b) 0, –, –; (c) –, 0, 0; (d) –, –, –; (e) +, +, +; (f) –, –, –

13.6 (c) सरल आवर्त गति का निरूपण करता है ।

13.7 A = $\sqrt{2}$ cm, $\phi = 7\pi/4$; B = $\sqrt{2}$ cm, $\alpha = \pi/4$

13.8 219 N

13.9 आवृत्ति = 3.2 s^{-1}; द्रव्यमान का अधिकतम त्वरण = 8.0 m s^{-2}; द्रव्यमान की अधिकतम चाल = 0.4 m s^{-1}

13.10 (a) $x = 2 \sin 20t$ (b) $x = 2 \cos 20t$
(c) $x = -2 \cos 20t$
यहाँ x cm में है । इन फलनों के न तो आयाम में कोई अंतर है, और न ही आवृत्ति में कोई अंतर है । इनकी प्रारंभिक कलाओं में अंतर है ।

© NCERT not to be republished

13.11 (a) $x = -3 \sin \pi t$, यहाँ x को cm में मापा गया है ।

(b) $x = -2 \cos \pi/2\, t$, यहाँ x को cm में मापा गया है ।

13.13 (a) (a) तथा (b) दोनों के लिए F/k

(b) (a) के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ तथा (b) के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

13.14 100 मीटर/मिनट

13.15 8.4 s

13.16 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + v^4/R^2}}}$; संकेत: क्षैतिज तल में कार्यरत त्रिज्य (अरीय) त्वरण के $\frac{v^2}{R}$ के कारण प्रभावी गुरुत्वीय त्वरण घट जाएगा ।

13.17 साम्यावस्था में, कॉर्क का भार उत्प्लावन बल के बराबर होता है । जब कॉर्क को x दूरी तक नीचे दबाया जाता है, तब उस पर नेट उत्प्लावन बल $Ax\rho_l g$ कार्य करता है । अत: बल स्थिरांक $k = A\rho_l g$ । अब $m = Ah\rho$ तथा $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ का उपयोग करके हम आवश्यक सूत्र प्राप्त कर सकते हैं ।

13.18 जब दोनों सिरे वायुमंडल की ओर खुले हैं तथा दोनों भुजाओं में भरे द्रवों के तलों में अंतर h है, तब द्रव-स्तंभ पर आरोपित नेट बल $Ah\rho g$ है, यहाँ A नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल तथा ρ नली में भरे द्रव का घनत्व है । चूंकि प्रत्यानयन बल h के अनुक्रमानुपाती है, अत: गति सरल आवर्त है ।

अध्याय 14

14.1 0.5 s

14.2 8.7 s

14.3 2.06×10^4 N

14.4 आदर्श गैस नियम मान लीजिए : $P = \frac{\rho RT}{M}$

यहाँ ρ गैस का घनत्व M आण्विक द्रव्यमान तथा T ताप है ।

इससे हमें $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ प्राप्त होता है ।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि तरंग की चाल v

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती।

(b) ताप के साथ $\sqrt{T}$ के अनुसार बढ़ती है ।

(c) जल का आण्विक द्रव्यमान (18), N_2 के आण्विक द्रव्यमान (28) तथा ऑक्सीजन के आण्विक द्रव्यमान (32) से कम है, अत: आर्द्रता में वृद्धि होने पर वायु का आण्विक द्रव्यमान घट जाता है, फलस्वरूप चाल v बढ़ जाती है ।

14.5 इसका विलोम सत्य नहीं है । किसी प्रगामी तरंग के स्वीकार करने योग्य फलन के लिए एक प्रत्यक्ष आवश्यकता यह है कि यह हर समय तथा हर स्थान पर परिमित होनी चाहिए । दिए गए फलनों में से केवल फलन (c) ही इस शर्त को संतुष्ट करता है । शेष फलन संभवतया किसी प्रगामी तरंग को निरूपित नहीं कर सकते ।

14.6 (a) 3.4×10^{-4} m (b) 1.49×10^{-3} m

14.7 4.1×10^{-4} m

14.8 (a) यह प्रगामी तरंग है, जो 20 m s^{-2} चाल से दाएँ से बाएँ गतिशील है ।

(b) 3.0 cm, 5.7 s^{-1} Hz

© NCERT not to be republished

(c) $\pi/4$

(d) 3.5 m

14.9 सभी ग्राफ ज्यावक्रीय हैं। इन सभी के आयाम तथा आवृत्तियाँ समान हैं, परंतु प्रारंभिक कलाएँ भिन्न हैं।

14.10 (a) 6.4π rad

(b) 0.8π rad

(c) π rad

(d) $(\pi/2)$ rad

14.11 (a) अप्रगामी तरंगें

(b) सभी तरंगों के लिए $l = 3$ m, $n = 60$ Hz तथा $v = 180$ m s^{-1}

(c) 648 N

14.12 (a) निस्पंदों को छोड़कर डोरी के अन्य सभी बिंदुओं की आवृत्ति तथा कला समान हैं, परंतु आयाम समान नहीं हैं।

(b) 0.042 m

14.13 (a) यह फलन अप्रगामी तरंग को निरूपित करता है ।

(b) किसी भी तरंग के लिए स्वीकार करने योग्य फलन नहीं।

(c) प्रगामी गुणावृत्ति तरंग ।

(d) दो अप्रगामी तरंगों का अध्यारोपण ।

14.14 (a) 79 m s^{-1}

(b) 248 N

14.15 347 m s^{-1}

संकेत : $v_n = \frac{(2n-1)v}{4l}$; किसी एक सिरे से बंद पाइप के लिए $n = 1, 2, 3, ...$

14.16 5.06 km s^{-1}

14.17 प्रथम गुणावृत्ति (मूल स्वरक), नहीं

14.18 318 Hz

© NCERT not to be republished

ग्रंथ सूची

पाठ्यपुस्तकें

इस पुस्तक में जिन विषयों को सम्मिलित किया गया है, उन विषयों के अतिरिक्त अध्ययन के लिए आप निम्नलिखित पुस्तकों में से एक या अधिक पुस्तकें पढ़ना चाहेंगे । यद्यपि इन पुस्तकों में से कुछ उच्च स्तर की हैं और उनमें ऐसे अनेक विषय दिए गये हैं जो इस पुस्तक में नहीं हैं ।

1 **Ordinary Level Physics**, A.F. Abbott, Arnold-Heinemann (1984).

2 **Advanced Level Physics**, M. Nelkon and P. Parker, 6th Edition Arnold-Heinemann (1987).

3 **Advanced Physics**, Tom Duncan, John Murray (2000).

4 **Fundamentals of Physics**, David Halliday, Robert Resnick and Jearl Walker, 7th Edition John Wily (2004).

5 **University Physics**, H.D. Young, M.W. Zemansky and F.W. Sears, Narosa Pub. House (1982).

6 **Problems in Elementary Physics**, B. Bukhovtsa, V. Krivchenkov, G. Myakishev and V. Shalnov, Mir Publishers, (1971).

7 **Lectures on Physics** (3 volumes), R.P. Feynman, Addision – Wesley (1965).

8 **Berkeley Physics Course** (5 volumes) McGraw Hill (1965).

   a. Vol. 1 – Mechanics: (Kittel, Knight and Ruderman)

   b. Vol. 2 – Electricity and Magnetism (E.M. Purcell)

   c. Vol. 3 – Waves and Oscillations (Frank S. Craw-ford)

   d. Vol. 4 – Quantum Physics (Wichmann)

   e. Vol. 5 – Statistical Physics (F. Reif)

9 **Fundamental University Physics**, M. Alonso and E. J. Finn, Addison – Wesley (1967).

10 **College Physics**, R.L. Weber, K.V. Manning, M.W. White and G.A. Weygand, Tata McGraw Hill (1977).

11 **Physics**: **Foundations and Frontiers**, G. Gamow and J.M. Cleveland, Tata McGraw Hill (1978).

12 **Physics for the Inquiring Mind**, E.M. Rogers, Princeton University Press (1960)

13 **PSSC Physics Course**, DC Heath and Co. (1965) Indian Edition, NCERT (1967)

14 **Physics Advanced Level**, Jim Breithampt, Stanley Thornes Publishers (2000).

15 **Physics,** Patrick Fullick, Heinemann (2000).

16 **Conceptual Physics,** Paul G. Hewitt, Addision-Wesley (1998).

17 **College Physics,** Raymond A. Serway and Jerry S. Faughn, Harcourt Brace and Co. (1999).

18 **University Physics,** Harris Benson, John Wiley (1996).

19 **University Physics,** William P. Crummet and Arthur B. Western, Wm.C. Brown (1994).

20 **General Physics,** Morton M. Sternheim and Joseph W. Kane, John Wiley (1988).

© NCERT not to be republished

21 **Physics,** Hans C. Ohanian, W.W. Norton (1989).
22 **Advanced Physics,** Keith Gibbs, Cambridge University Press (1996).
23 **Understanding Basic Mechanics,** F. Reif, John Wiley (1995).
24 **College Physics,** Jerry D. Wilson and Anthony J. Buffa, Prentice-Hall (1997).
25 **Senior Physics, Part – I,** I.K. Kikoin and A.K. Kikoin, Mir Publishers (1987).
26 **Senior Physics, Part – II,** B. Bekhovtsev, Mir Publishers (1988).
27 **Understanding Physics,** K. Cummings, Patrick J. Cooney, Priscilla W. Laws and Edward F. Redish, John Wiley (2005)
28 **Essentials of Physics,** John D. Cutnell and Kenneth W. Johnson, John wiley (2005)

सामान्य पुस्तकें

विज्ञान के अनुदेशित तथा मनोरंजक सामान्य अध्ययन के लिए आप निम्नलिखित पुस्तकों में से कुछ पुस्तकें पढ़ना चाहेंगे । तथापि ध्यान रखिए, इनमें से कुछ पुस्तकों को लिखने का स्तर आपकी प्रस्तुत पुस्तक के स्तर से काफी उच्च रखा गया है ।

1 **Mr. Tompkins** in paperback, G. Gamow, Cambridge University Press (1967).
2 **The Universe and Dr. Einstein**, C. Barnett, Time Inc. New York (1962).
3 **Thirty years that Shook Physics**, G. Gamow, Double Day, New York (1966).
4 **Surely You're Joking, Mr. Feynman**, R.P. Feynman, Bantam books (1986).
5 **One, Two, Three… Infinity**, G. Gamow, Viking Inc. (1961).
6 **The Meaning of Relativity**, A. Einstein, (Indian Edition) Oxford and IBH Pub. Co (1965).
7 **Atomic Theory and the Description of Nature**, Niels Bohr, Cambridge (1934).
8 **The Physical Principles of Quantum Theory**, W. Heisenberg, University of Chicago Press (1930).
9 **The Physics- Astronomy Frontier**, F. Hoyle and J.V. Narlikar, W.H. Freeman (1980).
10 **The Flying Circus of Physics with Answer**, J. Walker, John Wiley and Sons (1977).
11 **Physics for Everyone** (series), L.D. Landau and A.I. Kitaigorodski, Mir Publisher (1978).
Book 1: Physical Bodies
Book 2: Molecules
Book 3: Electrons
Book 4: Photons and Nuclei.
12 **Physics can be Fun**, Y. Perelman, Mir Publishers (1986).
13 **Power of Ten**, Philip Morrison and Eames, W.H. Freeman (1985).
14 **Physics in your Kitchen Lab**., I.K. Kikoin, MIR Publishers (1985).
15 **How Things Work : The Physics of Everyday Life**, Louis A. Bloomfield, John Wiley (2005)
16 **Physics Matters : An Introduction to Conceptual Physics,** James Trefil and Robert M. Hazen, John Wiley (2004).

© NCERT not to be republished

पारिभाषिक शब्दावली

ढाँचा	Framework
यांत्रिकी	Mechanics
परमाण्विक	Atomic
आण्विक	Molecular
प्रकाश वैद्युत प्रभाव	Photo electric effect
क्वांटम	Quantum
प्रतिकण	Antiparticle
विषय	Discipline
प्रति-इलेक्ट्रॉन	Anti-electron
एकीकरण	Unification
न्यूनीकरण	Reduction
अवयव	Constituent
स्थूल	Macroscopic
धारणा, संकल्पना	Concept
सार्वत्रिक	Universal
प्रभावक्षेत्र	Domain
गुरुत्वाकर्षण	Gravitation
वैद्युत चुंबक	Electromagnet
अणुगति सिद्धांत	Kinetic theory
सांख्यिकीय यांत्रिकी	Statistical mechanics
ताप	Temperature
औसत	Average
माध्य	Mean
पार्थिव	Terrestrial
आकाशीय पिंड	Celestial Object
ग्रहण	Eclipse
ज्वारभाटा	Tide
ज्वालामुखी	Volcano
इन्द्रधनुष	Rainbow
परिघटना	Phenomena
अन्योन्य क्रिया	Interaction
प्रौद्योगिकी	Technology
प्रेक्षण	Observation
गुणात्मक	Qualitative
मात्रात्मक	Quantitative
पूर्वानुमान	Prediction
प्रतिरूपण	Modelling
सत्यापन	Verification
परिकल्पना	Speculation
अटकलबाजी	Conjecture
यथार्थता	Accuracy
परिशुद्धता	Precision
दीर्घवृत्तीय	Elliptical
सूर्य-केंद्रीय	Heliocentric
ग्रहीय	Planetary
कक्षा	Orbit
प्रकीर्णन	Scattering
पारस्परिक क्रिया	Interplay
खगोलीय	Astronomical
विघटनाभिक, रेडियोऐक्टिव	Radioactive
नाभिक	Nucleus
नाभिकीय संलयन	Nuclear fusion
नाभिकीय विखंडन	Nuclear fission
शृंखला अभिक्रिया	Chain reaction
बंधन ऊर्जा	Binding energy
विलोपन	Annihilation
चिरसम्मत भौतिकी	Classical Physics
संतुलन, साम्यावस्था	Equilibrium
वैद्युतगतिकी, विद्युत्-गतिकी	Electrodynamics
प्रकाशिकी	Optics
ऊष्मागतिकी	Thermodynamics
चुंबकीय क्षेत्र	Magnetic field
निकाय	System
आयनमंडल	Ionosphere
दक्षता	Efficiency
परास	Range

© NCERT not to be republished

दृढ़ पिंड	Rigid body
विद्युत्वाही चालक	Current carrying conductor
मूल कण	Elementary particles
वायु प्रतिरोध	Air resistance
निर्वातित	Evacuated
मुक्त पतन	Free fall
आकाशगंगा	Galaxy
विश्व	Universe
भौतिक राशि	Physical quantity
अनुप्रयुक्त भौतिकी	Applied Physics
मापन	Measurement
सन्निकटन	Approximation
त्वरण	Acceleration
गुरुत्वीय त्वरण	Acceleration due to gravity
प्रतिरोध	Resistance
संचार	Communication
अनुप्रयोग	Applications
आण्विक शस्त्र	Nuclear Weapon
आण्विक शक्ति रिएक्टर	Nuclear power reactor
न्यूट्रॉन-प्रेरित विखंडन	Neutron induced fission
वैकल्पिक ऊर्जा स्रोत	Alternative energy source
जीवाश्मी ईंधन	Fossil fuel
सौर ऊर्जा	Solar energy
भूतापीय ऊर्जा	Geothermal energy
आनुवंशिक अभियांत्रिकी	Genetic engineering
आघात	Impact
चक्रदोला (गोल चक्र)	Merry go round
पेशीय बल	Muscular force
स्पर्शीय बल	Contact force
घर्षण	Friction
कमानी	spring
तनाव	tension
उत्प्लावकता	buoyancy
श्यानता	Viscous force
पृष्ठ तनाव	Surface tension
सूक्ष्म प्रभाव क्षेत्र	Microscopic domain
अंतराण्विक	Intermolecular
अंतरपरमाण्विक	Interatomic
मूल बल	Fundamental force
प्रत्यास्थ बल	Elastic force
व्युत्पन्न बल	Derived force
आनुभविक नियम	Empirical law
अनुक्रमानुपाती	Directly proportional
व्युत्क्रमानुपाती	Inversely proportional
कृत्रिम उपग्रह	Artificial satellites
मंदाकिनीय गुच्छे	Galactic cluster
विजातीय आवेश	Unlike charges
सजातीय आवेश	Like charges
प्रतिकर्षण बल	Repulsive force
आवेशयुक्त संघटन	Charged constituents
तात्क्षणिक	Instantaneous
अभिलंबवत्	Normally
ऊर्ध्वाधर	Vertical
लंबवत्	Perpendicularly
क्षैतिज	Horizontal
माध्यम	Medium
गतिकी	Dynamics
तरंग सिद्धांत	Wave theory
विकिरण	Radiation
ब्राउनी गति	Brownian motion
आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धांत	Special theory of relativity
भौतिकविद्	Physicist
द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता	Mass-energy equivalence
आपेक्षिकता का व्यापक सिद्धांत	General theory of relativity
उद्दीपित उत्सर्जन	Stimulated emission
कृष्णिका	Black body
ब्रह्मांडिकी	Cosmology
स्थूल बोसॉन	Massive boson
क्रांतिक	Critical
उदासीन	Neutral
निरस्त	Cancel
आंतरिक	Intrinsic
उत्सर्जित, निर्गत	Emitted
बोस-आइंस्टाइन सांख्यिकी	Bose-Einstein Statistics
फर्मी-डिरॉक सांख्यिकी	Fermi-Dirac Statistics
मैक्सवैल-बोल्ट्ज़मान सांख्यिकी	Maxwell-Boltzamann Statistics
पाउली अपवर्जन सिद्धांत	Pauli exclusion principle
प्रचक्रण	Spin
अर्धपूर्णांक	Half integer
उच्च ऊर्जा संघट्ट	High energy collision
नाभिकीय प्रक्रिया	Nuclear process
क्षय	Decay
विनिमय	Exchange
संवेग	Momentum
आवेग	Impulse

© NCERT not to be republished

संरक्षण	Conservation
प्रतिक्षेप	Recoil
अनंत	Infinity
यांत्रिक ऊर्जा	Mechanical energy
गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
स्थितिज ऊर्जा	Potential energy
वियुक्त निकाय	Isolated system
ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम	First law of thermodynamics
रूपांतरण	transformation
अभिकारक	Reactant
उत्पाद	Product
अविनाशी	Indestructible
पुनर्व्यवस्था	Rearrangement
ऊष्माक्षेपी	Exothermic
ऊष्माशोषी	Endothermic
द्रव्यमान-क्षति	Mass defect
आंकिक रूप से	Numerically
अदिश	Scalar
सदिश	Vector
रैखिक	Linear
कोणीय	Angular
समता	Parity
विचित्रता	Strangeness
अस्तित्व	Existence
सममिति	Symmetry
समरूप	Identical
स्थानांतरीय	Translational
विस्थापन	Displacement
दिक्काल	Space and time
समदैशिकता	Isotropy
अमूर्त	Abstract
मूर्त	Concrete
मूल मात्रक	Fundamental unit
व्युत्पन्न मात्रक	Derived unit
गुणज (अपवर्त्य)	Multiples
अपवर्तक	Submultiples
पूर्वलग्न	Prefix
ऊष्मागतिक ताप	Thermodynamic temperature
स्वेच्छगृहीत	Arbitraily chosen
लंबन, पैरेलैक्स	Parallax
कोणीय व्यास	Angular diameter
अंतर्ग्रह	Inferior planets
प्रसर कोण	Elongation
खगोलीय मात्रक	Astronomical unit
संसूचक	Detector
संग्रहण	Reception
प्रतिध्वनि	Echo
बाह्य ग्रह	Exterior planets
अर्धदीर्घ अक्ष	Semi major axis
कक्षीय अवधि	Orbital period
विभेदन	Resolution
पुंज	Beam
सुरंगन सूक्ष्मदर्शिका	Tunnelling microscopy
एकीकृत परामाण्वीय द्रव्यमान (संहति) मात्रक	Unified atomic mass unit
जड़त्वीय द्रव्यमान	Inertial mass
गुरुत्वीय द्रव्यमान	Gravitational mass
सार्थक अंक	Significant figures
विमीय सूत्र	Dimensional formulae
विमीय समीकरण	Dimensional equation
यादृच्छिक त्रुटियाँ	Random errors
अल्पत्मांक त्रुटियाँ	Least count error
सुबाह्य	Portable
परिक्रमा, परिक्रमण	Revolution
पथ लंबाई	Path length
संपाती	Coincide
मूल बिंदु	Origin
परिमाण	Magnitude
दिशा	Direction
सरल रेखीय गति	Rectilinear motion
एक-विमीय गति	One dimensional motion
पश्चगामी	Backward
अग्रवर्ती	Forward
ऊर्ध्वगामी, उपरिमुखी	Upward
अधोगामी, अधोमुखी	Downward
तद्नुरूप	Corresponding
औसत वेग	Average velocity
औसत चाल	Average speed
मानक अंकन	Standard notation
प्रवणता	Slope
तात्क्षणिक वेग	Instanteneous velocity
अनंत: सूक्ष्म	Infinitesimally small
संबद्ध	Connecting

© NCERT not to be republished

अवकल गणित	Differential calculus
अवकल गुणांक	Differential coefficient
स्पर्श रेखा	Tangent
सीमांत प्रक्रिया	Limiting process
आंकड़े	Data
यथार्थ व्यंजक	Exact expression
समय का फलन	Function of time
नत समतल	Inclined plane
तात्क्षणिक त्वरण	Instantaneous acceleration
औसत त्वरण	Average acceleration
रोचक लक्षण	Interesting feature
निष्कोण	Smooth
अंकीय औसत	Arithmetic average
विषम अंक	Odd number
क्रमिक अंतराल	Successive interval of time
रोधन दूरी	Stopping distance
ब्रेकिंग दूरियाँ	Braking distances
प्रतिक्रिया काल	Reaction time
उभयनिष्ठ	Common point
परवलय	Parabola
बीजगणित	Algebra
दहन उत्पाद	Products of combustion
नियत दिशा	Constant direction
स्थिर लिफ्ट	Stationary lift
प्रेक्षक	Observer
शुद्ध गतिक	Kinematic
शुद्ध गतिकी	Kinematics
घूर्णन	Rotation
आलेखी विधि	Graphical Method
विश्लेषणात्मक विधि	Analytical method
अदिश गुणनफल	Scalar Product or dot product
सदिश गुणनफल	Vector-product or cross product
प्रक्षेप्य	Projectile
एकसमान वृत्तीय गति	Uniform circular motion
दिशात्मक दृष्टिकोण	Directional aspect
दिक्स्थान	Space
समतल	Plane
परिमाप	Perimeter
परम मान	Absolute value
सदिशों का योग संबंधी-त्रिभुज का नियम	Triangle law of vector-addition
सदिशों का योग संबंधी चतुर्भुज का नियम	Parallelogram law of vector-addition
"शीर्ष एवं पुच्छ" नियम	"Head and Tail" rule
स्थिति सदिश	Position vector
विस्थापन सदिश	Displacement vector
वेग सदिश	Velocity vector
त्वरण सदिश	Acceleration vector
एकांक सदिश	Unit vectors
सदिशों के जोड़ का साहचर्य नियम	Associative law of vector-addition
क्रम-विनिमेय नियम	Commutative law
वितरण का नियम	Distributive law
संपाती	Coincide
समतुल्यता	Equality
शून्येतर	Non-zero
दक्षिणावर्ती नियम	Right hand rule
त्रिकोणमिति	Trigonometry
निर्देशांक	Co-ordinates
उन्नयन कोण	Angle of elevation
अवनमन कोण	Angle of declination
व्यंजक	Expression
ज्या-नियम	Law of sine
कोज्या-नियम	Law of cosine
त्रिज्यीय	Radial
निर्देश-तंत्र	Frame of reference
फलन	Function
समकालिक	Simultaneous
उड्डयन काल	Time of flight
चट्टान	Cliff
अभिकेंद्र बल	Centripetal force
अभिकेंद्र त्वरण	Centripetal acceleration
आवर्त काल	Time period
आवृत्ति	Frequency
कोणीय चाल	Angular speed
खाँचा	Groove
अध्यारोपण	Superposition
गुरुत्वीय विभव	Gravitational potential
भ्रामकता	Fallacy
संवेग संरक्षण	Conservation of momentum
साम्यावस्था	Equilibrium
जड़त्वीय फ्रेम	Inertial frame
छद्म बल	Pseduo-force

© NCERT not to be republished

परिवर्ती	Variable
आनत तल	Inclined plane
अरस्तू	Aristotle
युगांतरीय	Epochal
सार्वभौमिक	Universal
नेट	Net
संघट्ट, टक्कर	Collision
जड़त्व	Inertia
आघूर्ण	Moment
आंतरिक बल	Internal force
सौर परिवार	Solar system
उपग्रह	Satellite
विरूपण	Deformation
युग्म	Pair
अंतरातारकीय	Interstellar space
क्षणिक, क्षण	Instant
प्रत्यास्थ	Elastic
अप्रत्यास्थ	Inelastic
गतिक प्रतिक्रिया	Kinetic reaction
गतिज घर्षण	Kinetic friction
विलगित, वियुक्त, पृथक	Isolated
बहुभुज	Polygon
प्रतिक्षेप, प्रतिक्षिप्त	Recoil
कुंडलित कमानी	Coiled Spring
उत्प्लावन, उत्प्लावकता	Buoyancy
उत्प्लावन बल	Buoyant force
संपीडन	Compression
प्रत्यानयन बल	Restoring force
प्रसर कोण दैर्घ्यवृद्धि	Elongation
श्यान बल	Viscous force
कमानी बल	Spring force
विन्यास, संरूपण	Configuration
अवितान्य	Inextensible
सूक्ष्म, सूक्ष्मदर्शनीय, सूक्ष्मदर्शीय	Microscopic
स्थैतिक घर्षण	Static friction
समुपस्थित गति	Impending motion
गतिक घर्षण	Dynamic friction
सर्पी घर्षण	Sliding friction
सीमांत मान	Limiting value
लोटनिक घर्षण	Rolling friction
बॉल-बेयरिंग	Ball-bearing
स्नेहक	Lubricant
स्नेहन	Lubrication
त्वरित फ्रेम	Accelerated frame
कोरिऑलिस बल	Coriolis force
निरपेक्ष विराम	Absolute rest
तुल्यता	Equivalence
प्रणोद	Thrust
दहनशील गैस	Combustion gas
निष्कासित गैस	Ejected gas
बल निर्देशक आरेख	Free body diagram
व्यापकीकरण	Generalisation
संकुचन	Contraction
आंतरिक ऊर्जा	Internal energy
असंरक्षी	Non-conservative
प्रक्षेप पथ	Trajectory
संरूपण	Configuration
मंदक	Moderator
प्रतिक्षेपहीन उत्सर्जन	Recoilless emission
जालक (लैटिस)	Lattice
कोणीय संवेग	Angular momentum
वामावर्त	Anticlockwise
कोणीय त्वरण	Angular acceleration
क्षेत्रीय वेग	Areal velocity
सममित अक्ष	Axis of symmetry
द्विअंगी निकाय	Binary system
दक्षिणावर्त	Clockwise
बलयुग्म	Couple
केंद्रक	Centroid
आलंब	Fulcrum
गतिपालक चक्र	Fly wheel
पटल	Lamina
उत्तोलक-भुजा	Lever arm
संपर्क रेखा	Line of contact
जड़त्वाघूर्ण	Moment of inertia
अभिविन्यास	Orientation
दृढ़ वस्तु	Rigid body
परिभ्रमण त्रिज्या	Radius of gyration
घूर्णीय गतिज ऊर्जा	Rotational kinetic energy
बल आघूर्ण	Torque
प्रमेय	Theorem
तनाव	Tension
स्पर्श रेखीय	Tangential
अक्षीय घूर्णन	Axial rotation
ऊँचाई	Altitude

© NCERT not to be republished

कृत्रिम	Artificial
शिलाखंड, खंडाश्य	Boulder
कृष्ण विवर	Black hole
कृष्णिका	Black body
रसभरी	Berry
बंधन ऊर्जा	Binding energy
तारामंडल	Constellations
निर्देशांक निकाय	Coordinate system
केंद्राभिमुखी	Centripetal
संप्रेषण	Communication
आंकड़े	Data base
अधिचक्र	Epicycle
दीर्घवृत्त	Ellipse
भूमध्यवर्ती उभार	Equational bulge
पलायन चाल	Escape speed
लिफ्ट	Elevator
नाभि	Foci
भूकेंद्री	Geocentric
भूस्थैतिक	Geostationary
भूसमकालिक	Geosynchronous
अर्धगोलीय	Hemisphere
अतिपरिवलय	Hyperbola
तादम्य	Identity
व्युत्क्रम	Inverse
बृहस्पति	Jupiter
अक्षांश	Latitude
मंगल	Mars
बुध	Mercury
कक्षा	Orbit
आवर्तिता	Periodicity
प्लूटो	Pluto
अध्यारोपण	Superposition
सार्वत्रिक नियम	Universal law
शुक्र	Venus
भारहीनता	Weightlessness
भार	Weight
आंतरिक संरचना	Internal structure
अभिलाक्षणिक गुण	Characteristic properties
इमारती खंड	Building blocks
पृथकन	Separation
अतिव्यापन	Overlapping
घातांक	Power
असार्थक	Inaccurate
तरल यांत्रिकी	Machanics of fluids
वृहदणु	Macromolecule
अंतर्परिक्षिप्त	Inter-dispersed
अक्रिस्टलीय	Amorphous
क्रिस्टलाणु	Crystallite
अंश क्रिस्टलीय ठोस	Semi-crystalline solid
विकृति (अपरूपण)	Strain
उभयनिष्ठ	Common to two
सर्वनिष्ठ	Common to all
चित्रांकन	Picturisation
परीक्षण निदर्श (प्रादर्श)	Experimental sample
भंगुर	Brittle
पराभव बिंदु	Yield point
पराभव सामर्थ्य	Yield strength
चरम सामर्थ्य	Ultimate strength
तनन सामर्थ्य	Tensile strength
आघातवर्ध्य	Ductile
सुघट्य क्षेत्र	Plastic region
प्रत्यास्थ शैथिल्य	Elastic hysteresis
क्रियात्मक	Operational
व्यावर्तन (ऐंठन)	Twist
चल द्रवीय	Hydraulic
मिश्रित	Composite
वायुमंडलीय	Atmospheric
वायुगतिकी	Aerodynamics
बहि:स्राव	Efflux
तुल्यांक	Equivalent
बुलबुला	Bubble
तरल	Fluid
तरलगतिकी	Fluid Dynamics
प्लवन	Floatation
अंशांकित	Calibrated
संपीड्य	Compressible
केशिका	Capillary
युक्ति	Device
गेज़ दाब	Gauge pressure
अघूर्णी	Irrotational
धारारेखी प्रवाह	Streamline flow
पृष्ठ तनाव	Surface tension
पृष्ठ ऊर्जा	Surface energy
प्रक्षोभ	Turbulence

© NCERT not to be republished

अंतिम वेग	Terminal velocity
संरचना	Constitution
विसरण	Diffusion
स्वातंत्र्य-कोटि	Degree of freedom
द्वि-परमाणुक	Diatomic
समविभाजन	Equipartition
परिकल्पना	Hypothesis
अणुक	Molar
एक-परमाणुक	Monatomic
औसतमुक्त पथ	Mean free path
सूक्ष्मदर्शी	Microscope
आविर्भाव	Manifestation
प्रावस्था संक्रमण	Phase transition
बहु-परमाणुक	Polyatomic
पराग कण	Pollen grain
वर्ग-माध्यमूल चाल	Root mean square speed
दृढ़-घूर्णी	Rigid rotator
विशिष्ट ऊष्मा	Specific heat
दूरबीन, दूरदर्शी	Telescope
कंपनीय ऊर्जा	Vibrational energy
टेढ़ा-मेढ़ा	Zig zag
ऊष्मीय	Thermal
ऊष्मा	Heat
परम ताप मापक्रम	Absolute scale of temperature
परम शून्य	Absolute zero
आदर्श गैस	Ideal gas
रेखीय प्रसार गुणांक	Coefficient of linear expansion
आयतन प्रसार गुणांक	Coefficient of volume expansion
प्रतिवेश	Surroundings (of the system)
ऊर्जा के समविभाजन का नियम	Law of equipartition of energy
समतापीय	Isothermal
रुद्धोष्म	Adiabatic
प्रावस्थाएँ	Phases (solid, liquid, gas)
अनंत सूक्ष्म	Infinitesimal
साम्य रेखा	Equilibrium line
यांत्रिक साम्यता	Mechanical equilibrium
ऊष्मीय साम्यता	Thermal equilibrium
सह-अस्तित्व	Co-existence
ऊष्माशय	Reservoir (of heat)
अभिगम	Sink (of heat)
प्रशीतक	Refrigerator
निष्पादन गुणांक	Coefficient of performance
आदर्शीकृत उत्क्रमणीय प्रक्रम	Idealised reversible process
असममिति	Asymmetry
अर्ध स्थिर	Semi-static
अक्षयकारी बल	Conservative force
कार्नो इंजन	Carnot engine
कार्नो चक्र	Carnot cycle
क्षयकारी बल	Dissipative force
सूक्ष्म संघटक	Microscopic constituent
ऊष्माधारिता	Thermal capacity, Heat capacity
ग्राम-अणुक आयतन	Molar volume (22.4 L at STP)
अवशोषित	Absorbed
क्वथनांक	Boiling point
गलनांक	Melting point
ऊष्मारोधी	Heat Insulator
रुद्धोष्म भित्ति (दीवार)	Adiabatic wall
तापमिति	Thermometry
तापयुग्म	Thermocouple
ऊष्मीय प्रसार	Thermal expansion
स्थिर आयतन तापमापी	Constant volume thermometer
असंपीड्यता	Incompressibility
संघनित	Condensed
यंग गुणांक/यंग प्रत्यास्थता गुणांक	Young's Modulus
सन्निकटन	Approximation
ऊष्मीय प्रतिबल	Thermal stress
संपीडन विकृति	Compressive strain
अनुप्रस्थ काट	Cross section
ऊष्मामापी, कैलोरीमीटर	Calorimeter
मोलीय विशिष्ट ऊष्मा	Molar specific heat
तापस्थायी	Thermostat
सुस्पष्ट	Distinct
समताप रेखा	Isotherm
स्थैतिककल्प	Quasi-static
केल्विन मापक्रम	Kelvin scale
समआयतनिक	Isochoric
संचरण	Conduction
संवहन	Convection
विकिरण	Radiation

© NCERT not to be republished

ऊष्मा संचरण	Thermal conduction
ऊष्मा संवहन, संवहन	Thermal convection
ऊष्मा विकिरण	Thermal Radiation
ऊष्मीय संपर्क	Thermal contact
स्थायी अवस्था	Stationary state
ऊष्मा चालकता	Thermal conductivity
ताप प्रवणता	Temperature gradient
उत्सर्जन	Emission
अवशोषण	Absorption
परावर्तन	Reflection
पारगमन	Transmission
अवशोषकता	Absorptivity
उत्सर्जकता	Emissivity
परावर्तकता	Reflectivity
किरखोफ का नियम	Kirchhoff's law
बोल्ट्ज़मान-स्टेफॉन का नियम	Boltzmann-Stefan's law
वीन-विस्थापन नियम	Wein's displacement law
शीतलन	Cooling
दीप कज्जल	Lamp black
उत्तापमापी	Pyrometer
सौर ऊष्मांक	Solar constant
प्रकीरण	Scattered
आवर्ती गति	Periodic motion
सरल आवर्त गति	Simple harmonic motion
अवमंदित गति	Damped motion
प्रणोदित दोलन	Forced oscillations
युग्मित दोलक	Coupled oscillator
गोलक	Bob
कोणांक	Argument
कंपन	Vibration
काल	Period
भूकंपी तरंगें	Seismic wave
वैद्युत चुंबकीय तरंगें	Electromagnetic wave
द्रव्य तरंगें	Matter wave
चर	Variable
संदर्भ (कण)	Reference (particle)
प्रक्षेप	Projection
त्रिज्य (घटक)	Radial (component)
लय, ताल	Rhythm
विस्पंद	Beats
स्वातंत्र्य कोटि	Degree of freedom
विधा	Mode
माडुलन	Modulation
कर्षण	Drag
ऐंठन कोण	Angle of twist
(फूरिये) विश्लेषण	(Fourier) Analysis
अनुप्रस्थ तरंग	Transverse wave
अनुदैर्घ्य तरंग	Longitudinal wave
प्रगामी तरंग	Progressive wave
व्यतिकरण	Interference
दोलन	Oscillation
विक्षोभ	Disturbance
वाक्-तंतु	Vocal cords
अंतर-तारकीय आकाश	Inter-stellar space
सूक्ष्म तरंगें	Microwaves
पराबैंगनी प्रकाश	Ultraviolet light
क्वांटम यांत्रिकीय	Quantum mechanical
आवर्ती दोलन	Harmonic oscillation
स्पंद	Pulse
ज्यावक्रीय फलन	Sinusoidal function
कोज्या वक्र	Cosine curve
अप्रगामी तरंग	Stationary wave
अपरूपण विकृति	Shearing strain
केशिकात्वीय तरंगें	Capillary waves
गुरुत्व तरंगें	Gravity waves
कोणीय तरंग संख्या	Angular wave number
कोणीय आवृत्ति	Angular frequency
कला-कोण	Phase angle
तरंग फलन	Wave function
तरंगदैर्घ्य	Wavelength
गर्त	Trough
शीर्ष, शिखर	Crest
तानित डोरी	Stretched string
आयतन प्रत्यास्थता गुणांक	Bulk modulus
संपोषी व्यतिकरण	Constructive interference
विनाशी व्यतिकरण	Destructive interference
निस्पंद	Nodes
प्रस्पंद	Antinodes
मूल विधा	Fundamental mode
प्रथम गुणावृत्ति	First harmonic
द्वितीय गुणावृत्ति	Second harmonic
गुणावृत्ति श्रेणी	Harmonic series
गुणावृत्ति संख्या	Harmonic number
अनुनाद	Resonance

© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished

© NCERT not to be republished