गणित मंजरी

गणित की पाठ्यपुस्तक

कक्षा
9
भाग 1



0920

© NCERT not to be republished

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

0920 – गणित मंजरी, भाग 1
कक्षा 9 के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक

ISBN 978-93-5729-017-3

प्रथम संस्करण
जून 2026 ज्येष्ठ 1948

PD 300T BS

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 2026

₹ 115.00

एन.सी.ई.आर.टी. वॉटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशन प्रभाग में प्रकाशित तथा राज प्रिंटर्स, ए-9, सेक्टर बी-2, ट्रोनिका सिटी, लोनी, गाजियाबाद (उ.प्र.) 201102 द्वारा मुद्रित।

सर्वाधिकार सुरक्षित

- प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस प्रकाशन के किसी भी भाग को छापना तथा इलैक्ट्रॉनिकी, मशीनी, फोटो प्रतिलिपि, रिकॉर्डिंग अथवा किसी अन्य विधि से पुन: प्रयोग पद्धति द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रचारण वर्जित है।
- इस पुस्तक की बिक्री इस शर्त के साथ की गई है कि प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण अथवा जिल्द के अलावा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी पर, पुनर्विक्रय या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- इस प्रकाशन का सही मूल्य इस पृष्ठ पर मुद्रित है। रबड़ की मुहर अथवा चिपकाई गई पर्ची (स्टिकर) या किसी अन्य विधि द्वारा अंकित कोई भी संशोधित मूल्य गलत है तथा मान्य नहीं होगा।

रा.शै.अ.प्र.प. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
होसकेरे हल्ली एक्सटेंशन,
बनशंकरी स्टेज - 3
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट धनकल बस स्टॉप, पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लेक्स
मालीगाँव
गुवाहाटी 781 021 फोन : 0361-2676869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग : *एम.वी. श्रीनिवासन*

मुख्य संपादक : *बिज्ञान सुतार*

मुख्य व्यापार प्रबंधक : *अमिताभ कुमार*

मुख्य उत्पादन अधिकारी (प्रभारी) : *दीपक जैसवाल*

सहायक उत्पादन अधिकारी : *प्रकाश वीर सिंह*

आवरण
अक्षिता
सज्जा
भुवन इंटरप्राइजेस
चित्रांकन
अक्षिता, भुवन इंटरप्राइजेस और ऋतिका बी.

© NCERT not to be republished

आमुख

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.ई.पी.) 2020 ऐसी शिक्षा प्रणाली की कल्पना करती है जो भारत के सांस्कृतिक और बौद्धिक ज्ञान, मूल्यों और नैतिक परंपराओं में गहराई से निहित है। समृद्ध बौद्धिक विरासत विद्यार्थियों को तेजी से बदलती दुनिया की जटिलताओं और संभावनाओं से सार्थक रूप से जुड़ने में सक्षम बनाती है। *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.-एस.ई.) 2023* इस परिकल्पना को ठोस रूप प्रदान करती है, जिसमें विद्यालयी शिक्षा के विभिन्न स्तरों पर एक सुव्यवस्थित पाठ्यचर्या का मार्ग निर्धारित किया गया है, जो परस्पर जुड़े वैश्विक समाज में विद्यार्थियों को उत्तरदायी नागरिक बनाने के लिए आवश्यक मूल्यों एवं गुणों के साथ-साथ आलोचनात्मक चिंतन, सृजनात्मकता और संवेदनशीलता को पोषित करता है।

शिक्षार्थी बुनियादी, प्रारंभिक और मध्य स्तरों से उत्तीर्ण हो चुके हैं, जहाँ उनकी अंतर्निहित क्षमताओं का समग्र रूप से विकास किया गया है। अब वे चिंतन, तर्क, जिज्ञासा और आत्म-अभिव्यक्ति की बढ़ी हुई क्षमताओं के साथ माध्यमिक स्तर में प्रवेश कर रहे हैं। कक्षा 9 से 12 तक का यह स्तर, विद्यार्थियों के बौद्धिक और व्यक्तिगत विकास का एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण समय होता है। यह उन्हें अमूर्त विचारों, जटिल सामाजिक वास्तविकताओं, नैतिक दुविधाओं और ज्ञान के विस्तृत संसार से जुड़ने के लिए तैयार करता है, साथ ही स्वयं और अपने आस-पास की दुनिया की गहरी समझ को विकसित करता है।

विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 अनुशंसा करती है कि कक्षा 9–10 के लिए पाठ्यक्रम इस प्रकार तैयार किया जाना चाहिए, जो विद्यार्थियों को जीवन में आगे बढ़ने के लिए आवश्यक कौशल प्रदान करे। इस स्तर पर विद्यार्थी इन कौशलों का उपयोग तर्क-वितर्क करने तथा प्रभावी संवाद के लिए कर सकते हैं। इसका उद्देश्य उनकी विश्लेषणात्मक और वर्णनात्मक क्षमताओं को बढ़ाना है जिससे वे भविष्य में आने वाली चुनौतियों और अवसरों के लिए तैयार हो सकें। एक विविध पाठ्यक्रम, जिसमें 10 विषय सम्मिलित हैं, तीन भाषाएँ जिनमें कम-से-कम दो भारतीय भाषाएँ हों, विज्ञान, गणित, सामाजिक विज्ञान, कला शिक्षा, शारीरिक शिक्षा और आरोग्य, समाज में व्यक्ति/पर्यावरण शिक्षा, कौशल शिक्षा और कृत्रिम बुद्धिमता तथा अभिकलनात्मक चिंतन विद्यार्थियों के समग्र विकास को बढ़ावा देता है।

विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 के अनुसार, माध्यमिक स्तर विद्यार्थियों की बौद्धिक तर्कशक्ति के माध्यम से कथन और तर्कों को सिद्ध करने की क्षमता को और विकसित करने पर केंद्रित है। इस स्तर पर विद्यार्थियों से अपेक्षा की जाती है कि वे अमूर्त अवधारणाओं और गणित की मूल तकनीकों एवं अभिकलनात्मक चिंतन जैसे गणितीय प्रतिरूपण और समस्या-समाधान के लिए एल्गोरिदम निर्माण के साथ सहजता से कार्य कर सकें। इसके साथ ही, उन्हें प्रमुख गणितीय कौशलों जिसमें समस्या-समाधान, दृश्यीकरण, अनुकूलन, निरूपण और संप्रेषण सम्मिलित हैं, को भी सशक्त करने की आवश्यकता है, जिससे गणित और अभिकलनात्मक चिंतन में आवश्यक क्षमताएँ विकसित हो सके। पहेलियों, शाब्दिक-समस्याओं और अनुकूलन से जुड़ी गतिविधियों के माध्यम से विद्यार्थियों में दृढ़ता, जिज्ञासा, आत्मविश्वास, सटीकता और ईमानदारी जैसे मूल्यों और स्वभावों को पोषित करने में सहायता मिलती है।

कक्षा 9 की गणित की पाठ्यपुस्तक, *गणित मंजरी (भाग 1)* विद्यार्थियों में गणितीय चिंतन, समस्या-समाधान कौशल और अंतर्ज्ञान को विकसित कर *राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020* और *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023* के दृष्टिकोण को अग्रसर करती है। गणितीय चिंतन में विश्व

© NCERT not to be republished

को देखने-समझने की दृष्टि के लिए व्यवस्थित और तार्किक दृष्टिकोण सम्मिलित होते हैं। इस पाठ्यपुस्तक का उद्देश्य विद्यार्थियों में हल किए जाने योग्य उन सुस्पष्ट समस्याओं को निरूपित और सूत्रित करने की क्षमता विकसित करना है, जिन्हें गणितीय तर्क के माध्यम से हल किया जा सके। यह गणित अधिगम में एक अनिवार्य पहलू है। इससे गणितीय अंतर्ज्ञान को भी बढ़ावा मिलता है, जिससे विद्यार्थियों को गणित में तथ्यों की सही समझ विकसित करने में सहायता मिलती है, जो विद्यालयी शिक्षा का एक प्रमुख लक्ष्य है।

यह पाठ्यपुस्तक गणित के मध्य से माध्यमिक स्तर की ओर एक महत्त्वपूर्ण अंतरण का प्रतीक है। विद्यार्थियों के पूर्व अनुभवों पर आधारित, यह पाठ्यपुस्तक उन्हें अवधारणात्मक ज्ञान, औपचारिक तर्क और प्रमाण के आधारभूत सिद्धांतों से परिचित करवाती है। वास्तविक जीवन के उदाहरणों और सहयोगात्मक शिक्षण अनुभवों के माध्यम से, यह रचनात्मकता, बौद्धिक तर्कशक्ति और निर्णय लेने के कौशल का विकास करती है। यह पाठ्यपुस्तक भारत में गणित के हजारों वर्षों के समृद्ध इतिहास को भी उजागर करती है। भारत और विश्वभर में गणितीय विकास के विषय में जानने से विद्यार्थी अपनी सांस्कृतिक जड़ों से अधिक गहराई से जुड़ सकते हैं। पुस्तक की विषयवस्तु गणित को विज्ञान, सामाजिक विज्ञान जैसे अन्य विषयों और पर्यावरण शिक्षा, मूल्य शिक्षा और समावेशी शिक्षा जैसे परस्पर संबंधित विषयों के साथ एकीकृत करने का प्रयास करती है। इसके अतिरिक्त, क्यू.आर. कोड का समावेशन प्रौद्योगिकी को एकीकृत करता है, जिससे विभिन्न प्रकार के शिक्षण संसाधनों तक पहुँच विकसित होती है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् पाठ्यपुस्तक विकास समूह, विषय विशेषज्ञों, शिक्षाशास्त्रियों, कार्यरत शिक्षकों, समीक्षकों और इस पाठ्यपुस्तक के विकास में सहयोग देने वाले सभी व्यक्तियों के प्रति हार्दिक आभार व्यक्त करती है। हमें आशा है कि *गणित मंजरी* विद्यार्थियों को आलोचनात्मक चिंतन करने, आत्मविश्वास से परिपूर्ण संवाद करने और समाज एवं वैश्विक समुदाय में विचारशील भागीदारी करने के लिए प्रेरित करेगी। हम इसके सभी उपयोगकर्ताओं से सुझावों और प्रतिक्रियाओं का भी हार्दिक स्वागत करते हैं ताकि भविष्य के संस्करणों को और अच्छा बनाया जा सके।

दिनेश प्रसाद सकलानी
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
अप्रैल 2026

© NCERT not to be republished

पुस्तक के विषय में

माध्यमिक स्तर पर गणित विषय, संरचना, प्रतिरूप और तर्क के प्रति विद्यार्थियों की समझ को गहरा करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है, साथ ही यह उनके विचारों को स्पष्ट और सटीक रूप से व्यक्त करने की क्षमता को भी सशक्त करता है। इस स्तर पर गणित विषय केवल परिचित अवधारणाओं तक सीमित नहीं रहता, अपितु यह अवधारणाओं, निरूपण और तर्कों के साथ व्यवस्थित रूप से संबंध स्थापित करता है। यह तार्किक समझ, समस्या-समाधान और बढ़ती हुई अमूर्तता के साथ तर्क करने की क्षमता का विकास करता है, जो न केवल गणित और विज्ञान के आगे के अध्ययन के लिए, अपितु समाज में जागरूक भागीदारी के लिए भी आवश्यक है।

कक्षा 9 की गणित की पाठ्यपुस्तक *गणित मंजरी*, गणित के मध्य से माध्यमिक स्तर की ओर एक महत्त्वपूर्ण अंतरण का प्रतीक है। यह पाठ्यपुस्तक विद्यार्थियों के पूर्व अनुभवों से संबद्धता बनाए रखते हुए अवधारणाओं की अधिक गहराई, औपचारिक तर्क और प्रमाण के आरंभ से परिचय करवाती है। अध्यायों की संरचना इस प्रकार सावधानीपूर्वक की गई है कि अनुक्रमिक अवधारणा निर्माण के माध्यम से यह अंतरण सुगम हो सके, जिससे विद्यार्थी सहज समझ से लेकर अधिक औपचारिक विचारों तक सुसंगत और सार्थक ढंग से प्रगति कर सकें। सभी शिक्षार्थियों के लिए सुलभता सुनिश्चित करने और गहन अन्वेषण के अवसर प्रदान करने हेतु निम्न सीमा-उच्च सीमा (लो थ्रेसहोल्ड-हाई सिलींग) दृष्टिकोण अपनाया गया है।

प्रत्येक अध्याय का प्रारंभ रोचक भूमिका से होता है, जो प्राय: अन्वेषण या वास्तविक जीवन के संदर्भों पर आधारित है जिससे आगे आने वाले विचारों के प्रति रुचि उत्पन्न हो। अवधारणाओं को विभिन्न रूपों—चित्रात्मक, संख्यात्मक, बीजीय और आलेखीय रूप के माध्यम से विकसित किया गया है, जिससे विद्यार्थी गणितीय विचारों को अलग-अलग विधियों से समझने और उनके मध्य सहज रूप से परिवर्तन करने में सक्षम बन सकें। दृश्यात्मकता विशेष रूप से संख्या पद्धति, बीजगणित, अनुक्रम और क्षेत्रमिति जैसे विषयों में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है।

यह पाठ्यपुस्तक उदाहरणों, अभ्यास प्रश्नों, अनुप्रयोग-आधारित अभ्यासों और उच्च स्तरीय चिंतन कौशल की आवश्यकता वाले प्रश्नों की एक विस्तृत शृंखला के माध्यम से सार्थक समस्या-समाधान पर विशेष बल देती है। चयनित प्रश्न विद्यार्थियों को अपने तर्क को समझाने, तर्क-वितर्क करने और धीरे-धीरे औचित्य व प्रमाण के विचारों से जुड़ने के लिए प्रेरित करने हेतु तैयार किए गए हैं। गणनात्मक चिंतन, बौद्धिक तर्कशक्ति और जिज्ञासा को बढ़ावा देने के लिए खेल, पहेलियाँ और अन्वेषी कार्य सम्मिलित किए गए हैं। प्रत्येक अध्याय में कुछ प्रश्नों को तारे के चिह्न (*) से चिह्नित किया गया है। इन प्रश्नों के लिए उच्च स्तरीय चिंतन और गहन तर्क की आवश्यकता होती है और ये उन विद्यार्थियों के लिए बनाए गए हैं जो विषय को और अधिक गहराई से समझना चाहते हैं। इसके अतिरिक्त, कुछ अध्यायों में तारे के चिह्न (*) से चिह्नित खंड दिए गए हैं, जो प्रेरित विद्यार्थियों को विस्तृत अन्वेषण और परियोजना-आधारित कार्य में संलग्न करने के उद्देश्य से तैयार किए गए हैं। इनमें प्रौद्योगिकी-सक्षम अन्वेषण, मुक्तांत प्रश्न और अतिरिक्त पठन सामग्री सम्मिलित है जिससे विद्यार्थियों में स्वतंत्र अन्वेषण और विचारों के साथ गहन संलग्नता की भावना विकसित हो सके।

© NCERT not to be republished

जिन प्रश्नों और अनुभागों को तारे के चिह्न (*) से चिह्नित किया गया है, वे केवल ज्ञानवर्धन के लिए हैं और इनका मूल्यांकन नहीं किया जाएगा अथवा इन्हें परीक्षाओं में सम्मिलित नहीं किया जाएगा।

जहाँ उपयुक्त हो, वहाँ ऐतिहासिक संदर्भ और प्रासंगिक संबंध भी दिए गए हैं जिससे विद्यार्थी गणित को एक मानवीय प्रयास के रूप में समझ सकें, जो समय के साथ और विभिन्न संस्कृतियों में विकसित हुआ है।

इस पाठ्यपुस्तक में आठ अध्याय हैं। इनका उद्देश्य संकल्पनात्मक समझ को सुदृढ़ करना है, साथ ही विद्यार्थियों को बीजगणित और ज्यामिति में अधिक औपचारिक गणितीय तर्क से परिचित करवाना है। पुस्तक निर्देशांक ज्यामिति और संख्या पद्धति से आरंभ करते हुए बहुपद, अनुक्रम और श्रेढ़ियों के माध्यम से बीजगणितीय चिंतन का विकास करती है, जिसमें प्रतिरूप, विभिन्न निरूपण और वास्तविक जीवन के संदर्भों पर विशेष बल दिया गया है। वृत्त के अध्याय के माध्यम से ज्यामिति को ऐतिहासिक और निगमनात्मक दोनों दृष्टिकोणों से प्रस्तुत किया गया है, जिससे बौद्धिक तर्क-वितर्क और प्रमाण की क्षमता विकसित होती है। क्षेत्रमिति अध्याय में द्वि-विमीय आकृतियों का अध्ययन करवाया गया है, जिसमें मापन, सूत्रों की व्युत्पत्ति और दृश्यात्मक समझ को एकीकृत किया गया है। प्रायिकता को अनिश्चितता मापने के एक साधन के रूप में प्रस्तुत किया गया है, जिससे विद्यार्थियों को सरल प्रयोगों, बौद्धिक तर्कशक्ति और वास्तविक जीवन की स्थितियों के माध्यम से संयोगवश होने वाली घटनाओं को समझने और उनका विश्लेषण करने में सहायता मिलती है।

विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 के अनुरूप यह पाठ्यपुस्तक रटने की प्रक्रियाओं के स्थान पर दक्षता-आधारित अधिगम, संकल्पनात्मक सामंजस्य और गणितीय तर्कशक्ति पर बल देती है। यह गणित के विभिन्न क्षेत्रों तथा वास्तविक जीवन के संदर्भों के मध्य संबंध स्थापित करने को प्रोत्साहित करती है और गतिविधियों, अन्वेषणों तथा चर्चा के अवसरों के माध्यम से विविध अधिगम मार्गों का समर्थन करती है। सभी अध्याय मिलकर विषयों के मध्य एकरूपता विकसित करने, निरूपण में दक्षता बढ़ाने और माध्यमिक स्तर पर सहज तर्कशक्ति से औपचारिक गणितीय चिंतन की ओर सुगम अंतरण सुनिश्चित करने का प्रयास करते हैं। अध्यायों में आँकड़ों के विभिन्न रूपों का उपयोग किया गया है। यद्यपि इसे केवल उदाहरण के रूप में सम्मिलित किया गया है।

अध्याय 1, 'स्वयं को प्रवृत्त करना—निर्देशांकों का उपयोग' विद्यार्थियों को कार्तीय समतल से परिचित करवाता है, जिससे वे बिंदुओं का पता लगा सकें, दूरियों और मध्य-बिंदुओं की गणना कर सकें और बीजगणितीय रूप से ज्यामितीय संबंधों का अन्वेषण कर सकें। अध्याय 2, 'रैखिक बहुपदों का परिचय', बीजगणितीय व्यंजकों और रैखिक बहुपदों के प्रति समझ विकसित करता है। इसमें प्रतिरूप, रैखिक संबंध और उनके आलेखीय निरूपण पर विशेष बल दिया गया है। अध्याय 3, 'संख्याओं का संसार', विद्यार्थियों की समझ को पूर्णांकों से लेकर परिमेय और अपरिमेय संख्याओं तक विस्तारित करता है, जिसमें संख्या रेखा निरूपण, परिमेय संख्याओं का घनत्व, अपरिमेयता के प्रमाण और वर्गमूल सर्पिल जैसी दृश्य संरचनाओं पर ध्यान केंद्रित किया गया है। अध्याय 4, 'बीजीय सर्वसमिकाओं का अन्वेषण', सर्वसमिकाओं, गुणनखंडन और व्यंजकों के सरलीकरण की दृश्य और ज्यामितीय व्याख्याओं के माध्यम से बीजीय समझ को गहरा करता है। अध्याय 5, 'मैं हूँ गोल-गोल, ऊपर-नीचे' में वृत्तों, जीवाओं, चापों, कोणों और चक्रीय आकृतियों के गुणों का अन्वेषण किया गया है, जो ज्यामितीय सिद्धांत को वास्तविक संसार के अनुप्रयोगों और सांस्कृतिक संदर्भों से जोड़ता है। अध्याय 6, 'समष्टि मापन—परिमाप और क्षेत्रफल', समतल आकृतियों और वृत्तों के अध्ययन

© NCERT not to be republished

के माध्यम से मापन अवधारणाओं को विकसित करता है, जिसमें ऐतिहासिक विधियों, सूत्रों के व्युत्पत्ति और व्यापकीकरण के विचारों को एकीकृत किया गया है। अध्याय 7, 'संभावनाओं का गणित— प्रायिकता का परिचय', यादृच्छिकता, अनुभवजन्य और सैद्धांतिक प्रायिकता तथा तालिकाओं एवं वृक्ष आरेखों जैसे निरूपणों का परिचय देता है। यह प्रयोगात्मक और अनुकरण-आधारित चिंतन को प्रोत्साहित करता है। अध्याय 8, 'अगले पद का पूर्वानुमान— अनुक्रमों और श्रेढ़ियों का अन्वेषण', अनुक्रमों, अंकगणितीय और ज्यामितीय श्रेढ़ियों तथा पुनरावर्ती नियमों के माध्यम से प्रतिरूपों का अन्वेषण करता है, बीजगणितीय विचारों को दृश्य मॉडल और फ्रैक्टल से जोड़ता है।

यह पाठ्यपुस्तक कक्षा में विभिन्न पृष्ठभूमि के विद्यार्थियों को सहयोग प्रदान करने और चर्चा करने, सहयोग और चिंतन को प्रोत्साहित करने के लिए तैयार की गई है। अध्यायों के मध्य परस्पर संबंध स्थापित करते हुए और अवधारणाओं को क्रमिक रूप से दोहराते हुए यह विद्यार्थियों को गणित को एक सुसंगत और एकीकृत विषय के रूप में देखने में सहायता करती है। सबसे महत्त्वपूर्ण बात यह है कि यह पुस्तक आत्मविश्वास, जिज्ञासा और गणित की शक्ति व सुंदरता के प्रति प्रगतिशील सराहना को विकसित करती है, जिससे उच्च माध्यमिक स्तर की आगे की पढ़ाई के लिए एक सशक्त आधार निर्मित किया जा सके।

शीर्षक *गणित मंजरी* में दो विचार एक साथ समाहित हैं— 'गणित', जो गणित के लिए सदैव विद्यमान रहने वाला शब्द है और 'मंजरी' जिसका अर्थ अनेक भारतीय भाषाओं में 'फूलों का गुलदस्ता' होता है। सुव्यवस्थित और ध्यानपूर्वक एकत्र किए गए फूलों के गुलदस्ते के समान कक्षा 9 की यह पाठ्यपुस्तक गणित के विचारों को संग्रह के रूप में दर्शाती है। गणित का प्रत्येक विषय एक अलग फूल के समान है, जिसका अपना विलक्षण रंग, संरचना और सुगंध है। यह शीर्षक गणित के आकर्षक एवं जीवंत रंगों और रचनात्मक पहलुओं तथा सुंदरता और प्रकृति के साथ इसके गहरे संबंध को दर्शाता है। प्रतिरूप, तर्कशक्ति और अन्वेषण के माध्यम से विद्यार्थी देखेंगे कि गणित हमारे चारों ओर— कला में, प्राकृतिक जगत में और दैनिक जीवन में कैसे खिलता है। हमें आशा है कि *गणित मंजरी* कक्षा 9 और 10 के विद्यार्थियों को गणित को भली-भाँति समझने और इस विचार-मंजरी का अन्वेषण करने के लिए लुभाएगी।

© NCERT not to be republished

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1][**संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य**] बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2][**राष्ट्र की एकता और अखंडता**] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता** बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य" के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) "राष्ट्र की एकता" के स्थान पर प्रतिस्थापित।

राष्ट्रीय पाठ्यक्रम और शिक्षण अधिगम सामग्री समिति (एन.एस.टी.सी.)

1. महेश चंद्र पंत, पूर्व *कुलाधिपति*, राष्ट्रीय शैक्षिक योजना एवं प्रशासन संस्थान (एन.आई.ई.पी.ए.) **(अध्यक्ष)**
2. मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन विश्वविद्यालय **(सह-अध्यक्ष)**
3. सुधा मूर्ति, *अध्यक्ष*, इंफोसिस फाउंडेशन
4. रघुवेंद्र तंवर, *अध्यक्ष*, भारतीय ऐतिहासिक अनुसंधान परिषद्, नई दिल्ली
5. शेखर मांडे, पूर्व *महानिदेशक*, सी.एस.आई.आर. एवं *विशिष्ट आचार्य*, सावित्रीबाई फुले पुणे विश्वविद्यालय, पुणे
6. सुजाता रामदोराई, *आचार्य*, ब्रिटिश कोलंबिया विश्वविद्यालय, कनाडा
7. शंकर महादेवन, *संगीत विशेषज्ञ*, मुंबई
8. यू. विमल कुमार, *निदेशक*, प्रकाश पादुकोण बैडमिंटन अकादमी, बेंगलुरु
9. कामकोटी वीझीनाथन, *निदेशक*, आई.आई.टी. मद्रास, चेन्नई
10. सुरीना राजन, *आई.ए.एस.* (सेवानिवृत्त), हरियाणा एवं पूर्व *महानिदेशक*, एच.आई.पी.ए.
11. चमू कृष्ण शास्त्री, *अध्यक्ष*, भारतीय भाषा समिति, शिक्षा मंत्रालय
12. संजीव सान्याल, *सदस्य*, प्रधानमंत्री की आर्थिक सलाहकार परिषद् (ई.ए.सी.-पी.एम.)
13. आर. वेंकट राव, पूर्व *कुलपति*, राष्ट्रीय विधि विद्यालय भारतीय विश्वविद्यालय (एन.एल.एस.आई. यू.), बेंगलुरु
14. गजानन लोंढे, *प्रमुख*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.
15. रेबिन छेत्री, पूर्व *निदेशक*, एस.सी.ई.आर.टी., सिक्किम
16. प्रत्युष कुमार मंडल, *आचार्य* एवं *संकायाध्यक्ष अनुदेश*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, मैसूरु, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
17. अमरेंद्र प्रसाद बेहरा, *आचार्य* एवं *प्रभारी संयुक्त निदेशक*, सी.आई.ई.टी., रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
18. दिनेश कुमार, *आचार्य* एवं *संकायाध्यक्ष अनुसंधान*, राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
19. कीर्ति कपूर, पूर्व *आचार्य*, भाषा शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली
20. रंजना अरोड़ा, *आचार्य* एवं विभागाध्यक्ष, पाठ्यक्रम अध्ययन और विकास विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली **(सदस्य-सचिव)**

© NCERT not to be republished

भारत का संविधान

भाग-3 (अनुच्छेद 12-35)
(अनिवार्य शर्तों, कुछ अपवादों और युक्तियुक्त निर्बंधन के अधीन)
द्वारा प्रदत्त

मूल अधिकार

समता का अधिकार

- विधि के समक्ष एवं विधियों के समान संरक्षण;
- धर्म, मूलवंश, जाति, लिंग या जन्मस्थान के आधार पर;
- लोक नियोजन के विषय में;
- अस्पृश्यता और उपाधियों का अंत।

स्वातंत्र्य-अधिकार

- अभिव्यक्ति, सम्मेलन, संघ, संचरण, निवास और वृत्ति का स्वातंत्र्य;
- अपराधों के लिए दोष सिद्धि के संबंध में संरक्षण;
- प्राण और दैहिक स्वतंत्रता का संरक्षण;
- छः से चौदह वर्ष की आयु के बच्चों को निःशुल्क एवं अनिवार्य शिक्षा;
- कुछ दशाओं में गिरफ्तारी और निरोध से संरक्षण।

शोषण के विरुद्ध अधिकार

- मानव के दुर्व्यापार और बलात् श्रम का प्रतिषेध;
- परिसंकटमय कार्यों में बालकों के नियोजन का प्रतिषेध।

धर्म की स्वतंत्रता का अधिकार

- अंतःकरण की और धर्म के अबाध रूप से मानने, आचरण और प्रचार की स्वतंत्रता;
- धार्मिक कार्यों के प्रबंध की स्वतंत्रता;
- किसी विशिष्ट धर्म की अभिवृद्धि के लिए करों के संदाय के संबंध में स्वतंत्रता;
- राज्य निधि से पूर्णतः पोषित शिक्षा संस्थाओं में धार्मिक शिक्षा या धार्मिक उपासना में उपस्थित होने के संबंध में स्वतंत्रता।

संस्कृति और शिक्षा संबंधी अधिकार

- अल्पसंख्यक-वर्गों को अपनी भाषा, लिपि या संस्कृति विषयक हितों का संरक्षण;
- अल्पसंख्यक-वर्गों द्वारा अपनी शिक्षा संस्थाओं का स्थापन और प्रशासन।

सांविधानिक उपचारों का अधिकार

- उच्चतम न्यायालय एवं उच्च न्यायालय के निर्देश या आदेश या रिट द्वारा प्रदत्त अधिकारों को प्रवर्तित कराने का उपचार।

पाठ्यपुस्तक निर्माण समूह

सदस्य

अपर्णा लालिंगकर, *निदेशक*, अक्षरब्रह्म कंसल्टेंसी, पुणे

अमर्त्य कुमार दत्ता, *आचार्य*, सांख्यिकी-गणित इकाई, भारतीय सांख्यिकी संस्थान, कोलकाता

आलोक कान्हरे, *परियोजना वैज्ञानिक अधिकारी*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षण केंद्र, मुंबई

आशुतोष केदारनाथ वझलवार, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली— **सी.ए.जी. (गणित) सदस्य-समन्वयक**

उपेंद्र कुलकर्णी, *आचार्य*, इंस्टीट्यूट ऑफ मैथेमेटिकल साइंसेज (आई.एम.एस.सी.), चेन्नई

किरण बर्वे, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान, पुणे

के.वी. सुब्रमण्यम, *आचार्य*, चेन्नई मैथेमेटिकल इंस्टीट्यूट (सी.एम.आई.), चेन्नई

गीतांजलि पाठक, *आचार्य* एवं *विभागाध्यक्ष*, गणित विभाग, एस.पी. महाविद्यालय, पुणे

जोनकी घोष, *आचार्य*, प्रारंभिक शिक्षा विभाग, लेडी श्री राम कॉलेज फॉर वीमेन, दिल्ली विश्वविद्यालय, नई दिल्ली **(दल प्रमुख)**

पतंजलि शर्मा, *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान (आर.आई.ई.), अजमेर

पद्मप्रिया शिराली, पूर्व *प्रधानाचार्य*, सह्याद्रि स्कूल के.एफ.आई., पुणे

बिंदु थिरूमलई, *सहायक संकाय*, नेशनल इंस्टीट्यूट ऑफ एडवांस्ड स्टडीज, बेंगलुरु

मञ्जुल भार्गव, *आचार्य*, प्रिंसटन यूनिवर्सिटी **(सह-अध्यक्ष, एन.एस.टी.सी.)**

मधु बी., *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, मैसूरु

महान एम.जे., *आचार्य*, टाटा मूलभूत अनुसंधान संस्थान (टी.आई.एफ.आर.), मुंबई

माधवन मुकुंद, *निदेशक*, चेन्नई मैथेमेटिकल इंस्टीट्यूट (सी.एम.आई.), चेन्नई— **सी.ए.जी. अध्यक्ष (गणित)**

रश्मी कथूरिया, *शिक्षा अधिकारी*, डी.ए.वी. सेंटर फॉर एकेडमिक एक्सीलेंस, दिल्ली

रामचंदर कृष्णमूर्ति, *प्रधानाचार्य*, अजीम प्रेमजी फांउडेशन, बेंगलुरु

विजयन के., *आचार्य*, पाठ्यचर्या अध्ययन एवं विकास विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

वी.एम. शोलापुरकर, *आचार्य*, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान, पुणे

© NCERT not to be republished

शिवकुमार के.एम., *वरिष्ठ सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

शैलेश ए. शिराली, *निदेशक*, शिक्षक शिक्षा कार्यक्रम, द वैली स्कूल के.एफ.आई., बेंगलुरु **(दल प्रमुख)**

श्रवण एस.के., *वरिष्ठ सलाहकार*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

संजय सिन्हा, *पी.जी.टी.* (गणित), संस्कृति स्कूल, नई दिल्ली

सुजाता रामदोराई, *आचार्य*, ब्रिटिश कोलंबिया विश्वविद्यालय, कनाडा

स्नेहा टाइटस, *मुख्य संपादक*, एट राइट एंगल्स, अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय

सदस्य-समन्वयक (हिंदी संस्करण)

टी.पी. शर्मा, *आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

हिंदी अनुवादक

ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

नंद किशोर वर्मा, *प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत्त), पी.एम. श्री जी.एस.एस. स्कूल, कारौला, गुरुग्राम, हरियाणा

नीरज कुमार, *अनुसंधान अध्येता*, हिंदी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

मेधा, *सहायक आचार्य*, सत्यवती कॉलेज (सायंकालीन), दिल्ली विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

राजेंद्र कुमार गोयल, *अध्यापक* (सेवानिवृत्त), दिल्ली सरकार, दिल्ली

विजय राज सिंह शेखावत, *सहायक निदेशक*, वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग, शिक्षा मंत्रालय, नई दिल्ली

सुधा पाटीदार, *संसाधन विशेषज्ञ*, नई दिल्ली

अनुवाद समीक्षक

वी.पी.सिंह, *आचार्य* (सेवानिवृत्त), विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली

शालिनी अरोड़ा, *टी.जी.टी.* (गणित), राजकीय सर्वोदय कन्या विद्यालय, दिल्ली सरकार, नरेला, दिल्ली

स्वस्ति शर्मा, *वरिष्ठ परामर्शदाता*, कार्यक्रम कार्यालय, एन.एस.टी.सी.

© NCERT not to be republished

आभार

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद् (रा.शै.अ.प्र.प.) इस पाठ्यपुस्तक के विकास में अंतर्विषयक विषयों पर मार्गदर्शन और सहयोग के लिए पाठ्यचर्या क्षेत्र समूह (सी.ए.जी.) के सम्मानित अध्यक्ष तथा गणित के सदस्यों एवं अन्य संबंधित सी.ए.जी. के प्रति आभार व्यक्त करती है। इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण के दौरान विभिन्न कार्यशालाओं का आयोजन किया गया और विभिन्न संस्थानों के विषय विशेषज्ञों को आमंत्रित किया गया। रा.शै.अ.प्र.प. विषय विशेषज्ञों— बीना प्रकाश, वरिष्ठ *पी.जी.टी.* (गणित), कैंपियन स्कूल, भोपाल; गीतांजलि शर्मा, *टी.जी.टी. (*गणित), केंद्रीय विद्यालय जनकपुरी, नई दिल्ली; तनुजा नेगी, *टी.जी.टी.* (गणित), केंद्रीय विद्यालय तुगलकाबाद, नई दिल्ली; साई वेंकटेश, *शिक्षक*, द ब्रिटिश स्कूल, नई दिल्ली; छवि गुप्ता, *टी.जी.टी.* (गणित), जी.जी.एस.एस.एस., स्कूल ब्लॉक, शकुरपुर, नई दिल्ली; दीपिका, *टी.जी.टी.* (गणित), एस.वी. एफयू पीतमपुरा, नई दिल्ली; आलोक आनंद, *टी.जी.टी.* (गणित), पीएम श्री केंद्रीय विद्यालय एन.एम.आर. जे.एन.यू., नई दिल्ली; बैद्यनाथ झा, *टी.जी.टी.*, सैनिक विद्यालय कुंजपुरा, करनाल, हरियाणा; मनोज कुमार झा, *पी.जी.टी.* (गणित), जे.एन.वी., दक्षिण अंडमान; उमेश राव, *टी.जी.टी.* (गणित), जे.एन.वी. मोथुका, फरीदाबाद; संगीता यादव, *पी.जी.टी.* और अकादमिक प्रमुख, सेंट जोसेफ कॉन्वेंट सीनियर सेकेंडरी स्कूल, भोपाल; दीक्षा मल्होत्रा, *वरिष्ठ शिक्षिका* (गणित), शिव नादर स्कूल, गुरुग्राम; राहुल सोफत, *विभागाध्यक्ष*, गणित विभाग, वायु सेना स्वर्ण जयंती संस्थान, नई दिल्ली; ऋषिकेश कुमार, *सहायक आचार्य*, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली; श्रीराम चौथाईवाले, *व्याख्याता* (सेवानिवृत्त), अमोलकचंद कॉलेज, यवतमाल द्वारा दिए गए बहुमूल्य विचारों और सुझावों के लिए उनका आभार व्यक्त करती है।

परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण के दौरान विभिन्न चरणों में प्राप्त उनकी महत्त्वपूर्ण टिप्पणियों और सुझावों के लिए अजीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के *आचार्य* आर. रामानुजम के प्रति गहरी कृतज्ञता व्यक्त करती है।

परिषद् पी.सी. अग्रवाल, *आचार्य* एवं *संयुक्त निदेशक*, रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पाठ्यसामग्री में सुधार हेतु दिए गए सुझावों एवं पाठ्यपुस्तक निर्माण के दौरान अकादमिक सहयोग देने के लिए उनका धन्यवाद देती है।

हम पाठ्यक्रम विकास प्रक्रिया में अपना योगदान देने के लिए आदित्य कर्नाटकी; *सहायक आचार्य*, सी.एम.आई., चेन्नई; प्रसाद जयंती, *आचार्य*, डार्टमाउथ कॉलेज, अमेरिका; सौरभ कपूर, *सहायक आचार्य*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भुवनेश्वर की सराहना करते है।

परिषद्, पाठ्यपुस्तक के विकास में सहयोग प्रदान करने के लिए नजराना खान और डिंपल, *वरिष्ठ अनुसंधान सहयोगी*; मानवेन्द्र प्रताप सिंह राठौर, जेबा प्रविन और चेतना सिंह, *कनिष्ठ परियोजना अध्येता*; विशाल शर्मा, अभिलाष शुक्ला, *डी.टी.पी. ऑपरेटर,* विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प. के योगदानों की सराहना करती है।

टाइपसेटिंग प्रक्रिया के समन्वय में योगदान देने के लिए परिषद् मनोज पुरी, *व्याख्याता* (गणित), डी.आई.ई.टी. डिंग, सिरसा, हरियाणा; विम्मी गोयल, *पी.जी.टी.* (गणित), जी.एस.एस.एस. छत्तरगढ़ पट्टी, सिरसा, हरियाणा; और एच.एस. शारदा, *सहायक शिक्षिका*, गवर्नमेंट हाई स्कूल, एम.सी. थललू,

© NCERT not to be republished

मैसूरु, कर्नाटक के अथक योगदान को स्वीकार करती है। परिषद् इस दल के गठन में सहयोग देने के लिए सुनील बजाज, *अतिरिक्त निदेशक,* एस.सी.ई.आर.टी., हरियाणा, गुरुग्राम के प्रयासों को भी सराहती है।

सुनीता फरक्या, *आचार्य* और *विभागाध्यक्ष,* विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग, रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली के शैक्षणिक और प्रशासनिक सहयोग के लिए आभार व्यक्त किया जाता है।

परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के संपादन के लिए प्रकाशन प्रभाग के सदस्यों दिनेश वशिष्ट, *संपादक* (संविदा); मोहन शर्मा और कहकशा, *सहायक संपादक* (संविदा) तथा प्रूफ-संशोधन के लिए श्रेया गुप्ता, प्रज्ञा दुबे, राहिल अंसारी, आफरीन, प्रियंका और मुंशी रजा, *प्रूफरीडर* (संविदा) का आभार व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्यपुस्तक को प्रकाशन हेतु अंतिम रूप देने के लिए पवन कुमार बरियार, *प्रभारी,* डी.टी.पी. प्रकोष्ठ; विपन कुमार शर्मा, बिट्टू कुमार महतो, विवेक राजपूत, उपासना, मनोज कुमार और किशोर सिंघल, *डी.टी.पी. ऑपरेटर* (संविदा) के प्रयासों की भी सराहना करती है।

© NCERT not to be republished

शिक्षकों के लिए शब्द

कक्षा 9 की गणित की पाठ्यपुस्तक *गणित मंजरी* के निर्माण का उद्देश्य माध्यमिक विद्यालय से उच्च माध्यमिक विद्यालय में विद्यार्थियों के अंतरण के दौरान गणित विषय की उनकी समझ को आगे बढ़ाने में मार्गदर्शन प्रदान करना है। यह वह स्तर है जहाँ अवधारणाएँ अधिक हो जाती हैं और तर्क, प्रामाणिकता और अवधारणाओं के मध्य संबंध अधिक महत्त्वपूर्ण हो जाते हैं। इस स्तर पर गणित अधिगम के दौरान केवल प्रक्रियाओं का पालन करने से आगे बढ़कर अंतर्निहित संरचना, संबंधों और निरूपणों को समझाने की ओर भी ध्यान देना चाहिए।

कक्षाओं में प्रतिरूपों का अन्वेषण, अनुमान कौशल, परीक्षण हेतु उदाहरण, दावों को सिद्ध करने और वैकल्पिक दृष्टिकोणों पर चर्चा करने को सम्मिलित कर विद्यार्थियों के विचारों से सक्रिय रूप से जुड़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाए। ये सभी गणितीय चिंतन विकसित करने के लिए आवश्यक हैं। इन कक्षाओं में विद्यार्थियों को नियमित रूप से तर्क करने, वाद-विवाद में सम्मिलित होने और अपने विचारों को मौखिक व लिखित रूप में संप्रेषित करने के अवसर दिए जाने चाहिए। इस प्रकार के अभ्यास दर्शाते हैं कि गणित स्वयं किस प्रकार विकसित होता है और ये अभ्यास गणित विषय को नियमों व गणितीय सिद्धांतों का संग्रह मान लेने के स्थान पर एक सार्थक और परस्पर संबंधित विषय के रूप में देखने में विद्यार्थियों की सहायता करते हैं।

इस परिवेश का निर्माण करने के लिए किसी जटिल व्यवस्था की आवश्यकता नहीं होती है। सोच-समझकर प्रश्न करना, पूछताछ व समाधान के अनेक विधियों को प्रोत्साहित करना और चर्चा एवं चिंतन के लिए पर्याप्त समय देना कक्षा शिक्षण को अधिक प्रभावशाली बना सकता है। कक्षा में ऐसी संस्कृति का विकास करना भी उतना ही महत्त्वपूर्ण है जिसमें गलतियों को सीखने के अवसरों के रूप में देखा जाए और विचारों को भली-भाँति परिष्कृत किया जाए। इस पुस्तक में 'सोचिए और विचार कीजिए' नाम से एक नई विशेष गतिविधि को सम्मिलित किया गया है। अध्यायों की विषयवस्तु को पढ़ाते समय इस प्रकार के प्रश्न आपको विद्यार्थियों को कक्षा में सम्मिलित करने, किसी भी नए विचार को गहराई से समझने और पूरी कक्षा में चर्चा को सरल व सुगम बनाने में सहायक होंगे।

चूँकि इस स्तर पर गणितीय औचित्य और प्रमाण की भूमिका अधिक महत्त्वपूर्ण होती जाती है, इसलिए विद्यार्थियों पर अनावश्यक दबाव डाले बिना परिणामों की सत्यता की परख को समझाने की दिशा में उनका मार्गदर्शन करना चाहिए। प्रयोगों को प्रोत्साहित करना, उदाहरणों और प्रत्युदाहरण का उपयोग करना और सहज तर्कशक्ति का उपयोग करना औपचारिक तर्कों की ओर प्रगति में सहायक सिद्ध हो सकता है।

इस पाठ्यपुस्तक में विभिन्न प्रकार की समस्याओं या परिस्थितियाँ को सम्मिलित किया गया है जो अन्वेषण, तर्कशक्ति और अवधारणाओं के सुदृढ़ीकरण को प्रोत्साहित करने के लिए बनाई गई हैं। यदि सभी प्रकार की समस्याओं को यांत्रिक रूप से हल करने का प्रयास गहन संलग्नता के अवसरों को बाधित करता है तो इससे बचना चाहिए। समस्याओं को अध्यायों के मध्य में आई प्रश्नावलियों के साथ-साथ अध्याय के अंत में दी गई अंतिम प्रश्नावली में भी सम्मिलित किया गया हैं। अभ्यास प्रश्न प्रत्येक खंड के बाद दिए गए हैं, जो विद्यार्थी को अवधारणा को समझने और उसका उचित उपयोग करने के साथ-साथ आवश्यक प्रक्रियात्मक दक्षता प्राप्त करने में भी सक्षम बनाते हैं।

अध्याय की 'अंतिम प्रश्नावली' में अध्याय की अवधारणाओं से संबंधित प्रश्नों को सम्मिलित किया गया है और इसका उद्देश्य विकसित अवधारणाओं और कौशल को सुदृढ़ करने में विद्याथियों की सहायता करना है। इसके अतिरिक्त कुछ प्रश्नों को तारांकित (*) किया गया है। इस प्रकार के प्रश्नों के लिए उच्च स्तरीय चिंतन और गहन तर्कशक्ति की आवश्यकता होती है और यह अनुशंसा की जाती है कि कक्षा में

© NCERT not to be republished

विद्यार्थियों को इन प्रश्नों या समस्याओं पर चर्चा करने और इन्हें हल करने के लिए कुछ समय दिया जाए, भले ही इन्हें मूल्यांकन के दौरान सम्मिलित न किया जाए और परीक्षाओं में न पूछा जाए।

विद्यार्थियों को एक स्वतंत्र शिक्षार्थी बनाने पर भी बल दिया गया है। इस स्तर पर गणितीय पाठ पढ़ना, परिभाषाओं की व्याख्या करना और हल किए गए उदाहरणों को अच्छे से समझना महत्त्वपूर्ण कौशल हैं। विद्यार्थियों को पाठ्यपुस्तक को स्वतंत्र रूप से पढ़ने और अपनी व्याख्याओं पर चर्चा करने हेतु प्रोत्साहन देकर उन्हें गणितीय भाषा से जुड़ने और आत्मविश्वास प्राप्त करने में सहायता मिल सकती है। कुछ अध्यायों के अंत में दी गई अतिरिक्त सामग्री उन विद्यार्थियों के लिए है जो इस स्तर पर आवश्यक ज्ञान से अलग अध्यायों के विचारों का अन्वेषण करने के लिए प्रेरित होते हैं। इस सामग्री का उद्देश्य गहन जुड़ाव और जिज्ञासा को प्रोत्साहित करना है। यह औपचारिक मूल्यांकन का अंग नहीं होगी।

अंत में, इस पुस्तक में ऐसे विचार और दृष्टिकोण सम्मिलित है जो कि शिक्षकों के लिए भी नए या चुनौतीपूर्ण हो सकते हैं। यदि कुछ पहलुओं पर चिंतन और गहन अन्वेषण की आवश्यकता हो तो यह पूरी तरह से स्वीकार्य है। कक्षा में ऐसे विचारों पर चर्चा आरंभ करना और सह-शिक्षार्थी के रूप में उन पर विचार करना बौद्धिक जिज्ञासा और दृढ़ता को प्रोत्साहित कर सकता है, जो विद्यार्थियों के लिए एक सशक्त उदाहरण स्थापित करेगा।

प्रमुख बिंदुओं का सारांश

अन्वेषण का समय

- नियमित रूप से ऐसे प्रश्न, समस्याएँ और चुनौतियाँ प्रस्तुत करें, जो तर्कशक्ति और चर्चा को प्रोत्साहित करें।
- व्यक्तिगत और सामूहिक रूप से अन्वेषण के लिए पर्याप्त समय दें।
- ऐसा वातावरण बनाएँ जहाँ गलतियों को सीखने की प्रक्रिया का एक अभिन्न अंग माना जाए।

पुस्तक में उपस्थित समस्याओं के विषय में

- अन्वेक्षण आधारित पूर्ण समस्याओं का उद्देश्य वैचारिक समझ को गहरा करना और साथ ही प्रक्रियात्मक दक्षता को प्रोत्साहन देना है।
- समस्या की मात्रा की तुलना में विषय के साथ गहन जुड़ाव को प्राथमिकता दी जानी चाहिए।

पढ़ना और संचार करना

- विद्यार्थियों को गणितीय अवधारणाओं को पढ़ने, उनकी व्याख्या करने और उन्हें अपने शब्दों में व्यक्त करने के लिए प्रेरित करें।
- विचार-विमर्श (चर्चा) को प्रोत्साहन देने से स्पष्ट चिंतन करने और गणितीय भाषा का निर्माण करने में सहायता मिलती है।

न जानने का अधिकार

- कुछ विचार शायद तुरंत स्पष्ट न हों, यह गणित सीखने का एक स्वाभाविक अंग है।
- अनिश्चितता को विद्यार्थियों और शिक्षकों दोनों के लिए पूछताछ और चर्चा के आरंभिक बिंदु के रूप में लें।

© NCERT not to be republished

विद्यार्थियों के लिए शब्द

कक्षा 9 में गणित सीखने की अपनी यात्रा आरंभ करते समय, यह याद रखना आवश्यक होगा कि गणित विषय दूर से सीखने की चीज नहीं है अपितु यह एक ऐसी चीज है जिसे सक्रिय रूप से इसमें सम्मिलित होकर सीखा जाता है। वास्तविक समझ प्रश्न पूछने, विचारों का अन्वेषण करने और कभी-कभी उनसे जूझने से आती है, ठीक वैसे ही जैसे एक जासूस किसी पहेली (उलझन) को सुलझाता है।

इस पुस्तक को पढ़ते समय, आपको नए विचार, अपरिचित निरूपण और ऐसे प्रश्न भी मिलेंगे, जिनके उत्तर तुरंत न मिलें। ऐसा होने पर रुकें और सोचें। उदाहरणों को हल करने का प्रयास करें, प्रतिरूप ढूढ़ें, चित्र बनाएँ, अपने सहपाठियों से चर्चा करें और अपने तर्क को समझाने का प्रयास करें। ये प्रक्रियाएँ इस स्तर पर गणित सीखने के लिए अत्यंत महत्त्वपूर्ण हैं।

पुस्तक में कुछ प्रश्नों के साथ उत्तर या संकेत भी दिए गए होंगे, फिर भी आपको पहले स्वयं या सहपाठियों के साथ मिलकर प्रश्नों को हल करने का प्रयास करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। किसी प्रश्न को हल करने के लिए आप उसमें जितना समय लगाएँगे और जितना अधिक प्रयास करेंगे, उतनी ही आपकी समझ गहरी होगी और सीखने का अनुभव अधिक सार्थक बनेगा।

आपको पाठ्यपुस्तक में स्थान-स्थान पर 'सोचिए और विचार कीजिए' वाले प्रश्न मिलेंगे। ये प्रश्न गहन चिंतन और खोजबीन का अवसर प्रदान करते हैं। कुछ प्रश्न सहपाठियों के साथ चर्चा के लिए दिए गए हैं जबकि अन्य रचनात्मक या गहन चिंतन को प्रेरित करते हैं। इन प्रश्नों पर गंभीरता से विचार करने से आपको गणितीय सोच में आत्मविश्वास और लचीलापन विकसित करने में सहायता मिलेगी। इस स्तर पर आपको ऐसी व्याख्याएँ और तर्क भी मिलेंगे, जो यह समझाते हैं कि कोई चीज क्या है की अपेक्षा वह कैसे कार्य करती है। इसे समझने में समय लगे तो चिंता न करें— चिंतन और चर्चा के माध्यम से समझ धीरे-धीरे विकसित होती है।

सबसे महत्त्वपूर्ण बात यह है कि किसी भी बात को तुरंत न समझ पाना बिल्कुल सामान्य है। गणित लगन, जिज्ञासा और गहन चिंतन के माध्यम से ही सीखा जा सकता है। चीजों को समझने की प्रक्रिया का आनंद लें और गणितज्ञ के रूप में विकसित होने के लिए स्वयं को सोचने के लिए समय दें।

© NCERT not to be republished

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके; और

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।

विषय-सूची

आमुख *iii*

पुस्तक के विषय में *v*

अध्याय 1

स्वयं को प्रवृत्त करना — निर्देशांकों का उपयोग 1

अध्याय 2

रैखिक बहुपदों का परिचय 16

अध्याय 3

संख्याओं का संसार 41

अध्याय 4

बीजीय सर्वसमिकाओं का अन्वेषण 68

अध्याय 5

मैं हूँ गोल-गोल, ऊपर-नीचे 92

अध्याय 6

समष्टि मापन — परिमाप और क्षेत्रफल 118

अध्याय 7

संभावनाओं का गणित — प्रायिकता का परिचय 155

अध्याय 8

अगले पद का पूर्वानुमान — अनुक्रमों और श्रेढ़ियों का अन्वेषण 174

आलेख पत्रक *197*

© NCERT not to be republished

भारत में गणित

यथा शिखा मयूराणां, नागानां मणयो तथा।
तद्वद् वेदाङ्गशास्त्राणां, गणितं मूर्धनि स्थितम्॥

Yathā śikhā mayūrāṇāṁ, nāgānāṁ maṇayo tathā।
Tadvad vedāṅgaśāstrāṇāṁ, gaṇitaṁ mūrdhani sthitam॥

जैसे मोर के सिर पर कलगी होती है, जैसे साँप के सिर पर मणि होती है,
वैसे ही गणित भी समस्त ज्ञान के शिखर पर विराजमान है।

यह *वेदांग ज्योतिष*, जो खगोल विज्ञान के सबसे प्राचीन ग्रंथों में से एक है और सहस्रों वर्ष पुराना है, का एक श्लोक है।

© NCERT not to be republished

1 स्वयं को प्रवृत्त करना — निर्देशांकों का उपयोग

0920CH01

1.1 भूमिका

निर्देशांकों की पद्धति एक सुसंगठित रूपरेखा है (जैसे कि एक मानचित्र अथवा आलेख पत्रक पर जाल रेखाएँ) जो हमें वस्तुओं अथवा बिंदुओं की वास्तविक भौतिक स्थितियों की व्याख्या हेतु संख्याओं के उपयोग के लिए सक्षम बनाती है।

'जाल आधारित चिंतन' और समष्टि (स्पेस) में बिंदुओं की स्थितियों को परिभाषित करने हेतु ज्यामिति की अवधारणा की गहरी जड़ें भारत में निहित हैं। जाल का प्रथम सुव्यवस्थित उपयोग हजारों वर्ष पूर्व सिंधु-सरस्वती सभ्यता में व्यापक नगरीय स्तर पर अस्तित्व में आया था, जहाँ नगर की गलियाँ समान रूप से लगभग 10 मीटर की दूरी पर उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम दिशा में अद्भुत सटीकता के साथ निर्मित की गई थीं। वस्तुतः यह एक व्यावहारिक निर्देशांक पद्धति थी— कोई व्यापारी नगर के केंद्र से उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम दिशाओं में दूरी की इकाइयों की गणना करके किसी दुकान अथवा गोदाम की स्थिति का पता लगा सकता था। जैसा कि हमने देखा है, बौधायन (लगभग 800 सामान्य संवत) ने कालांतर में उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम रेखाओं का उपयोग अपनी गहन ज्यामितीय संरचनाओं के लिए और बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय को विकसित करने में किया और इस प्रकार निर्देशांक ज्यामिति की आधारशिला रखी गई।

पृथ्वी की सतह पर निर्देशांकों को सुनिश्चित करना कालांतर में नौचालन (नौ-गमन) के लिए महत्वपूर्ण हो गया। उज्जयिनी का उल्लेख प्राचीन विश्व में कम-से-कम चौथी शताब्दी सामान्य संवत पूर्व के प्रारंभिक सिद्धांतों में स्थितियों को निर्धारित करने वाली केंद्रीय देशांतर मध्याह्न रेखा के रूप में मिलता है जिसके सापेक्ष अन्य सभी भौगोलिक स्थितियाँ मापी जाती थीं। ग्रीक गणितज्ञ टॉलेमी (लगभग 150 सामान्य संवत पूर्व) ने हिप्पार्कस सहित अन्य पूर्ववर्तियों के कार्यों की आधारशिला पर आगे चलकर हजारों स्थितियों के अक्षांशों और देशांतरों का वर्णन किया, जिसमें 'ओजीन' (उज्जयिनी) भी सम्मिलित था। आर्यभट्ट (लगभग 499 सामान्य संवत) ने ग्रीक 'कॉर्ड्स' के स्थान पर ज्या (sines) का उपयोग किया, जिससे एक नगर अथवा एक तारे के निर्देशांकों की गणना अपेक्षाकृत सरल हो गई। उन्होंने खगोलीय निर्देशांकों का उपयोग करके आकाश के मानचित्र की रूपरेखा खींची, जिसमें निर्देशांकीय दूरियाँ क्रांतिवृत्त (सूर्यपथ) से मापीं।

ब्रह्मगुप्त (लगभग 628 सामान्य संवत) ने शून्य और ऋणात्मक संख्याओं की संकल्पना तथा उनके उपयोग को बीजगणितीय इकाइयों के रूप में प्रस्तुत किया; आधुनिक निर्देशांकीय प्रणाली में 'मूलबिंदु' शून्य होता है और 'ऋणात्मक अक्ष' शून्य से कम मानों को प्रदर्शित करता है। ब्रह्मगुप्त के इन योगदानों के बिना चार-चतुर्थांशी कार्तीय तल का अध्ययन जिसे हम इस अध्याय में पढ़ेंगे, असंभव होता।

© NCERT not to be republished

ब्रह्मगुप्त की कृतियों का अनुवाद अरबी (सिंधहिंद के रूप में) में किया गया था और इस प्रकार उज्जयिनी मध्याह्न रेखा का प्रवेश अरबी भूगोल में हुआ, जहाँ उसे 'अरिन' के नाम से संबोधित किया गया और इसने प्रारंभिक अरबी मानचित्रों के लिए शून्य देशांतर संदर्भ के रूप में कार्य किया। तब इन मानचित्रों में ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग भी होता था। प्रभावशाली अरब विद्वान अल-बिरुनी (लगभग 1000 सामान्य संवत) ने भारत की यात्रा की और सिद्धांतों का अध्ययन किया और समस्त एशिया में स्थित विभिन्न नगरों की निर्देशांकीय स्थितियों की गणना करने के लिए भारतीय त्रिकोणमितीय विधियों का उपयोग किया। अल-बिरुनी ने कालांतर में एक हस्त संचालित उपकरण 'तारा स्थिति दर्शक' (ऐस्ट्रोलेब) के विकास में भी योगदान दिया, जिसकी सहायता से नाविक तारों के माध्यम से अपनी निर्देशांकीय स्थिति का पता लगाते थे। उमर खय्याम (लगभग 1100 सामान्य संवत), जो भारतीय दशमलव प्रणाली और औपचारिक बीजगणितीय पद्धति के विशेषज्ञ थे, वे ऐसे प्रथम गणितज्ञ थे, जिन्होंने बीजगणितीय समस्याओं के समाधान के लिए ज्यामिति का उपयोग किया, जिसमें उन्होंने इन समस्याओं की व्याख्या समतल पर निर्देशांकों के पदों में की।

अंतत: ये संकल्पनाएँ बारहवीं शताब्दी में यूरोप पहुँची। इसमें अंतत: व्यापक प्रगति तब देखी गई जब फर्मेट (1636 सामान्य संवत) के कार्यों का अनुसरण करते हुए रेने देकार्त (1637 सामान्य संवत) ने इस तथ्य को विधिवत रूप से प्रस्तुत किया कि एक द्वि-विमीय तल में किसी बिंदु को सरल रूप में दो संख्याओं के माध्यम से परिभाषित किया जा सकता है, जो दो लंबवत अक्षों से बिंदु की दूरियों को प्रदर्शित करती हैं। बिंदुओं को और अधिक जटिल ज्यामितीय आकृतियों को बीजगणित और समीकरणों का उपयोग करके सटीक रूप से वर्णित किया जा सकता था। इस प्रकार ज्यामिति और बीजगणित के क्षेत्र को और भी अधिक निकट लाया गया।

कक्षा 9 और 10 में आपको इस अद्भुत निर्देशांक प्रणाली के अध्ययन का अवसर प्राप्त होगा, जिसका मानवीय वैचारिक प्रक्रिया और प्रयासों में समृद्धशाली इतिहास रहा है। आप वस्तुओं की स्थिति का अत्यंत सटीकता से पता लगाने में सक्षम हो सकेंगे। आप यह भी देख सकेंगे कि कैसे निर्देशांकों का उपयोग हमें बीजगणितीय समीकरणों को ज्यामितीय आकृतियों और विलोमत: ज्यामितीय आकृतियों को बीजगणितीय समीकरणों में परिकल्पित करने में समर्थ बनाता है।

हम निर्देशांकों के अध्ययन का आरंभ एक कहानी से करेंगे, जो आपको इन पारिभाषिक शब्दावलियों को अपेक्षाकृत व्यवस्थित और सुसंगत विधि से समझने में सहायता करेगी।

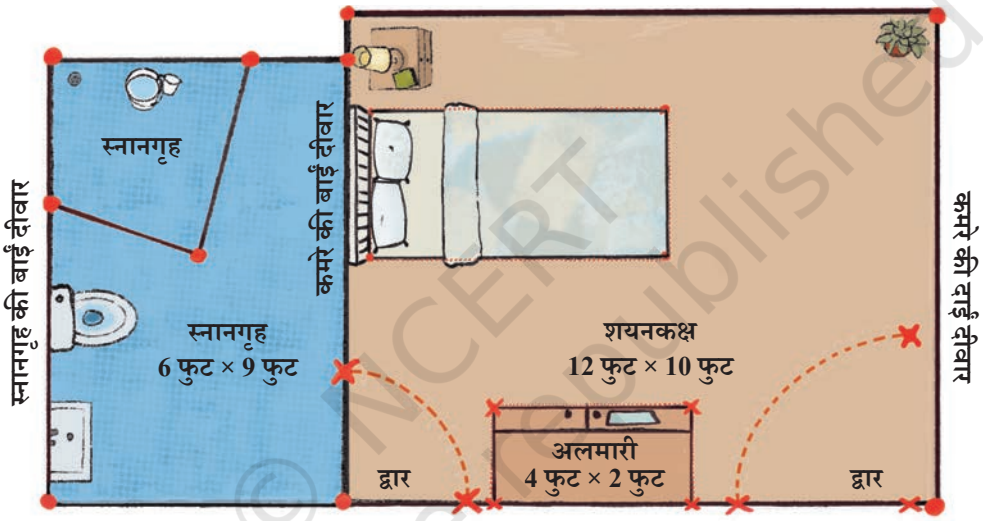
1.2 विषय प्रवेश

यह अकादमिक वर्ष का शुभारंभ है और रियान रोमांचित और असहज अनुभव कर रहा है। उसका परिवार अभी-अभी एक नए शहर में स्थानांतरित हुआ है। वह और उसकी बहन शालिनी एक नए विद्यालय जाएँगे। आज शालिनी उसे एक नए वातावरण में समायोजित होने में सहायता करेगी। यदि कोई दृष्टिबाधित है तो यह निश्चित रूप से उसके लिए एक बड़ी चुनौती होगी, किंतु माँ की स्थानांतरणीय नौकरी के कारण ये भाई-बहन प्राय: ऐसा करते रहे हैं और प्रत्येक स्थानांतरण के साथ यह समायोजन अपेक्षाकृत अधिक सरल होता गया है।

© NCERT not to be republished

शालिनी ने अभी-अभी कक्षा 9 उत्तीर्ण की है और इस बार उसने रियान के मार्गदर्शन के लिए निर्देशांक ज्यामिति को व्यवहार में लाने का निर्णय लिया है, जिसका अध्ययन उसने अपनी गणित की कक्षा में किया था।

शालिनी यह चाहती थी कि रियान दिशाओं का अनुभव करे, इसके लिए उसने एक आयताकार जाल का उपयोग किया, जिस पर उसने कुछ पिन और धागों को व्यवस्थित किया। यह व्यवस्था कमरे के तल को प्रदर्शित करती थी। रेखाचित्र में बिंदुओं को अंकित करने के लिए पिनों का उपयोग किया गया था। शालिनी 1 सेंटीमीटर : 1 फुट के पैमाने को उपयोग में ला रही थी। उसने कमरे के विभिन्न प्रमुख बिंदुओं को चिह्नित करने के लिए पिन का उपयोग किया। वस्तुओं के कोनों को प्रदर्शित कर रहे बिंदु मोटे ऊन से जुड़े हुए थे, जिससे रियान अपनी अँगुलियों से उनकी स्थितियों का अनुभव कर सके।



चित्र 1.1 — रियान के कमरे का रेखाचित्र

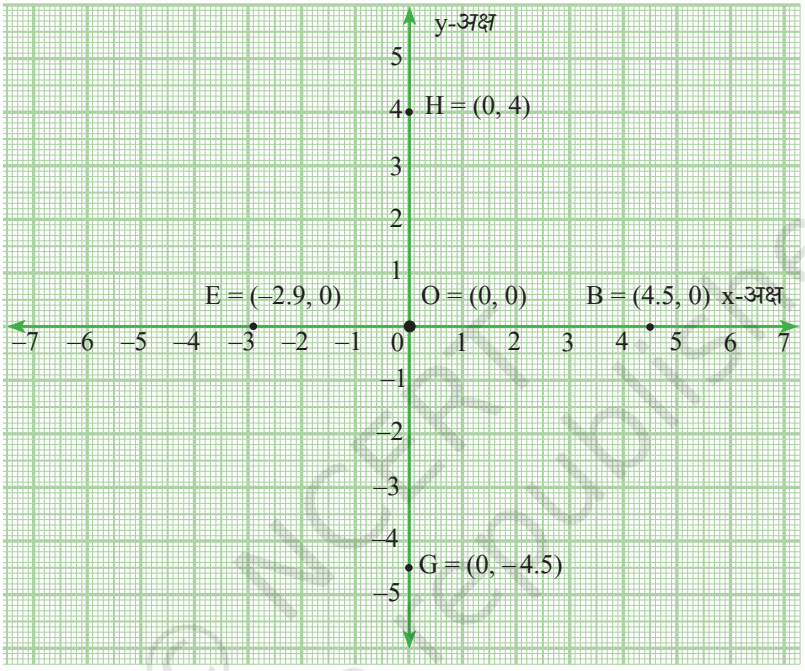
आइए हम रियान के कमरे का अभिन्यास (लेआउट) समझने के लिए चित्र 1.1 का परीक्षण करें। ध्यान दीजिए, यह केवल तल के मानचित्र को प्रदर्शित करता है। क्या आपने देखा कि क्यों मानचित्र में खिड़कियों की स्थितियों को चिह्नित नहीं किया जा सकता है?

1.3 द्वि-विमीय कार्तीय निर्देशांक पद्धति

विगत कक्षाओं में पूर्णांकों, परिमेय संख्याओं और दशमलवों के अध्यायों में आपने एक-विमीय संख्या रेखा का अध्ययन किया था। द्वि-विमीय निर्देशांक पद्धति में दो लंबवत रेखाओं का उपयोग, द्वि-विमीय समष्टि में बिंदुओं को चिह्नित करने के लिए किया जाता है, जिसे संक्षेप में 2-D समष्टि कहा जाता है। सुविधानुसार, इसमें से एक रेखा को हम क्षैतिज मानते हैं, इसे x-अक्ष कहा जाता है। दूसरी रेखा ऊर्ध्व होती है, इसे y-अक्ष कहा जाता है। जिस बिंदु पर x-अक्ष और y-अक्ष एक-दूसरे को प्रतिच्छेद

© NCERT not to be republished

करते हैं, वह बिंदु मूलबिंदु O कहलाता है; इसके निर्देशांक (0, 0) होते हैं। निर्देशांक अक्ष हमें किसी बिंदु के निर्देशांकों का उपयोग कर द्वि-विमीय तल में उस बिंदु की स्थिति ज्ञात करने में सहायता करते हैं। दोनों अक्षों पर O से दूरियों को समान इकाइयों में चिह्नित किया जाता है। O के दाहिनी ओर तथा O से ऊपर की ओर दूरियों को धनात्मक माना जाता है और O के बाईं ओर तथा O से नीचे की ओर दूरियों को ऋणात्मक माना जाता है (चित्र 1.2)।



चित्र 1.2 — निर्देशांक तल की संरचना

बिंदु B, x-अक्ष पर स्थित है और O के दाईं ओर 4.5 इकाई दूरी पर है, इसके निर्देशांक (4.5, 0) हैं। इस तथ्य को B = (4.5, 0) लिखा जाता है। बिंदु G, y-अक्ष पर स्थित है और मूलबिंदु O से नीचे की ओर 4.5 इकाई की दूरी पर है, इसके निर्देशांक (0, –4.5) हैं अर्थात G = (0, –4.5) है। बिंदु H भी y-अक्ष पर स्थित है किंतु O से ऊपर की ओर 4 इकाई की दूरी पर है, इसके निर्देशांक (0, 4) हैं अर्थात H = (0 ,4) है।

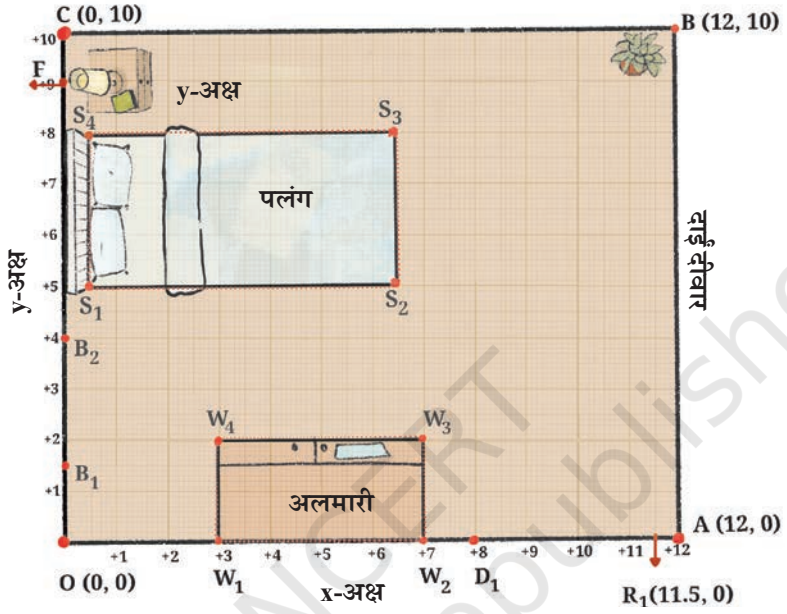
कोई बिंदु P = (x, 0), x-अक्ष पर स्थित होता है। यदि x धनात्मक है तो P, O के दाईं ओर स्थित होगा। यदि x ऋणात्मक है तो P, O के बाईं ओर स्थित होगा। कोई बिंदु P = (0, y), y-अक्ष पर स्थित होता है। यदि y धनात्मक है तो P, O के ऊपर की ओर स्थित होगा; यदि y ऋणात्मक है तो P, O के नीचे की ओर स्थित होगा।

किसी बिंदु के निर्देशांक लिखते समय '=' चिह्न का उपयोग किए बिना P = (x, y) को सरल रूप में P(x, y) लिखना अपेक्षाकृत सुविधाजनक होता है।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 1.1

चित्र 1.3 में रियान का कमरा दिखाया गया है, इसके कोनों को बिंदुओं OABC द्वारा चिह्नित किया गया है। चित्र में x-अक्ष और y-अक्ष को चिह्नित किया गया है। बिंदु O मूलबिंदु है।



चित्र 1.3

चित्र 1.3 के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

(i) यदि D_1R_1 रियान के कमरे के द्वार को प्रदर्शित करता है तो यह द्वार कमरे की बाईं दीवार (y-अक्ष) से कितनी दूरी पर स्थित है? द्वार x-अक्ष से कितनी दूरी पर स्थित है?

(ii) D_1 के निर्देशांक क्या हैं?

(iii) यदि R_1 बिंदु (11.5, 0) है तो द्वार की चौड़ाई क्या है? क्या आपको लगता है कि कमरे के द्वार के लिए यह चौड़ाई उपयुक्त है? यदि कोई व्यक्ति पहिएदार कुर्सी (व्हीलचेयर) पर बैठकर कमरे में प्रवेश करना चाहता है तो क्या वह सरलतापूर्वक ऐसा कर पाएगा?

(iv) यदि B_1 (0, 1.5) और B_2 (0, 4) स्नानगृह के द्वार की सीमा के अंतिम बिंदुओं को प्रदर्शित करते हैं तो क्या स्नानगृह का द्वार कमरे के द्वार की तुलना में संकीर्ण है या अधिक चौड़ा है?

सोचिए और विचार कीजिए

1. किसी कमरे के द्वार के लिए मानक चौड़ाई क्या है? अपने घर और विद्यालय के परिवेश में देखिए।
2. क्या आपके विद्यालय के द्वार व्हीलचेयर पर बैठे व्यक्तियों के लिए उपयुक्त हैं?

© NCERT not to be republished

अभी तक हमने केवल दो निर्देशांक वाले अक्षों पर निरूपित बिंदुओं पर विचार किया है। आप उन बिंदुओं के निर्देशांकों के विषय में क्या कहना चाहेंगे, जो इनमें से किसी भी अक्ष पर निरूपित नहीं हैं? तल जिसमें दोनों अक्ष स्थित हैं, उन्हें **कार्तीय तल**, **निर्देशांक तल** अथवा **xy-तल** कहते हैं। अक्ष, तल को चार भागों में विभाजित करते हैं, जिन्हें **चतुर्थांश** कहा जाता है। चतुर्थांशों का क्रमांकन चित्र 1.4 में दर्शाए अनुसार किया जाता है।

पूर्व में बताई गई परिपाटी के अनुसार हम कह सकते हैं—

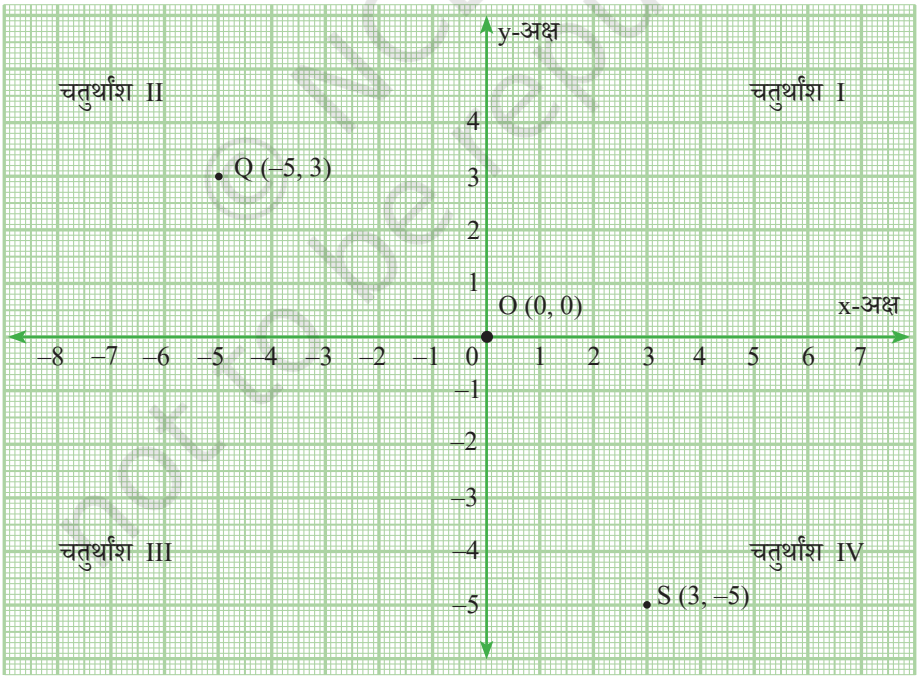
(i) प्रथम चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x और y दोनों निर्देशांक धनात्मक होते हैं।

(ii) द्वितीय चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x-निर्देशांक ऋणात्मक और y-निर्देशांक धनात्मक होते हैं।

(iii) तृतीय चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x और y दोनों निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं।

(iv) चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित बिंदुओं के x-निर्देशांक धनात्मक और y-निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं।

क्या आप अब द्वि-विमीय तल में किसी बिंदु के निर्देशांकों का अभिप्राय समझ सकते हैं? सामान्य रूप से एक द्वि-विमीय तल में किसी बिंदु P के निर्देशांकों को (x, y) के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। यहाँ x, y-अक्ष से P की लंबवत दूरी को प्रदर्शित करता है, जिसे x-अक्ष के अनुदिश मापा गया है और y, x-अक्ष से P की लंबवत दूरी को अभिव्यक्त करता है, जिसे y-अक्ष के अनुदिश मापा गया है। x और y, बिंदु (x, y) के क्रमशः x-निर्देशांक और y-निर्देशांक हैं।



चित्र 1.4

© NCERT not to be republished

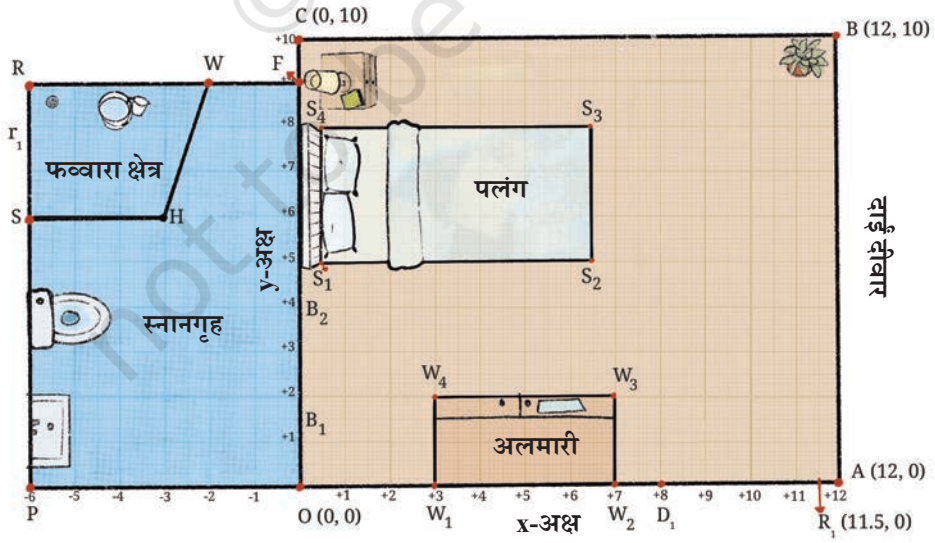
उदाहरण के लिए, चित्र 1.4 में बिंदु S (3, –5) चतुर्थ चतुर्थांश में है, x-निर्देशांक 3 इकाई है और y-निर्देशांक –5 इकाई है। बिंदु Q (–5, 3) के लिए क्या कहा जा सकता है? यह बिंदु x-निर्देशांक –5 और y-निर्देशांक 3 के साथ द्वितीय चतुर्थांश में है। चित्र 1.4 को अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाते हुए अपने आरेख में S और Q का अंकन कीजिए। प्रथम चतुर्थांश में किसी बिंदु P और तृतीय चतुर्थांश में किसी बिंदु R को अंकित कीजिए और उनके निर्देशांक लिखिए।

सोचिए और विचार कीजिए

1. y-अक्ष पर किसी बिंदु का x-निर्देशांक क्या है?
2. क्या x-अक्ष पर किसी बिंदु के लिए समान व्यापकीकरण किया जा सकता है?
3. क्या बिंदु Q (y, x) कभी भी बिंदु P (x, y) के संपाती होता है? अपने उत्तर को प्रमाणित कीजिए।
4. यदि $x \neq y$ है तो $(x, y) \neq (y, x)$ होगा और $(x, y) = (y, x)$ केवल तभी होगा, यदि $x = y$ हो। क्या यह सत्य है?

प्रश्नावली 1.2

एक आलेख पत्रक पर x-अक्ष, y-अक्ष और मूलबिंदु O को अंकित कीजिए। x-अक्ष पर (–7, 0) से लेकर (13, 0) तक और y-अक्ष पर (0, –15) से लेकर (0, 12) तक बिंदुओं का अंकन कीजिए (1 से.मी. = 1 इकाई का पैमाना उपयोग कीजिए)। चित्र 1.5 का उपयोग करते हुए अगले पृष्ठ पर दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए—



चित्र 1.5

© NCERT not to be republished

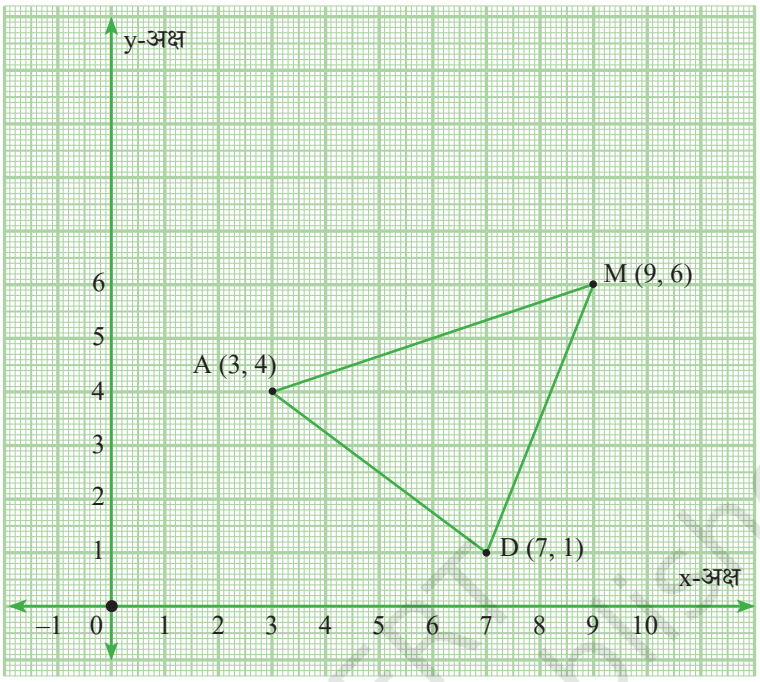
1. रियान की आयाताकार अध्ययन मेज को इस प्रकार रखिए कि उसके तीन पाये बिंदुओं (8, 9), (11, 9) और (11, 7) पर स्थित हों।
   (i) मेज का चौथा पाया कहाँ होगा?
   (ii) क्या मेज के लिए यह एक सही स्थान है?
   (iii) मेज की चौड़ाई क्या है? इसकी लंबाई क्या है? क्या आप मेज की ऊँचाई बता सकते हैं?
2. यदि एक स्नानगृह के द्वार का कब्जा B_1 पर है और यह शयनकक्ष की ओर खुलता है तो क्या यह अलमारी से टकराएगा? यदि द्वार अपेक्षाकृत अधिक चौड़ाई का बनाया जाए तो इस संदर्भ में क्या आप कुछ परिवर्तनों का सुझाव देंगे?
3. रियान के स्नानगृह की ओर देखिए—
   (i) स्नानगृह के चार कोनों O, F, R और P के निर्देशांक क्या हैं?
   (ii) रियान के स्नानगृह में फव्वारा क्षेत्र का आकार क्या है? इसके चारों कोनों के निर्देशांक लिखिए।
   (iii) प्रक्षालन पात्र (वॉश बेसिन) के लिए 3 फुट × 2 फुट और प्रसाधन (शौचालय) के लिए 2 फुट × 3 फुट का स्थान चिह्नित कीजिए। इन स्थानों के कोनों के निर्देशांक लिखिए।
4. घर में अन्य कमरे—
   (i) रियान कमरे के प्रवेशद्वार तक भोजनकक्ष से होकर जाता है जिसकी लंबाई 18 फुट और चौड़ाई 15 फुट है। भोजनकक्ष की लंबाई बिंदु P से लेकर बिंदु A तक है। भोजनकक्ष का रेखाचित्र खींचिए और इसके कोनों के निर्देशांकों को अंकित कीजिए।
   (ii) भोजनकक्ष के ठीक मध्य में एक 5 फुट × 3 फुट क्षेत्रफल की आयताकार भोजन-मेज (डाइनिंग टेबल) रखिए। मेज के पायों के निर्देशांकों को लिखिए।

1.4 द्वि-विमीय तल में दो बिंदुओं के मध्य दूरी

हम दो बिंदुओं के मध्य दूरी का आकलन करने की विधि से अवगत हैं, यदि वे बिंदु अक्षों पर स्थित हैं अथवा अक्षों के समानांतर एक रेखाखंड का निर्माण करते हैं। उदाहरण के लिए, चित्र 1.5 में हम $W_1 W_2$ और $S_1 S_2$ दूरियों का पता लगा सकते हैं। हमें क्या करना चाहिए, यदि बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड किसी भी अक्ष के समानांतर नहीं हो? इस संदर्भ में हम बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर सकते हैं, जिसका अध्ययन आपने कक्षा 8 में किया है। हम इस परिणाम का उपयोग xy-तल में स्थित किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य की दूरी का पता लगाने के लिए कर सकते हैं।

चित्र 1.6 में त्रिभुज ADM को देखिए।

© NCERT not to be republished



चित्र 1.6

त्रिभुज ADM प्रथम चतुर्थांश में एक न्यूनकोण त्रिभुज है। हम इसकी भुजाओं AD, DM और MA की लंबाई कैसे ज्ञात करेंगे?

सोचिए और विचार कीजिए

1. A (3, 4) से D (7, 1) तक पहुँचने में, x-अक्ष के अनुदिश कितनी दूरी तय की गई है? इन्हीं बिंदुओं के लिए y-अक्ष के अनुदिश कितनी दूरी तय की गई है?
2. क्या ये दूरियाँ आपको AD दूरी ज्ञात करने में सहायता कर सकती हैं?

चित्र 1.7 हमारे समक्ष एक संकेत प्रस्तुत करता है। x-अक्ष के अनुदिश तय की गई दूरी को CD द्वारा दर्शाया गया है।

CD = D का x-निर्देशांक – A का x-निर्देशांक = 7 – 3 = 4

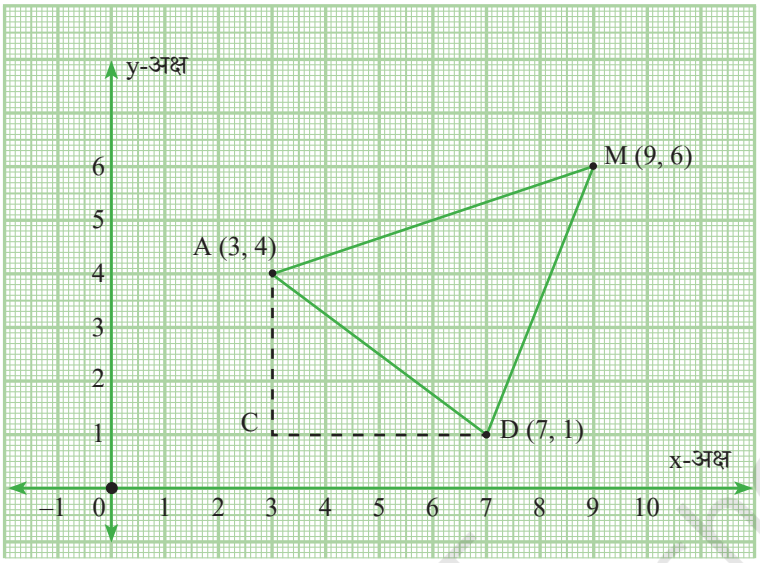
y-अक्ष के अनुदिश तय की गई दूरी AC द्वारा दर्शाई गई है।

AC = A का y-निर्देशांक –D का y-निर्देशांक = 4 – 1 = 3

बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर हम अभीष्ट दूरी ज्ञात कर सकते हैं—

$$AD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ इकाई}$$

© NCERT not to be republished



चित्र 1.7

इसी प्रकार, हम DM और MA दूरियों को ज्ञात कर सकते हैं—

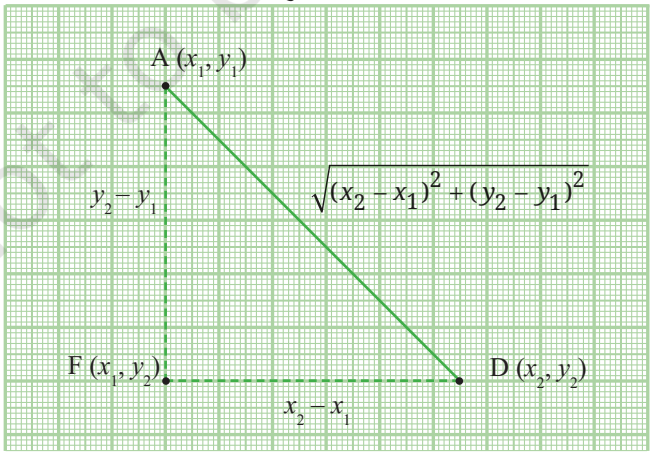
$$DM = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ इकाई}$$

$$MA = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \text{ इकाई}$$

व्यापक रूप से बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के मध्य की दूरी निम्नलिखित सूत्र द्वारा दी जाती है—

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

और इसकी गणना चित्र 1.8 में दर्शाए अनुसार की जाती है।

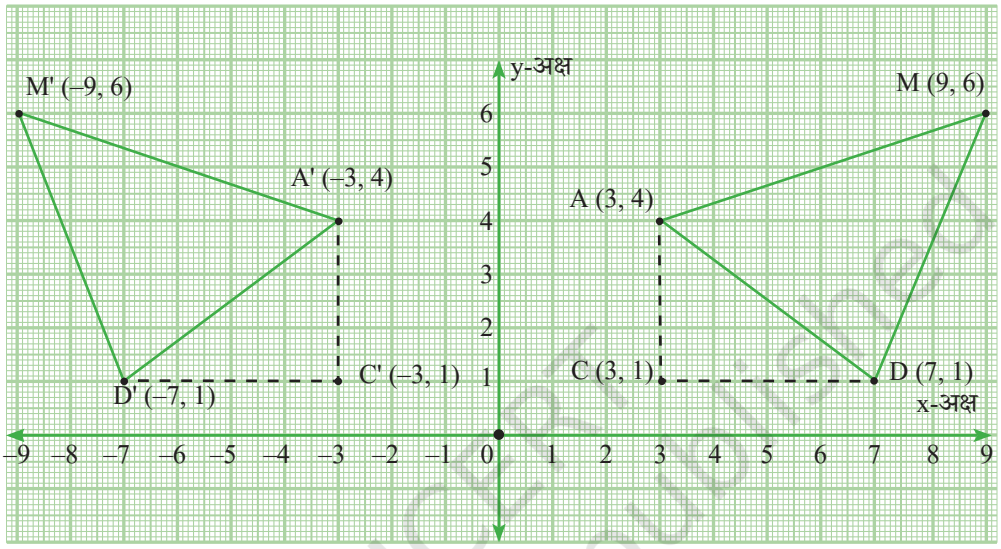


चित्र 1.8

© NCERT not to be republished

इससे कोई अंतर नहीं पड़ता है कि $(x_2 - x_1)$ और $(y_2 - y_1)$ धनात्मक है या ऋणात्मक, क्योंकि हम दोनों अक्षों के अनुदिश होने वाले परिवर्तनों को माप रहे हैं।

क्या होगा, यदि x_1, x_2, y_1, y_2 के मान ऋणात्मक हों? चित्र 1.9 में, त्रिभुज AMD, y-अक्ष में परावर्तित हो रहा है। बिंदुओं A, M और D के प्रतिबिंबों के निर्देशांक क्या हैं?



चित्र 1.9

C'D' = A' का x-निर्देशांक – D' का x-निर्देशांक $= -3 - (-7) = 4$

A'C' = A' का y-निर्देशांक – D' का y-निर्देशांक $= 4 - 1 = 3$

बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करने पर हमें AD $= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ इकाई प्राप्त होती है।

इसी प्रकार आप D'M' और M'A' की गणना कर सकते हैं—

$$D'M' = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ इकाई}$$

$$M'A' = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{40} \text{ इकाई}$$

हम देखते हैं कि परावर्तन भी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई को संरक्षित रखता है।

सोचिए और विचार कीजिए

1. ऊपर दिए गए परावर्तन में कौन-से मान समान बने रहे और कौन-से मान परिवर्तित हुए?
2. क्या ये अवलोकन समान बने रहेंगे, यदि ΔADM का परावर्तन (y-अक्ष के स्थान पर) x-अक्ष में हो रहा हो?

© NCERT not to be republished

अंतिम प्रश्नावली

1. दोनों अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्या होंगे?
2. बिंदु W का x-निर्देशांक –5 है। क्या आप उस बिंदु H के निर्देशांकों को ज्ञात कर सकते हैं जो W से होकर जाती हुई y-अक्ष के सामानांतर रेखा पर स्थित हो? बिंदु H किन चतुर्थांशों में स्थित हो सकता है?
3. बिंदु R (3, 0), A(0, –2), M (–5, –2) तथा P (–5, 2) पर विचार कीजिए। यदि वे इसी क्रम में मिलाए गए हैं तो अनुमान लगाइए—
   (i) RAMP की दो भुजाएँ जो परस्पर लंबवत हैं।
   (ii) RAMP की वह भुजा जो किसी एक अक्ष के समानांतर है।
   (iii) दो बिंदु जो एक अक्ष में एक-दूसरे के दर्पण प्रतिबिंब हैं। यह अक्ष कौन-सा होगा?
   अब बिंदुओं को अंकित कीजिए और अपने अनुमान को सत्यापित कीजिए।
4. कार्तीय तल पर बिंदु Z (5, –6) का अंकन कीजिए। एक समकोण त्रिभुज IZN की रचना कीजिए और तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।
   (**टिप्पणी**— आपके उत्तरों में अंतर हो सकता है।)
5. यदि ऋणात्मक संख्याएँ नहीं होतीं तो निर्देशांक पद्धति कैसी होती? क्या इस पद्धति से द्वि-विमीय तल में सभी बिंदुओं को अंकित किया जा सकता था?

*6. क्या बिंदु M (–3, –4), A (0, 0) और G (6, 8) एक ही सरल रेखा पर हैं? बिंदुओं के अंकन के बिना और बिंदुओं को जोड़े बिना एक विधि बताइए, जिसके माध्यम से हम इसका परीक्षण कर सकें।

*7. अपनी विधि (प्रश्न 6 से) का उपयोग करते हुए यह परीक्षण कीजिए कि क्या बिंदु R (–5, –1), B (–2, –5) और C (4, –12) एक ही सरल रेखा पर हैं। अब बिंदुओं के दोनों समूहों को अंकित कीजिए और अपने उत्तरों की जाँच कीजिए।

*8. मूलबिंदु को एक शीर्ष के रूप में उपयोग करते हुए, निम्नलिखित के शीर्षों को अंकित कीजिए—
   (i) एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज
   (ii) एक ऐसा समद्विबाहु त्रिभुज जिसका एक शीर्ष तृतीय चतुर्थांश में और अन्य शीर्ष चतुर्थ चतुर्थांश में हो।

*9. दी गई सारणी, बिंदुओं S, M और T के निर्देशांकों को प्रदर्शित करती है। प्रत्येक स्थिति में बताइए कि क्या M, रेखाखंड ST का मध्यबिंदु है। अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

© NCERT not to be republished

S	M	T	क्या M, ST का मध्यबिंदु है? हाँ या नहीं।	आपके उत्तर का कारण
(–3, 0)	(0, 0)	(3, 0)		
(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)		
(0, 0)	(0, 5)	(0, –10)		
(–8, 7)	(0, –2)	(6, –3)		

जब M, ST का मध्यबिंदु हो तो क्या आप M, S और T के निर्देशांकों के मध्य किसी संबंध का पता लगा सकते हैं?

*10. आपने जो संबंध ज्ञात किया है, उसका उपयोग करते हुए B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, यदि M (–7, 1), A (3, –4) और B (x, y) के मध्यबिंदु के रूप में दिया गया है।

*11. मान लीजिए रेखाखंड AB के त्रिविभाजन बिंदु P और Q हैं, जहाँ P, A के निकट है, जबकि Q, B के निकट है। किसी रेखाखंड के मध्यबिंदु के निर्देशांकों को ज्ञात करने के अपने ज्ञान का उपयोग करते हुए P और Q के निर्देशांकों को आप कैसे ज्ञात करेंगे? इस विधि को उपयोग कीजिए, जब बिंदु A (4, 7) और B (16, –2) हैं।

*12. (i) दिए गए बिंदुओं A (1, –8), B (–4, 7) और C (–7, –4) के लिए प्रदर्शित कीजिए कि वे एक वृत्त K पर स्थित हैं जिसका केंद्र मूलबिंदु O (0, 0) है। वृत्त K की त्रिज्या क्या होगी?

(ii) दिए गए बिंदुओं D (–5, 6) और E (0, 9) के लिए जाँच कीजिए कि क्या वे वृत्त K के भीतर स्थित हैं, वृत्त पर स्थित हैं या वृत्त के बाहर स्थित हैं।

*13. त्रिभुज ABC की भुजाओं के मध्यबिंदु D, E और F हैं। D, E और F के निर्देशांक क्रमशः (5, 1), (6, 5) और (0, 3) दिए गए हैं, A, B और C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

14. एक शहर की दो मुख्य सड़कें हैं जो एक-दूसरे को शहर के केंद्र पर प्रतिच्छेद करती हैं। ये दो सड़कें उत्तर-दक्षिण और पूर्व-पश्चिम दिशा के अनुदिश हैं। शहर की अन्य सभी गलियाँ इन्हीं सड़कों के समानांतर हैं और एक-दूसरे से 200 मी. की दूरी पर स्थित हैं। प्रत्येक दिशा में 10 गलियाँ हैं।

(i) 1 से.मी. = 200 मी. पैमाने का उपयोग करते हुए, अपनी अभ्यास-पुस्तिका में शहर का एक प्रतिरूप बनाइए। सड़कों को एकल रेखाओं द्वारा प्रस्तुत कीजिए।

(ii) प्रदर्श में गलियों के प्रतिच्छेदन हैं। प्रत्येक गली प्रतिच्छेदन दो गलियों द्वारा बना है जिसमें एक गली उत्तर-दक्षिण दिशा और दूसरी गली पूर्व-पश्चिम दिशा की ओर जा रही है। प्रत्येक गली प्रतिच्छेदन की व्याख्या निम्नलिखित रूप में की गई है—

© NCERT not to be republished

यदि उत्तर-दक्षिण दिशा में जाने वाली दूसरी गली और पूर्व-पश्चिम दिशा में जाने वाली पाँचवीं गली किसी स्थान पर प्रतिच्छेद करती हैं तो हम इस गली प्रतिच्छेदन को (2, 5) कहेंगे। इस पद्धति का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए—

(a) गलियों के कितने प्रतिच्छेदनों को (4, 3) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है?

(b) गलियों के कितने प्रतिच्छेदनों को (3, 4) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है?

15. एक कंप्यूटर ग्राफिक्स (चित्रांकन) कार्यक्रम में एक आयताकार दृश्यपटल (स्क्रीन) पर छवियों को प्रदर्शित किया जाता है जिसकी निर्देशांक पद्धति का मूलबिंदु नीचे बाएँ कोने में है। दृश्यपटल की चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 800 पिक्सेल और 600 पिक्सेल है। 80 पिक्सेल त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार प्रतीक (आइकन), बिंदु A (100, 150) को केंद्रित करके बनाया गया है। 100 पिक्सेल त्रिज्या वाला एक अन्य वृत्ताकार प्रतीक बिंदु B (250, 230) को केंद्रित करके बनाया गया है। पता लगाइए—

(i) क्या किसी भी वृत्त का कोई भाग दृश्यपटल (स्क्रीन) से बाहर स्थित है?

(ii) क्या दोनों वृत्त एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं?

16. कार्तीय तल पर बिंदु A(2, 1), B(–1, 2), C(–2, –1) और D(1, –2) का अंकन कीजिए। क्या ABCD एक वर्ग है? क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है? इस वर्ग का क्षेत्रफल क्या है?

सारांश

- किसी बिंदु या वस्तु की स्थिति को एक समतल में निर्धारित करने के लिए हमें दो लंबवत रेखाओं की आवश्यकता होती है। उनमें से एक ऊर्ध्व और अन्य क्षैतिज होती है।
- समतल को **कार्तीय तल**, **निर्देशांक तल** अथवा **xy-तल** कहते हैं और रेखाएँ निर्देशांक अक्ष कहलाती हैं।
- क्षैतिज रेखा **x-अक्ष** और ऊर्ध्व रेखा **y-अक्ष** कहलाती हैं।
- निर्देशांक-अक्ष, तल को चार भागों में विभाजित करते हैं, जिन्हें **चतुर्थांश** कहा जाता है।
- अक्षों का प्रतिच्छेद बिंदु **मूलबिंदु** कहलाता है।
- y-अक्ष से किसी बिंदु की दूरी इसका **x-निर्देशांक** है और x-अक्ष से बिंदु की दूरी इसका **y-निर्देशांक** है। यदि किसी बिंदु का x-निर्देशांक x है और **y-निर्देशांक** y है तो (x, y) बिंदु के **निर्देशांक** कहलाते हैं।

© NCERT not to be republished

- x-अक्ष पर किसी भी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप में होते हैं और y-अक्ष पर बिंदु $(0, y)$ के रूप में होते हैं।
- मूलबिंदु के निर्देशांक $(0, 0)$ होते हैं।
- किसी बिंदु के निर्देशांक प्रथम चतुर्थांश में $(+, +)$, द्वितीय चतुर्थांश में $(-, +)$, तृतीय चतुर्थांश में $(-, -)$ और चतुर्थ चतुर्थांश में $(+, -)$ के रूप में होते हैं।
- यदि $x = y$ हो तो $(x, y) = (y, x)$ होगा। यदि $x \neq y$ हो तब $(x, y) \neq (y, x)$ होगा।
- बिंदुओं (x_1, y) और (x_2, y) के मध्य की दूरी, x_1 व x_2 के मध्य अंतर का निरपेक्ष मान $|x_2 - x_1|$ होती है।
- बिंदुओं (x, y_1) और (x, y_2) के मध्य की दूरी, y_1 व y_2 के मध्य अंतर का निरपेक्ष मान $|y_2 - y_1|$ होती है।
- बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के मध्य की दूरी $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

© NCERT not to be republished

2 रैखिक बहुपदों का परिचय

0820CH02

2.1 भूमिका

हम विगत कक्षाओं में बीजीय व्यंजकों के विषय में पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में, हम बीजीय व्यंजकों के एक विशेष प्रकार के बारे में पढ़ेंगे, जिन्हें **रैखिक बहुपद** कहते हैं। आइए, सर्वप्रथम हम बीजीय व्यंजकों के कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 — राजू एक दुकान पर गया, जहाँ विभिन्न रंगों के सीलबंद बक्से विक्रय के लिए रखे हुए थे। दुकानदार ने राजू से कहा कि प्रत्येक लाल बक्से में 4 पेन रखे हैं और प्रत्येक नीले बक्से में 5 पेंसिलें रखी हैं। अब यदि राजू x लाल बक्से और y नीले बक्से क्रय करता है तो वह पेन व पेंसिलों की कुल संख्या को शीघ्रता से कैसे ज्ञात कर सकता है? इसके अतिरिक्त, यदि वह 3 अतिरिक्त पेन नि:शुल्क प्राप्त करता है तो उसके पास कुल कितने पेन और पेंसिलें होंगी?

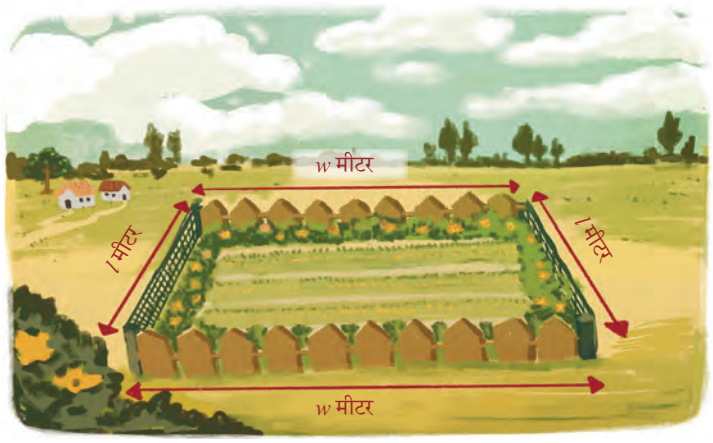


चित्र 2.1

ध्यान दीजिए कि x लाल बक्सों में $4x$ पेन होंगे और y नीले बक्सों में $5y$ पेंसिलें होंगी। इसके अतिरिक्त उसने 3 पेन नि:शुल्क प्राप्त किए। इस प्रकार पेन और पेंसिल की कुल संख्या को बीजीय व्यंजक $4x + 5y + 3$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इस उदाहरण में $4x$, $5y$ और 3 व्यंजक के **पद** हैं, x और y अक्षर-संख्याएँ हैं, संख्याएँ 4 व 5 क्रमश: x और y के **गुणांक** हैं तथा 3 एक **अचर** है। अब से हम अक्षर-संख्याओं के लिए व्यापक रूप से उपयोग में लाए जाने वाले वैकल्पिक शब्द **चर** का उपयोग करेंगे। इस प्रकार, $4x + 5y + 3$ व्यंजक में उपयोग हुए चर x और y हैं।

उदाहरण 2 — l मीटर लंबाई और w मीटर चौड़ाई वाले आयताकार उद्यान की बाड़ लगाई जानी है और उसकी सजावट की जानी है। इसमें तार की बाड़, लंबाई के अनुदिश ₹100 प्रति मीटर की दर से लगाई जानी है और लकड़ी की बाड़, चौड़ाई के अनुदिश ₹80 प्रति मीटर की दर से लगाई जानी है। संपूर्ण उद्यान में विशेष बीज भी बोए जाने हैं, जिसमें ₹50 प्रति वर्ग मीटर की दर से व्यय होगा।

© NCERT not to be republished



चित्र 2.2

इस कार्य की कुल लागत क्या होगी?

उद्यान की लंबाई के अनुदिश तार की बाड़ लगाने की लागत = $2l \times 100 = ₹200l$

उद्यान की चौड़ाई के अनुदिश लकड़ी की बाड़ लगाने की लागत = $2w \times 80 = ₹160w$

संपूर्ण उद्यान में बीज बोने की लागत (क्षेत्रफल पर आधारित) = $50 \times l \times w = ₹50lw$

कुल लागत = $₹(200l + 160w + 50lw)$

इस प्रकार, कुल लागत के लिए बीजीय व्यंजक $200l + 160w + 50lw$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

1. क्या आप ऊपर दिए गए बीजीय व्यंजक में पदों, चरों और गुणांकों की पहचान कर सकते हैं?
2. उदाहरण 1 में दिए गए बीजीय व्यंजक से यह किस प्रकार भिन्न हैं?

उदाहरण 3 — 20 सेंटीमीटर लंबे तार को आयत बनाने के लिए विभिन्न प्रकार से मोड़ा गया है। उदाहरण के लिए, हम 7 सेंटीमीटर लंबा और 3 सेंटीमीटर चौड़ा आयत बना सकते हैं। हम 5.5 सेंटीमीटर लंबा और 4.5 सेंटीमीटर चौड़ा आयत भी बना सकते हैं (इस प्रकार के आयत बनाने की कुछ अन्य विधियों पर विचार कीजिए)। क्या आप ऐसे आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए व्यंजक लिख सकते हैं?

यदि किसी आयत की लंबाई x सेंटीमीटर है तो चौड़ाई $(10 - x)$ सेंटीमीटर होगी। इन आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए व्यंजक $x(10 - x)$ अथवा $10x - x^2$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

1. क्या आप ऊपर दिए गए बीजीय व्यंजक में पदों, चरों और गुणांकों की पहचान कर सकते हैं?
2. क्या आप उदाहरण 1 और 3 के मध्य समानता या असमानता बता सकते हैं?

© NCERT not to be republished

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 1 और उदाहरण 2 के बीजीय व्यंजकों में दो चर हैं, जबकि उदाहरण 3 के बीजीय व्यंजक में केवल एक चर है।

व्यंजक जैसे $4x$, $x^2 + 1$, $2y - 5$, $5y^3 + y^2 + 2y - 1$, $3z + 7$ ऐसे बीजीय व्यंजक हैं जिनमें केवल एक चर (x, y या z) है। इस अध्याय में हम अपनी चर्चा को केवल एक चर वाले बीजीय व्यंजकों तक ही सीमित रखेंगे। आपने ध्यान दिया होगा कि व्यंजक में चर की घातें भी विद्यमान होती हैं। उदाहरण के लिए व्यंजक $x^2 + 5x + 1$ में x की अधिकतम घात 2 है। व्यंजक $5y^3 + y^2 - 8$ में चर y की अधिकतम घात 3 है। साथ ही व्यंजक $5y^3 + y^2 + 2y - 1$ में y^3 का गुणांक 5 है, y^2 का गुणांक 1 है, y का गुणांक 2 है और अचर पद -1 है। ऐसे बीजीय व्यंजक जिनमें केवल एक चर और उसकी घातें होती हैं, उन्हें **एक चर बहुपद**, **एकचरीय बहुपद** या संदर्भ स्पष्ट हो तो केवल **बहुपद** भी कहते हैं। किसी बहुपद में चर का अधिकतम घातांक, उसकी **घात** कहलाती है।

इस प्रकार—

(i) $5y^3 + y^2 + 2y - 1$, घात 3 का बहुपद है। ऐसे बहुपद **त्रिघाती बहुपद** कहलाते हैं।

(ii) $x^2 + 5x + 1$, घात 2 का बहुपद है। ऐसे बहुपद **द्विघाती बहुपद** कहलाते हैं।

(iii) $3z + 7$, घात 1 का बहुपद है। ऐसे बहुपद **रैखिक बहुपद** कहलाते हैं।

(iv) अचर 8, घात 0 का बहुपद है, क्योंकि इसे $8x^0$ के रूप में लिखा जा सकता है जिसमें चर x की घात 0 है। ऐसे बहुपद **अचर बहुपद** कहलाते हैं।

प्रश्नावली 2.1

1. नीचे दिए गए बहुपदों की घातें ज्ञात कीजिए—
   (i) $2x^2 - 5x + 3$
   (ii) $y^3 + 2y - 1$
   (iii) -9
   (iv) $4z - 3$
2. घात 1, 2 और 3 के बहुपद लिखिए।
3. बहुपद $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x + 7$ में x^2 और x^3 के गुणांक क्या हैं?
4. बहुपद $4z^3 + 5z^2 - 11$ में z का गुणांक क्या है?
5. बहुपद $9x^3 + 5x^2 - 8x - 10$ में अचर पद क्या है?

© NCERT not to be republished

स्मरण कीजिए कि घात 1 वाले बहुपद **रैखिक बहुपद** कहलाते हैं। इस अध्याय में हम **रैखिक बहुपदों** का अध्ययन करेंगे।

2.2 रैखिक बहुपद

हम रैखिक बहुपदों वाले कुछ उदाहरणों के साथ प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 4 — भुजा x वाले एक वर्ग का परिमाप $4x$ है जो चर x का एक रैखिक बहुपद है।

सोचिए और विचार कीजिए

1 सेंटीमीटर, 1.5 सेंटीमीटर, 2 सेंटीमीटर, 2.5 सेंटीमीटर और 3 सेंटीमीटर भुजाओं वाले वर्गों के परिमाप ज्ञात कीजिए। यदि भुजाओं की लंबाई 0.5 सेंटीमीटर बढ़ा दी जाए तो परिमाप पर इसका क्या प्रभाव होगा?

उदाहरण 5 — एक शतरंज क्लब प्रत्येक मैच के लिए ₹200 प्रवेश शुल्क और खेले गए प्रत्येक मैच के लिए ₹50 का शुल्क लेता है। नीचे दी गई तालिका में खेले गए मैचों की संख्याओं के साथ खिलाड़ी द्वारा दिए गए शुल्क को प्रदर्शित किया गया है —

खेले गए मैचों की संख्या	1	2	3	4	5	...	m
भुगतान की गई राशि (₹)	250	300	350	400	450	...	200 + 50m

इस प्रकार, यदि m खेले गए मैचों की संख्या हो तो कुल राशि ₹$(200 + 50m)$ होगी। ध्यान दीजिए कि चर m का एक रैखिक बहुपद $200 + 50m$ है। प्रत्येक अतिरिक्त खेले गए मैच के लिए इस राशि का अचर मान ₹50 से बढ़ता जाता है।

सोचिए और विचार कीजिए

यदि किसी खिलाड़ी ने ₹750 दिए हों तो उसने कितने मैच खेले होंगे?

ऊपर दिए गए उदाहरणों में रैखिक बहुपदों का एक विशेष गुण ज्ञात होता है कि पूर्णांकों के दो क्रमिक मानों का अंतर अचर है। उदाहरण 4 में, प्रत्येक बार वर्ग की भुजा की लंबाई में 0.5 सेंटीमीटर की वृद्धि होने पर परिमाप में 2 सेंटीमीटर की वृद्धि होती है। इसी प्रकार, उदाहरण 5 में प्रत्येक अतिरिक्त मैच खेलने के लिए खिलाड़ी के शुल्क में ₹50 की वृद्धि होती है। ऐसे प्रतिरूप **रैखिक प्रतिरूप** कहलाते हैं।

जब हम एक चर में किसी रैखिक बहुपद को एक अचर के समीकृत करते हैं तो **रैखिक समीकरण** प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

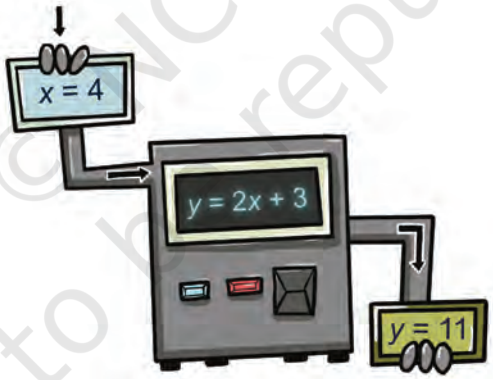
उदाहरण 6 — दो संख्याओं का योगफल 64 है। उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 10 अधिक है। दोनों संख्याएँ क्या हैं?

मान लीजिए कि दोनों संख्याओं में से छोटी संख्या x है। तब अवश्य ही बड़ी संख्या $x + 10$ होगी। चूँकि दोनों संख्याओं का योगफल 64 है, अत: रैखिक समीकरण $x + (x + 10) = 64$ होगा। इस प्रकार $2x + 10 = 64$ होगा। ध्यान दीजिए कि $2x + 10$ एक रैखिक बहुपद है। इसे 64 के समीकृत करने पर हमें रैखिक समीकरण $2x + 10 = 64$ प्राप्त होता है जिसे हल करने पर $2x = 54$ अथवा $x = 27$ प्राप्त होता है। अत: संख्याएँ 27 और 37 होंगी।

बहुपदों पर आगत-निर्गत (इनपुट-आउटपुट) विधियों से भी विचार किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, रैखिक बहुपद $2x + 3$ पर विचार कीजिए। x के प्रत्येक मान के लिए बहुपद $2x + 3$ का एक संगत मान है। उदाहरण के लिए यदि $x = 4$ हो तो व्यंजक में x को 4 से प्रतिस्थापित करने पर हमें $2 \times 4 + 3 = 11$ प्राप्त होता है।

यदि $x = -6$ हो तो व्यंजक में x को -6 से प्रतिस्थापित करने पर $2 \times (-6) + 3 = -9$ प्राप्त होता है।

चित्र 2.3 में इस प्रक्रिया को आगत-निर्गत (इनपुट-आउटपुट) मशीन के रूप में दर्शाया गया है जहाँ x का मान आगत अर्थात इनपुट है और $2x + 3$ का मान निर्गत अर्थात आउटपुट है। इस विधि को **फलन** (फंक्शन) कहा जा सकता है जहाँ व्यंजक $2x + 3$, चर x का एक फलन है। आप फलन के विषय में और अधिक अध्ययन आगामी कक्षाओं में करेंगे।



चित्र 2.3 — आगत-निर्गत विधि के रूप में रैखिक व्यंजक

सोचिए और विचार कीजिए

हम सीख चुके हैं कि किसी बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करने के लिए दिए गए व्यंजक में चर का कोई मान प्रतिस्थापित करते हैं। उदाहरण 3 पर विचार कीजिए, जिसमें तार को मोड़कर एक आयत बनाया गया है। यहाँ आयत का क्षेत्रफल $10x - x^2$, x का एक फलन है। क्या आप इसकी व्याख्या एक आगत-निर्गत विधि के रूप में कर सकते हैं? यदि $x = 6$ सेंटीमीटर हो तो व्यंजक का मान क्या होगा?

© NCERT not to be republished

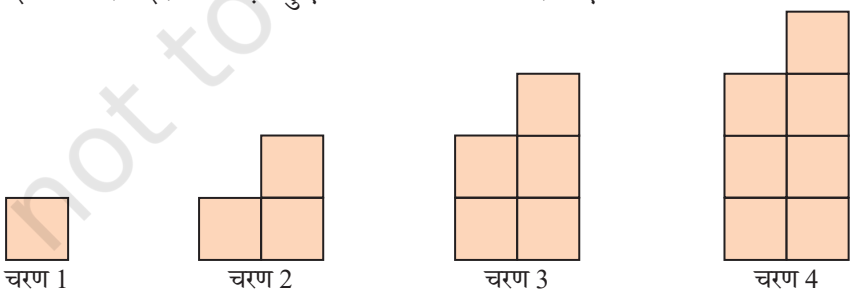
ध्यान दीजिए कि $2x + 3$ एक रैखिक फलन है जबकि $10x + x^2$ एक द्विघाती फलन है।

प्रश्नावली 2.2

1. रैखिक बहुपद $5x - 3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि —
   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$
2. द्विघाती बहुपद $7s^2 - 4s + 6$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि —
   (i) $s = 0$ (ii) $s = -3$ (iii) $s = 4$
3. सलिल की माँ की वर्तमान आयु सलिल की वर्तमान आयु से तीन गुना है। 5 वर्ष के पश्चात दोनों की आयु का योगफल 70 वर्ष होगा। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
4. दो धनात्मक पूर्णांकों का अंतर 63 है। दोनों पूर्णांकों का अनुपात 2:5 है। दोनों पूर्णांक ज्ञात कीजिए।
5. रूबी के पास दो रुपये के सिक्कों की संख्या, पाँच रुपये के सिक्कों की संख्या से तीन गुना है। यदि उसके पास कुल ₹88 हैं तो दोनों प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
6. एक किसान 300 फुट लंबी बाड़ को भिन्न-भिन्न आकार के दो टुकड़ों में काटता है। लंबा टुकड़ा छोटे टुकड़े से चार गुना लंबा है। दोनों टुकड़ों की लंबाई क्या होगी?
7. यदि एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से तीन अधिक हो और उसका परिमाप 24 सेंटीमीटर हो तो आयत की विमाएँ (लंबाई और चौड़ाई) क्या होंगी?

2.3 रैखिक प्रतिरूपों का अन्वेषण

नीचे दी गई वर्गाकार टाइलों के बढ़ते हुए प्रतिरूप को ध्यान से देखिए —



चित्र 2.4 — वर्गाकार टाइलों का बढ़ता हुआ प्रतिरूप

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

प्रतिरूप के अगले तीन चरणों में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगाइए और प्रतिरूप के सातवें चरण तक वर्गों की संख्या का अनुक्रम लिखिए।

प्रत्येक चरण, पिछले चरण में दो टाइलों को जोड़कर प्राप्त किया गया है। नीचे दी गई तालिका आरंभिक सात चरणों तक टाइलों की संख्या दर्शाती है—

चरण	1	2	3	4	5	6	7
वर्गाकार टाइलों की संख्या	1	3	5	7	9	11	13

इस प्रतिरूप का व्यापकीकरण करने पर हम देखते हैं कि प्रत्येक चरण में वर्गों की संख्या, चरण की संख्या के दोगुनी से एक कम है। उदाहरण के लिए, चरण 2 में वर्गों की संख्या $2 \times 2 - 1 = 3$ है। चरण 5 में वर्गों की संख्या $2 \times 5 - 1 = 9$ है और आगे भी वर्गों की संख्या इसी प्रकार है।

इससे हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि nवें चरण में वर्गों की संख्या $2n - 1$ से प्रदर्शित की जा सकती है। बहुपद $2n - 1$ की घात 1 है। अत: यह एक रैखिक बहुपद का उदाहरण है। इसके अतिरिक्त, वर्गों की संख्याओं के अनुक्रम 1, 3, 5, 7, 9, … में क्रमानुगत पदों में अंतर, अचर मान 2 है। इस प्रकार, प्रत्येक चरण के साथ वर्गों की संख्या में 2 की वृद्धि होती है। चरण-संख्या और वर्गाकार टाइलों की संख्या के मध्य संबंध एक **रैखिक संबंध** है।

सोचिए और विचार कीजिए

व्यंजक $2n - 1$ का उपयोग करके क्या आप बता सकते हैं कि प्रतिरूप के 15वें चरण और 26वें चरण में टाइलों की संख्या कितनी होगी? साथ ही यह भी बताइए कि किस चरण में टाइलों की संख्या 21 और 47 होगी?

उदाहरण 7— बेला के पास जेब खर्च के लिए ₹100 हैं। वह प्रतिदिन ₹5 खर्च करती है। कितने दिनों के पश्चात उसके पास ₹40 शेष बचेंगे?

दिन की संख्या	0	1	2	3	4
शेष राशि (₹)	100	$100 - 1 \times 5 = 95$	$100 - 2 \times 5 = 90$	$100 - 3 \times 5 = 85$	$100 - 4 \times 5 = 80$

© NCERT not to be republished

ध्यान दीजिए कि nवें दिन शेष राशि ₹$(100 - 5n)$ होगी। अत: 12वें दिन शेष राशि ₹ $(100 - 12 \times 5) =$ ₹40 होगी।

सोचिए और विचार कीजिए

बेला के पास 15वें दिन कितनी राशि शेष बचेगी? संपूर्ण राशि खर्च होने में कितने दिन लगेंगे?

उदाहरण 8 — एक ऑटो-रिक्शा का किराया ₹25 से प्रारंभ होता है और प्रारंभिक दो किलोमीटर के लिए यही किराया रहता है। उसके पश्चात इस किराए में ₹15 प्रति किलोमीटर की वृद्धि होती है। 10 किलोमीटर की यात्रा के लिए कितना किराया होगा?

प्रारंभिक दो किलोमीटर के लिए किराया ₹25 है। उसके पश्चात प्रति किलोमीटर के लिए किराए में ₹15 की वृद्धि होती है। इस प्रकार 10 किलोमीटर की यात्रा के लिए कुल किराया ₹$25 + 15 \times 8 =$ ₹145 होगा।

तय की गई दूरी (किलोमीटर में)	1	2	3	4	5	6
किराया (₹)	25	25	$25 + 1 \times 15 = 40$	$25 + 2 \times 15 = 55$	$25 + 3 \times 15 = 70$	$25 + 4 \times 15 = 85$

ध्यान दीजिए कि n किलोमीटर की यात्रा के लिए कुल किराया ₹$25 + 15 \times (n - 2) = 15n - 5$ है, जब $n \geq 2$, हो। यहाँ तय की गई किसी दूरी के लिए किराया, दूरी n किलोमीटर का फलन है।

सोचिए और विचार कीजिए

कितने किलोमीटर यात्रा के लिए ₹ 130 किराया होगा?

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए सभी उदाहरणों में nवाँ पद, चर n में एक रैखिक व्यंजक है। एक **रैखिक प्रतिरूप** संख्याओं का एक अनुक्रम है जहाँ दो क्रमागत पदों के मध्य अंतर अचर है। अनुक्रमों और श्रेढ़ियों के अध्याय में हम रैखिक प्रतिरूपों के विषय में और अधिक अध्ययन करेंगे।

प्रश्नावली 2.3

नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए—

1. एक विद्यार्थी के बचत बैंक खाते में ₹500 हैं। उसे ₹150 प्रतिमाह जेब खर्च के रूप में मिलते हैं। दूसरे महीने से लेकर प्रत्येक महीने के अंत में उसके खाते में कितनी धनराशि होगी? n वें महीने में उसके खाते में जमा धनराशि को दर्शाने के लिए रैखिक व्यंजक ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

2. एक रैली 120 सदस्यों के साथ प्रारंभ होती है। प्रत्येक घंटे के पश्चात 9 सदस्य समूह से बाहर हो जाते हैं। 1, 2, 3, … घंटे के पश्चात कितने सदस्य रैली में बने रहेंगे? nवें घंटे के अंत में शेष सदस्यों की संख्या ज्ञात करने के लिए रैखिक व्यंजक ज्ञात कीजिए।
3. मान लीजिए कि एक आयत की लंबाई 13 सेंटीमीटर है। आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसकी चौड़ाई— (i) 12 सेंटीमीटर (ii) 10 सेंटीमीटर (iii) 8 सेंटीमीटर हो। आयत के क्षेत्रफल को दर्शाने वाले रैखिक प्रतिरूप को भी ज्ञात कीजिए।
4. मान लीजिए कि एक आयताकार बक्से की लंबाई 7 सेंटीमीटर है और उसकी चौड़ाई 11 सेंटीमीटर है। बक्से का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि उसकी ऊँचाई— (i) 5 सेंटीमीटर (ii) 9 सेंटीमीटर (iii) 13 सेंटीमीटर हो। आयताकार बक्से के आयतन को दर्शाने वाले रैखिक प्रतिरूप को ज्ञात कीजिए।
5. सरिता 500 पृष्ठों वाली एक पुस्तक पढ़ रही है। वह प्रतिदिन 20 पृष्ठ पढ़ती है। 15 दिनों के पश्चात कितने पृष्ठ पढ़ने शेष रह जाएँगे। इसे एक रैखिक प्रतिरूप के माध्यम से दर्शाइए।

2.4 रैखिक वृद्धि और रैखिक ह्रास

रैखिक व्यंजक उन परिस्थितियों या परिघटनाओं को प्रदर्शित करने में सहायता करते हैं जहाँ वृद्धि या ह्रास होता है। नीचे दिए गए उदाहरणों पर विचार कीजिए—

उदाहरण 9 — किसी यात्रा का व्यय रैखिक फलन $C(d) = 100 + 60d$ द्वारा दर्शाया गया है। जहाँ C कुल व्यय (रुपयों में) दर्शाता है और d तय की गई दूरी किलोमीटर में दर्शाता है। आइए d के 0 से 10 किलोमीटर तक मानों के लिए एक तालिका बनाकर दर्शाएँ कि प्रत्येक किलोमीटर के लिए व्यय में किस प्रकार वृद्धि होती है—

तय की गई दूरी, d (किलोमीटर)	0	1	2	3	4	5
व्यय (₹)	100	160	220	280	340	400

इस उदाहरण में d के मान में एक किलोमीटर की वृद्धि होने पर व्यय फलन C के मान में एक निश्चित धनराशि ₹60 की वृद्धि होती है। यह **रैखिक वृद्धि** का एक उदाहरण है।

सोचिए और विचार कीजिए

15 किलोमीटर दूरी की यात्रा का व्यय कितना होगा? कितने किलोमीटर दूरी की यात्रा का व्यय ₹700 होगा?

उदाहरण 10 — ग्रीष्म ऋतु के प्रारंभ में एक बेलनाकार टंकी में पानी की ऊँचाई 3 मीटर है। t महीनों के अंत में पानी की ऊँचाई h मीटर को रैखिक फलन $h(t) = 3 - 0.5t$ द्वारा दर्शाया जाता है।

© NCERT not to be republished

महीना (t)	0	1	2	3	4
ऊँचाई, h (मी.)	3	2.5	2	1.5	1

उपर्युक्त उदाहरण में चूँकि t के मान में एक निश्चित संख्या (एक महीना) की वृद्धि होती है, अत: ऊँचाई h के मान में एक निश्चित संख्या (0.5) का ह्रास होता है। इस प्रकार, यह उदाहरण **रैखिक ह्रास** को दर्शाता है।

सोचिए और विचार कीजिए

5 माह के अंत में टंकी में पानी की ऊँचाई क्या होगी?

रैखिक वृद्धि उस रैखिक प्रतिरूप को दर्शाती है जिसमें कोई राशि समान अंतरालों के साथ अचर मान से बढ़ती है। इसी प्रकार, रैखिक ह्रास उस रैखिक प्रतिरूप को दर्शाता है जिसमें कोई राशि समान अंतरालों के साथ अचर मान से घटती है।

प्रश्नावली 2.4

1. मान लीजिए कि एक पौधे की ऊँचाई 1.75 फुट है और इसमें प्रतिमाह 0.5 फुट की वृद्धि होती है।
   (i) 7 महीनों के पश्चात पौधे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
   (ii) t के 0 से 10 महीनों तक के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि कैसे ऊँचाई h के मान में प्रतिमाह वृद्धि होती है।
   (iii) एक व्यंजक ज्ञात कीजिए जो h और t में संबंध व्यक्त करता है और यह भी समझाइए कि यह व्यंजक रैखिक वृद्धि को क्यों व्यक्त करता है।
2. एक मोबाइल फोन ₹10,000 में क्रय किया गया। इसके मूल्य में प्रतिवर्ष ₹800 का ह्रास होता है।
   (i) 3 वर्षों के पश्चात फोन का मूल्य ज्ञात कीजिए।
   (ii) t के 0 से 8 वर्षों तक के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि किस प्रकार फोन का मूल्य समय के साथ कम होता है।
   (iii) एक व्यंजक ज्ञात कीजिए, जो v और t में संबंध व्यक्त करता है और यह भी समझाइए कि यह रैखिक ह्रास को क्यों व्यक्त करता है।
3. एक गाँव की प्रारंभिक जनसंख्या 750 है। प्रतिवर्ष 50 व्यक्ति समीपस्थ शहर से गाँव में विस्थापित होते हैं।
   (i) 6 वर्षों के पश्चात गाँव की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।
   (ii) t के 0 से 10 वर्षों तक के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि कैसे जनसंख्या P के मान में प्रतिवर्ष वृद्धि होती है।

© NCERT not to be republished

(iii) एक व्यंजक ज्ञात कीजिए जो P और t में संबंध व्यक्त करता है और यह भी समझाइए कि यह व्यंजक रैखिक वृद्धि को क्यों व्यक्त करता है।

4. एक दूरभाष कंपनी किसी विशेष रिचार्ज योजना के लिए ₹600 शुल्क लेती है। रिचार्ज के पश्चात अग्रिम जमा राशि में से प्रतिदिन ₹15 कम होते हैं।

(i) एक समीकरण लिखिए, जो x दिनों तक योजना का उपयोग करने के पश्चात शेष धनराशि $b(x)$ को दर्शाता है।

(ii) कितने दिनों के पश्चात यह शेष धनराशि (बैलेंस) समाप्त हो जाएगी?

(iii) x के 1 से 10 दिनों के परिवर्ती मानों के लिए एक तालिका बनाइए और दर्शाइए कि कैसे शेष राशि $b(x)$ समय के साथ कम होती जाती है।

2.5 रैखिक संबंध

एक रैखिक संबंध, दो चरों x और y के मध्य संबंध दर्शाता है और इसे $y = ax + b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

आइए, चित्र 2.4 में वर्गाकर टाइलों के बढ़ते प्रतिरूप पर पुनः विचार करें। यदि x पद की संख्या को व्यक्त करता है और y वर्गाकार टाइलों की संख्या को दर्शाता है तो x व y के मध्य रैखिक संबंध को $y = 2x - 1$ के रूप में दर्शाया जाता है।

कभी-कभी हमें दो राशियों के मध्य रैखिक संबंध को ज्ञात करने की आवश्यकता हो सकती है।

उदाहरण 11 — एक टेलीकॉम कंपनी एक निश्चित मासिक शुल्क लेती है और इंटरनेट डेटा का उपयोग करने के लिए प्रति गीगा बाइट (जी.बी.) के लिए अतिरिक्त शुल्क लेती है। एक विद्यार्थी देखता है कि जब उसने 10 जी.बी. इंटरनेट डेटा का उपयोग किया तो उसका बिल ₹350 था और जब उसने 20 जी.बी. इंटरनेट डेटा का उपयोग किया तो उसका बिल ₹550 था। यदि मासिक बिल y, उपयोग किए गए डेटा की मात्रा x (जी.बी. में) पर निर्भर करता है तो संबंध $y = ax + b$ के अनुसार a और b के मान ज्ञात कीजिए।

ध्यान दीजिए कि x = जी.बी. में उपयोग किए गए इंटरनेट डेटा की मात्रा है और y = रुपये में कुल मासिक शुल्क है।

रैखिक संबंध $y = ax + b$ को ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि जब $x = 10$ है तो $y = 350$ है। साथ ही जब $x = 20$ है तो $y = 550$ है। इन मानों को $y = ax + b$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें नीचे दिए गए समीकरण प्राप्त होते हैं —

$$350 = 10a + b \text{ और } 550 = 20a + b$$

हम इन समीकरणों को इस प्रकार हल करते हैं — मान लीजिए $b = 350 - 10a$ (पहले समीकरण द्वारा)। इसे दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है —

$$550 = 20a + (350 - 10a)$$

इस प्रकार, $550 = 10a + 350$ या $10a = 200$ है। अतः $a = 20$ है। इससे हमें $b = 350 - 10a = 350 - 200 = 150$ प्राप्त होता है।

a और b के मानों को समीकरण $y = ax + b$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें $y = 20x + 150$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

इस प्रकार $y = 20x + 150$ उस रैखिक संबंध को दर्शाता है जहाँ y बिल की राशि (रुपयों में) और x उपयोग किए गए इंटरनेट डेटा की मात्रा (जी.बी. में) है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि समीकरण $y = 20x + 150$ में संख्याएँ 20 और 150 क्या दर्शाती हैं?

प्रश्नावली 2.5

1. एक अधिगम मंच (लर्निंग प्लेटफार्म) एक निश्चित मासिक शुल्क लेता है और साथ ही प्रति डिजिटल अधिगम मॉड्यूल के लिए अतिरिक्त शुल्क लेता है। एक विद्यार्थी ध्यान देती है कि जब उसने 10 मॉड्यूल्स प्राप्त किए तो उसका बिल ₹400 था और जब उसने 14 मॉड्यूल प्राप्त किए तो उसका बिल ₹500 था। यदि मासिक बिल y, प्राप्त किए गए मॉड्यूल की संख्या x पर निर्भर करता है तो संबंध $y = ax + b$ के अनुसार a और b के मान ज्ञात कीजिए।
2. एक व्यायामशाला (जिम) एक निश्चित मासिक शुल्क और प्रति घंटा बैंडमिंटन कोर्ट का उपयोग करने के लिए अतिरिक्त शुल्क लेती है। जिम जाने वाली एक विद्यार्थी ध्यान देती है कि जब उसने 10 घंटे के लिए बैडमिंटन कोर्ट का उपयोग किया तो उसका बिल ₹800 था और जब उसने बैडमिंटन कोर्ट का उपयोग 15 घंटे के लिए किया तो उसका बिल ₹1100 था। यदि मासिक बिल y, बैडमिंटन कोर्ट उपयोग करने के घंटों x पर निर्भर करता है तो संबंध $y = ax + b$ के अनुसार a और b के मान ज्ञात कीजिए।
3. डिग्री सेल्सियस (°C) और डिग्री फॉरेनहाइट (°F) में मापे गए तापमान के मध्य संबंध पर $°C = a°F + b$ के अनुसार विचार कीजिए। दिया गया है कि बर्फ 0 डिग्री सेल्सियस और 32 डिग्री फॉरेनहाइट पर पिघलती है और पानी 100 डिग्री सेल्सियस और 212 डिग्री फॉरेनहाइट पर उबलता है तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।
   (**संकेत** — जब $°C = 0$ तो $°F = 32$ और जब $°C = 100$ तो $°F = 212$ है। इस जानकारी का उपयोग करके a व b के मान तथा °C व °F के मध्य रैखिक संबंध ज्ञात कीजिए।)

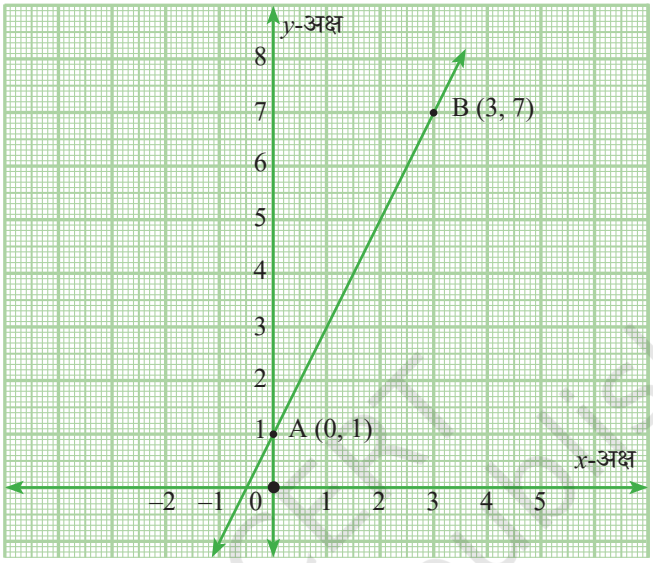
2.6 रैखिक संबंधों का दृश्यांकन

जैसा कि हम इस अध्याय के कई उदाहरणों में देख चुके हैं कि एक रैखिक प्रतिरूप या रैखिक संबंध को समीकरण $y = ax + b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अब हम ऐसे समीकरण को एक सरल रेखा के रूप में प्रदर्शित करना सीखेंगे।

आलेख पत्रक पर रैखिक समीकरण प्राप्त करने के लिए हमें रेखा पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को पहचानने की आवश्यकता है। उदाहरण के लिए $y = 2x + 1$ को प्रदर्शित करने के लिए हम किन्हीं दो बिंदुओं का पता लगा सकते हैं —

© NCERT not to be republished

जब $x = 0$ तो $y = 1$ होगा अतः (0, 1) रेखा पर स्थित एक बिंदु है। इसे हम बिंदु A कह सकते हैं। बिंदु A का x-निर्देशांक 0 है और y - निर्देशांक 1 है। साथ ही, जब $x = 3$ है तो $y = 7$ होगा। इस प्रकार B (3, 7) रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु है। हम इन बिंदुओं को निर्देशांक तल पर प्रदर्शित करते हैं, उन्हें मिलाते हैं और चित्र 2.5 में दर्शाए अनुसार रेखा का दोनों ओर विस्तार करते हैं।



चित्र 2.5 — सरल रेखा $y = 2x + 1$

सोचिए और विचार कीजिए

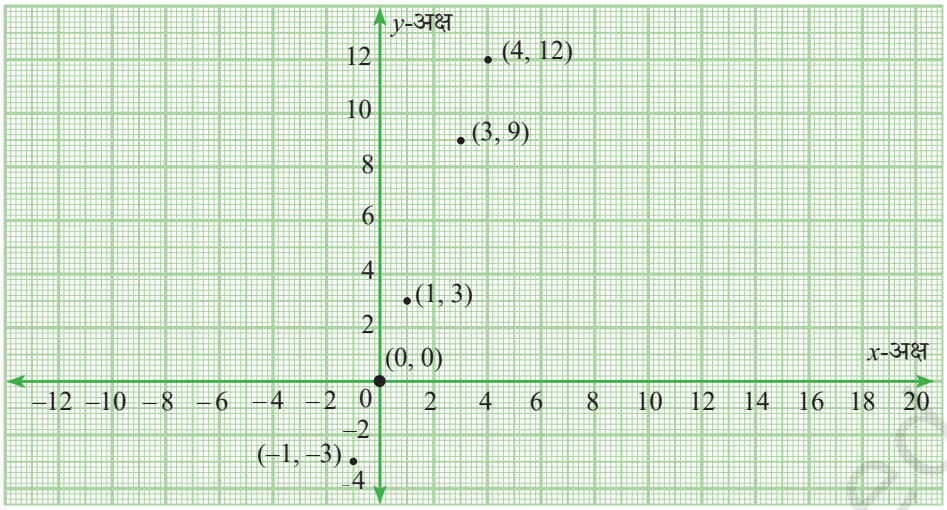
नीचे दी गई तालिका को पूर्ण करते हुए रेखा पर अन्य बिंदुओं का पता लगाइए।

x	1	2	5	7	9	12	20
y	3			15			

ध्यान दीजिए कि बिंदु (1, 3) और (7, 15) भी रेखा $y = 2x + 1$ पर स्थित हैं। इन बिंदुओं को रेखा पर प्रदर्शित कीजिए। इस कार्य के लिए आप एक आलेख-पत्रक (ग्राफ पेपर) का उपयोग कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि यदि कोई बिंदु किसी रेखा पर स्थित है तो इसके निर्देशांक रेखा के समीकरण को अवश्य ही संतुष्ट करेंगे। इस प्रकार $x = 7$ और $y = 15$ को समीकरण में प्रतिस्थापित करके हम जाँच सकते हैं कि बिंदु (7, 15), रेखा $y = 2x + 1$ पर स्थित है।

उदाहरण 12 — आइए, चित्र 2.6 में दर्शाए अनुसार एक आलेख-पत्रक पर निर्देशांक तल में बिंदुओं (–1, –3), (0, 0), (1, 3), (3, 9), (4, 12) को प्रदर्शित करते हैं। मापक (रूलर) का उपयोग करके बिंदुओं (–1, –3) और (4, 12) को मिलाइए। ऐसा करते समय ध्यान दीजिए कि सभी पाँच बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित हैं। प्रत्येक बिंदु के x और y-निर्देशांकों के मध्य संबंध को देखकर क्या आप इस रेखा के समीकरण का अनुमान लगा सकते हैं?

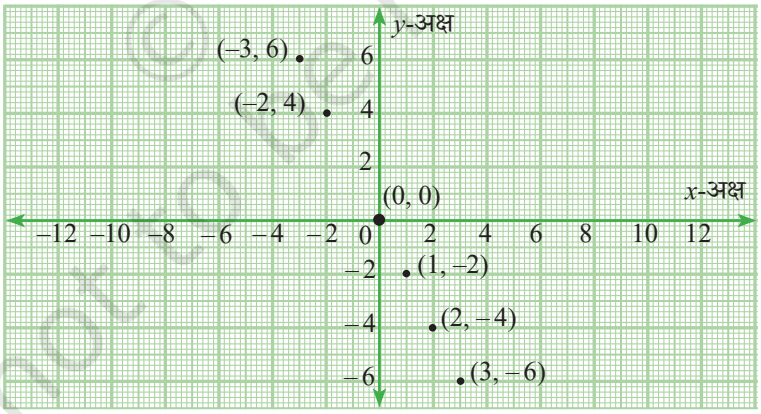
© NCERT not to be republished



चित्र 2.6

प्रत्येक बिंदु के लिए y-निर्देशांक का मान, x-निर्देशांक के मान का तीन गुना है। अतः हम कह सकते हैं कि समीकरण $y = 3x$ है।

उदाहरण 13 — आइए, चित्र 2.7 में दर्शाए अनुसार एक आलेख पत्रक पर निर्देशांक तल में बिंदुओं (–3, 6), (–2, 4), (0, 0), (1, –2), (2, –4), (3, –6) को प्रदर्शित करते हैं। मापक का उपयोग करके बिंदुओं (–3, 6) और (3, –6) को मिलाइए। ऐसा करते समय ध्यान दीजिए कि सभी पाँच बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित हैं। प्रत्येक बिंदु के x और y-निर्देशांकों के मध्य संबंध को देखकर क्या आप इस रेखा के समीकरण का अनुमान लगा सकते हैं?

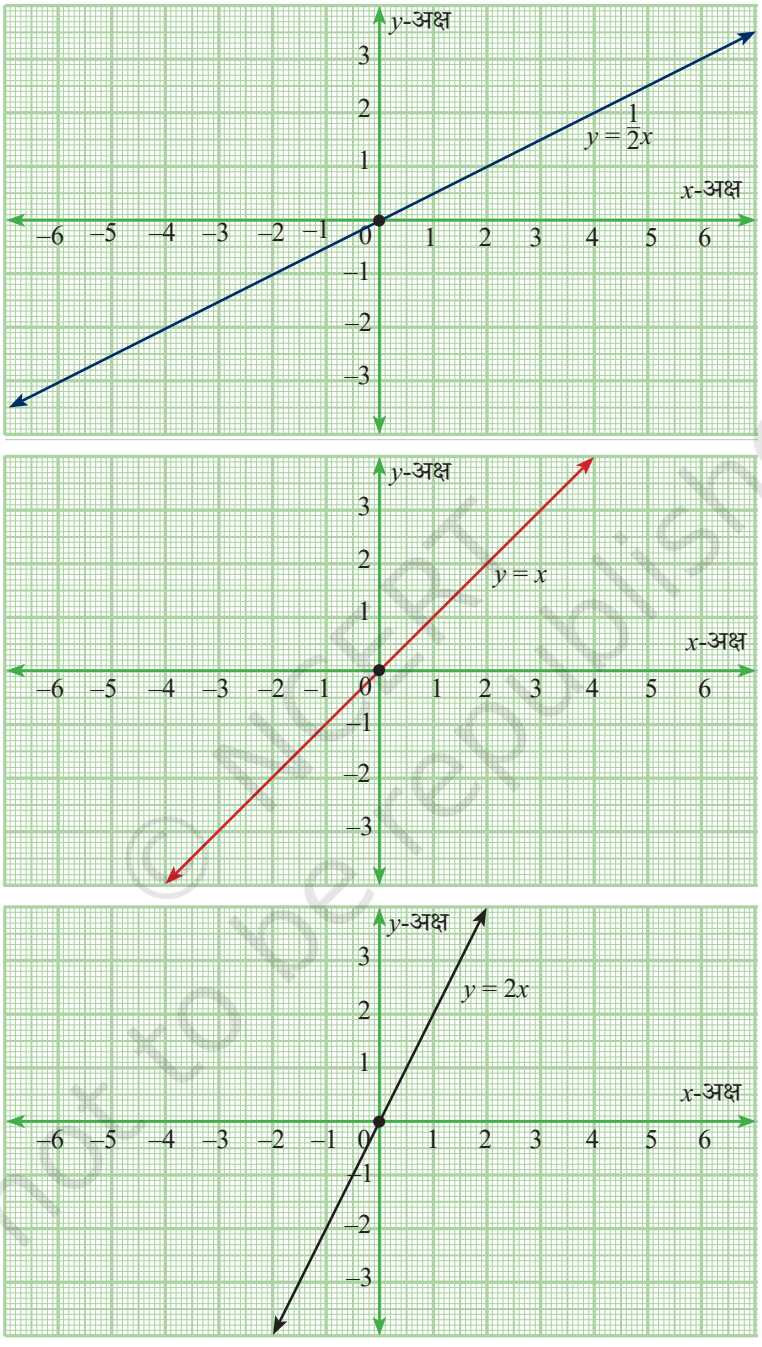


चित्र 2.7

उदाहरण 14 — रेखाओं पर उचित बिंदुओं का चयन करते हुए $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = 2x$ का आलेख बनाइए।

(**संकेत** — $y = \frac{1}{2}x$ का आलेख बनाने के लिए हम बिंदु (0, 0) और (4, 2) ले सकते हैं। क्या आप जाँच सकते हैं कि ये बिंदु आलेख की रेखा पर स्थित हैं?)

चित्र 2.8 में बिंदुओं को दर्शाए बिना इन रैखिक समीकरणों के आलेख दर्शाए गए हैं।

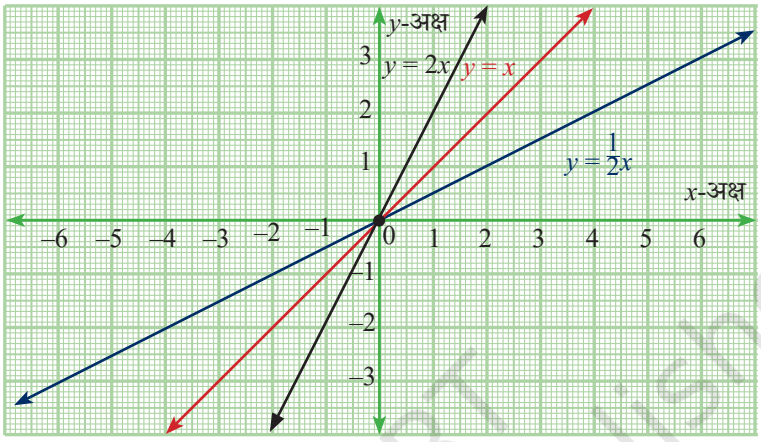


चित्र 2.8

© NCERT not to be republished

चित्र 2.9 में तीनों आलेख समान अक्ष पर दर्शाए गए हैं। क्या इससे आपको रैखिक समीकरण $y = ax$, जहाँ a का मान बदलने के साथ $a > 0$ है, के विषय में कोई निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है? क्या होता है जब $a > 1$ और जब $a < 1$ होता है?

(**संकेत** — आप समान अक्षों पर समीकरणों $y = 3x$ और $y = \frac{1}{3}x$ को प्रदर्शित कर सकते हैं।)



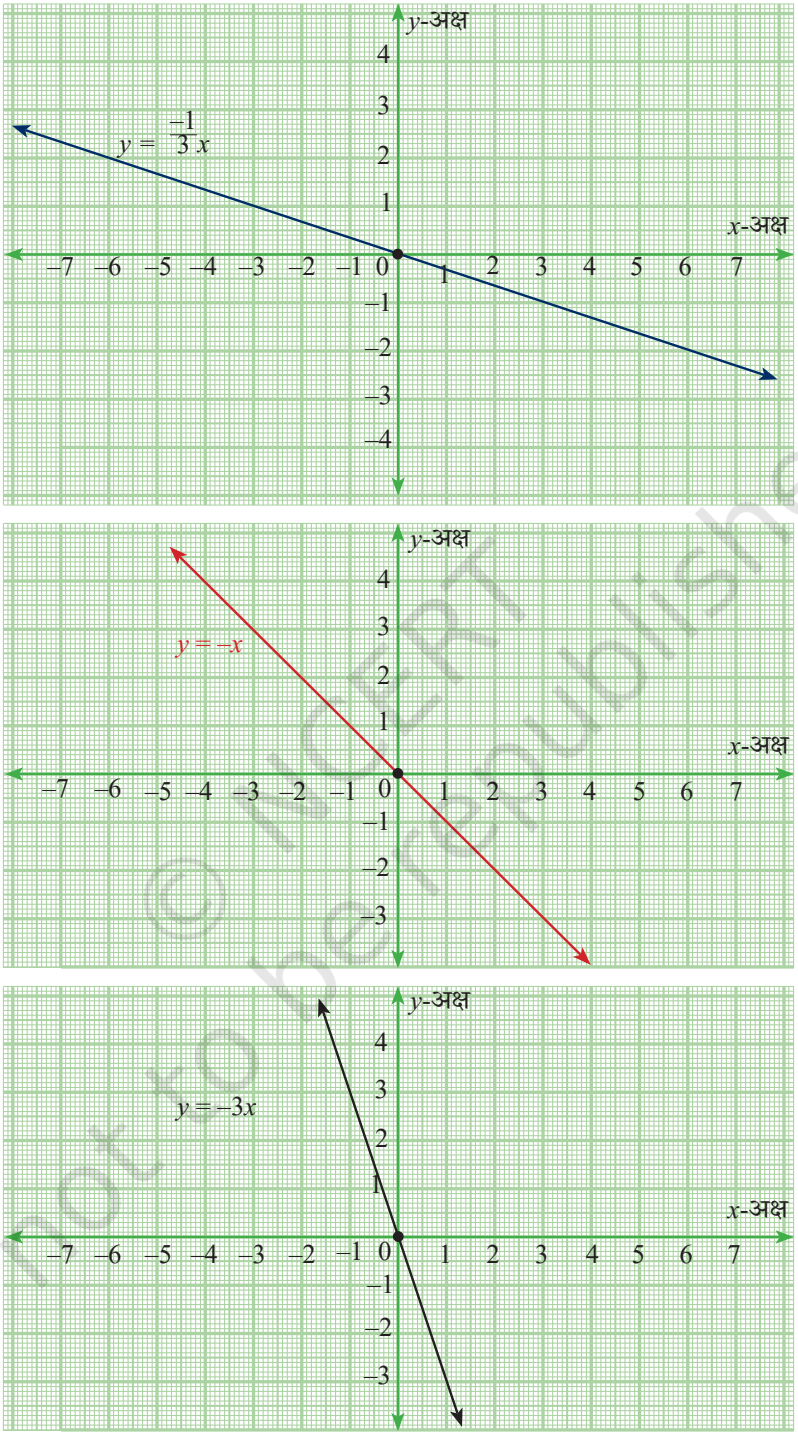
चित्र 2.9

सर्वप्रथम हम देखते हैं कि जो सरल रेखाएँ $y = ax$ के रूप में समीकरण को प्रदर्शित करती हैं, वे सदैव मूलबिंदु (0, 0) से होकर जाती हैं। इसके अतिरिक्त जब $a > 1$ है तब रेखा, $y = x$ रेखा की अपेक्षा अधिक ढलान वाली है जो दोनों अक्षों पर समान रूप से झुकी हुई है। यद्यपि जब $a < 1$ है तब रेखा, $y = x$ रेखा की अपेक्षा कम ढलान वाली है। वास्तव में a को रेखा $y = ax$ के ढलान के रूप में संदर्भित किया गया है। ढलान की अवधारणा के विषय में हम और अधिक अध्ययन रैखिक समीकरण के अध्याय में करेंगे।

अभी हम यहाँ अन्य महत्त्वपूर्ण अवलोकनों पर ध्यान देंगे। रैखिक वृद्धि को धनात्मक ढलान के साथ सरल रेखा से व्यक्त किया जाता है जबकि रैखिक ह्रास को ऋणात्मक ढलान के साथ सरल रेखा से दर्शाया जाता है। ध्यान दीजिए कि चित्र 2.4 में प्रतिरूप में वर्गाकार टाइलों की संख्या से हमें अनुक्रम 1, 3, 5, 7, … प्राप्त होता है जिसमें क्रमिक पदों के मध्य अंतर अचर मान 2 है। रेखा $y = 2x – 1$ का ढलान, जो पद-संख्या और वर्गाकार टाइलों की संख्या के मध्य रैखिक संबंध व्यक्त करता है, 2 है। अत: ढलान, क्रमागत पदों के मध्य अचर अंतर को दर्शाता है।

उदाहरण 15 — आइए, अब समीकरणों $y = \frac{-1}{3}x$, $y = –x$, $y = –3x$ के आलेख खींचते हैं जिसके लिए इन रेखाओं पर स्थित उचित बिंदुओं का चयन करना है। चित्र 2.10 में इन रैखिक समीकरणों के आलेख दिए गए हैं जिन पर किसी भी बिंदु को दर्शाया नहीं गया है।

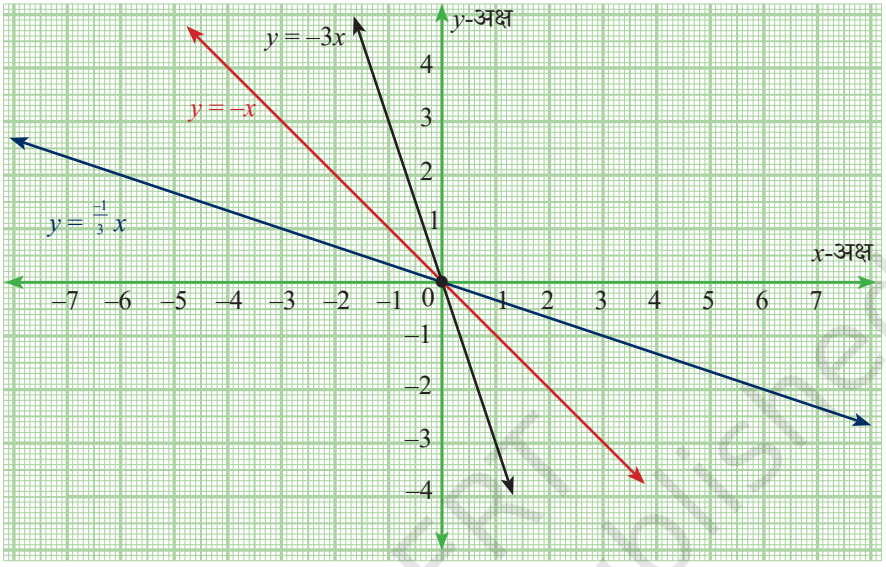
© NCERT not to be republished



चित्र 2.10

© NCERT not to be republished

चित्र 2.11 में तीनों आलेखों को समान अक्ष पर दर्शाया गया है। क्या इससे आपको रैखिक समीकरण $y = -ax$ (जहाँ a का मान बदलने के साथ $a > 0$ है), के विषय में कोई निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है? क्या होता है यदि $a > 1$ है और यदि $a < 1$ है?

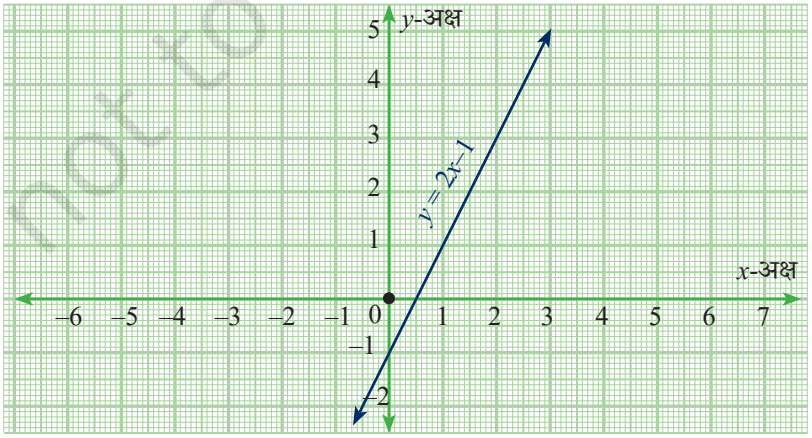


चित्र 2.11

सोचिए और विचार कीजिए

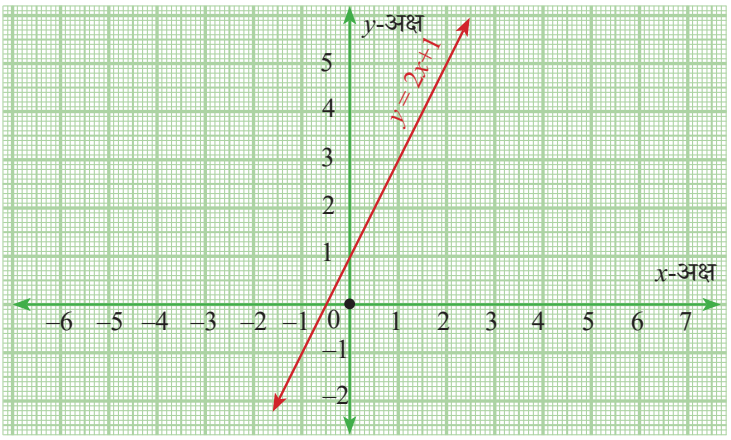
समीकरण $y = 3x + 1$ और $y = -3x + 1$ के आलेखों के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।

उदाहरण 16 — आइए, अब $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$, $y = 2x + 5$ के आलेख बनाते हैं। पहले ये आलेख अलग-अलग आलेख-पत्रकों पर (चित्र 2.12 में दर्शाए अनुसार) और तत्पश्चात समान अक्ष पर (चित्र 2.13 में दर्शाए अनुसार) बनाएँगे।

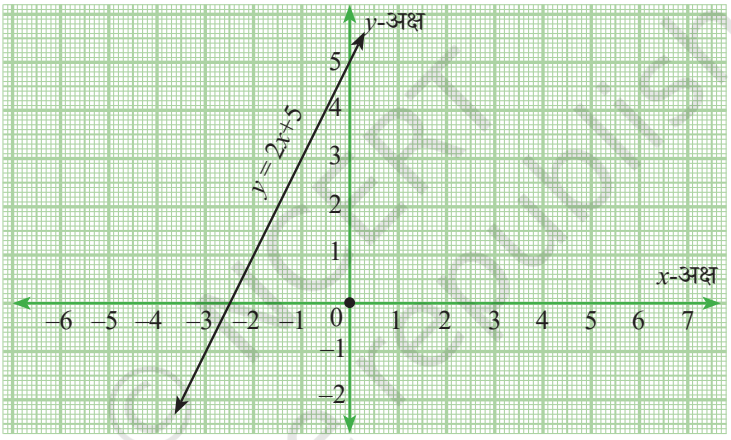


चित्र 2.12 (क)

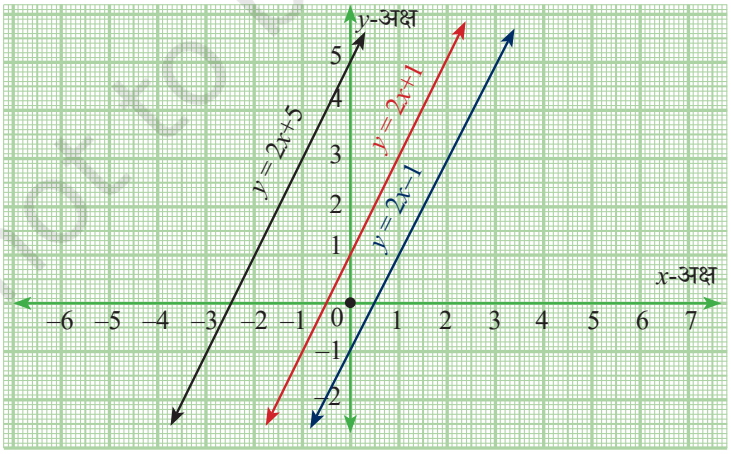
© NCERT not to be republished



चित्र 2.12 (ख)



चित्र 2.12 (ग)



चित्र 2.13

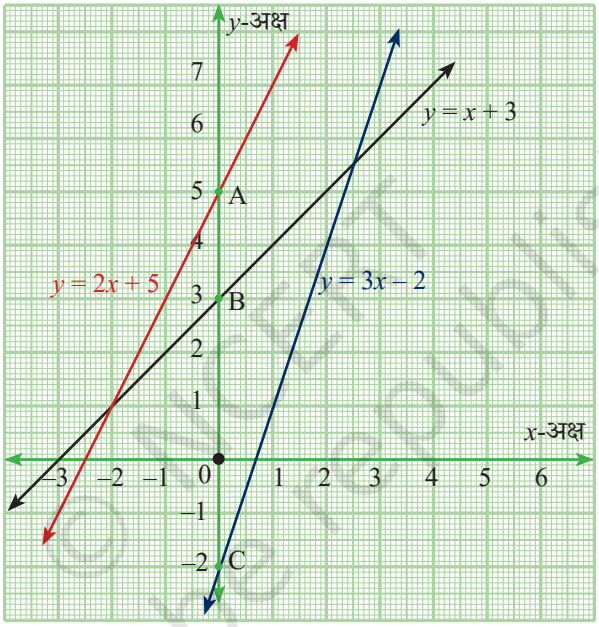
© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

क्या चित्र 2.13 में दिए गए आलेख में आपको रैखिक समीकरण $y = ax + b$ के विषय में कोई निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है, जब a का मान निश्चित है और b का मान परिवर्तित होता रहता है?

(**संकेत** — उदाहरण 16 में दिए गए समीकरणों में $a = 2$ है और b का मान क्रमश: -1, 1 और 5 हैं।)

आइए, अब समीकरणों $y = x + 3$, $y = 2x + 5$ और $y = 3x - 2$ के आलेख बनाते हैं। चित्र 2.14 को देखिए और ध्यान दीजिए कि ये रेखाएँ y-अक्ष को किस बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।



चित्र 2.14

हम देखते हैं कि —

$y = 2x + 5$, y-अक्ष को A (0, 5) पर प्रतिच्छेद करती है,

$y = x + 3$, y-अक्ष को B (0, 3) पर प्रतिच्छेद करती है, तथा

$y = 3x - 2$, y-अक्ष को C (0, -2) पर प्रतिच्छेद करती है।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $y = ax + b$ के रूप में लिखी कोई भी सरल रेखा y-अक्ष को बिंदु $(0, b)$ पर प्रतिच्छेद करती है। लंबाई b को रेखा का y-अंतःखंड कहा जाता है। इस प्रकार रेखा $y = x + 3$ का y-अंतःखंड 3 है। इसका अर्थ है कि यह रेखा y-अक्ष को मूलबिंदु से धनात्मक दिशा में

© NCERT not to be republished

3 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करती है। इसी प्रकार रेखा $y = 3x - 2$ का y-अंतःखंड -2 है। इसका अर्थ है कि यह रेखा y-अक्ष को मूलबिंदु से ऋणात्मक दिशा में 2 इकाई दूरी पर प्रतिच्छेद करती है।

चित्र 2.8 से चित्र 2.14 तक के आलेखों का अवलोकन करने के पश्चात हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं—

(i) समीकरण $y = ax + b$ में a रेखा की ढलान को प्रदर्शित करता है और b रेखा के y-अंतःखंड को प्रदर्शित करता है।

(ii) यदि हम b के मान को नियत रखते हुए a के मान में परिवर्तन करते हैं तो रेखा का ढलान परिवर्तित होता है जबकि रेखा का y-अंतःखंड नियत रहता है।

(iii) यदि हम a के मान को नियत रखते हुए b के मानों में परिवर्तन करते हैं तो रेखाओं के स्थान में परिवर्तन हो जाता है, किंतु ये रेखाएँ मूल रेखा के समानांतर रहती हैं। इस प्रकार, वे रेखाएँ जिनके ढलान समान हों किंतु y-अंतःखंड भिन्न हों, वे परस्पर समानांतर होती हैं।

प्रश्नावली 2.6

1. नीचे दिए गए रेखा समूहों के आलेख बनाइए। प्रत्येक स्थिति में 'a' और 'b' की भूमिका को व्यक्त कीजिए—

   (i) $y = 4x, y = 2x, y = x$

   (ii) $y = -6x, y = -3x, y = -x$

   (iii) $y = 5x, y = -5x$

   (iv) $y = 3x - 1, y = 3x, y = 3x + 1$

   (v) $y = -2x - 3, y = -2x, y = 2x + 3$

अंतिम प्रश्नावली

1. एक बहुपद लिखिए जिसमें चर x हो, घात 3 हो और x^2 पद का गुणांक -7 हो।
2. चरों के दिए गए मानों से नीचे दिए गए बहुपदों के मान ज्ञात कीजिए—

   (i) $5x^2 - 3x + 7$ यदि $x = 1$ हो।

   (ii) $4t^3 - t^2 + 6$ यदि $t = a$ हो।

© NCERT not to be republished

3. यदि हम किसी संख्या को $\frac{5}{2}$ से गुणा करते हैं और उसके गुणनफल में $\frac{2}{3}$ का योग करते हैं तो हमें $\frac{-7}{12}$ प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

4. कोई धनात्मक संख्या किसी अन्य संख्या की 5 गुना है। यदि दोनों संख्याओं में 21 जोड़ दिया जाए तो प्राप्त दोनों संख्याओं में से एक संख्या दूसरी संख्या की दोगुनी है। दोनों मूल संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

5. यदि आपके पास ₹800 हैं और आप प्रतिमाह ₹250 की बचत करते हैं तो वह धनराशि ज्ञात कीजिए, जो आपके पास होगी — (i) 6 महीनों के पश्चात (ii) 2 वर्षों के पश्चात। इसे रैखिक प्रतिरूप के रूप में व्यक्त कीजिए।

*6. एक दो-अंकीय संख्या के अंकों के मध्य का अंतर 3 है। यदि संख्या के दोनों अंकों को परस्पर परिवर्तित कर दिया जाए और प्राप्त संख्या को मूल संख्या में जोड़ दिया जाए तो हमें योगफल 143 प्राप्त होता है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

*7. नीचे दिए गए समीकरणों के आलेख बनाइए और उनके ढलानों व y-अंतःखंडों की पहचान कीजिए। साथ ही उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ ये रेखाएँ y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती हैं।

(i) $y = -3x + 4$

(ii) $2y = 4x + 7$

(iii) $5y = 6x - 10$

(iv) $3y = 6x - 11$

क्या इनमें से कोई भी रेखा परस्पर समानांतर है?

*8. यदि किसी द्रव के तापमान को केल्विन इकाई में x K के रूप में और फॉरेनहाइट इकाई में y °F के रूप में मापा जाता है तो तापमान मापन की दोनों प्रणालियों के मध्य संबंध, रैखिक समीकरण $y = \frac{9}{5}(x - 273) + 32$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(i) यदि द्रव का तापमान 313 K हो तो फॉरेनहाइट इकाई में द्रव का तापमान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि द्रव का तापमान 158 °F हो तो केल्विन इकाई में द्रव का तापमान ज्ञात कीजिए।

*9. किसी वस्तु पर नियत बल लगाने पर वस्तु द्वारा किया जाने वाला कार्य, नियत बल व बल की दिशा में वस्तु द्वारा तय की गई दूरी के गुणनफल के समान होता है। इसे दो चरों

© NCERT not to be republished

(कार्य w और दूरी d) में एक रैखिक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए। नियत बल को 3 इकाई लेते हुए आलेख बनाइए। यदि वस्तु द्वारा तय की गई दूरी 2 इकाई हो तो वस्तु द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। किए गए कार्य के मान और संगत दूरी को आलेख में दर्शाते हुए इस मान की जाँच भी कीजिए।

*10. एक रैखिक बहुपद $p(x)$ का आलेख बिंदुओं (1, 5) और (3, 11) से होकर जाता है।

(i) बहुपद $p(x)$ ज्ञात कीजिए।

(ii) उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिन पर $p(x)$ का आलेख दोनों अक्षों को प्रतिच्छेद करता है।

(iii) $p(x)$ का आलेख बनाइए और अपने उत्तरों की जाँच कीजिए।

*11. मान लीजिए, दो रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ और $q(x) = cx + d$ इस प्रकार हैं कि—

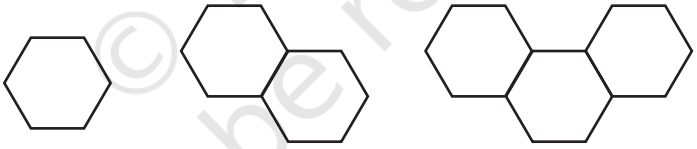
(i) $p(0) = 5$ है।

(ii) बहुपद $p(x) - q(x)$, x-अक्ष को बिंदु (3, 0) पर प्रतिच्छेद करता है।

(iii) योगफल $p(x) + q(x)$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए $6x + 4$ के समान है।

बहुपद $p(x)$ और $q(x)$ ज्ञात कीजिए।

*12. माचिस की तीलियों से निर्मित षट्भुजों के बढ़ते हुए प्रतिरूप के प्रथम तीन चरणों को देखिए। प्रत्येक स्तर पर एक नया षट्भुज जोड़ा जाता है जो इससे पूर्व के चरण में बनी आकृति के अंतिम षट्भुज की एक भुजा से जुड़ा होता है।



चरण 1 चरण 2 चरण 3

(i) इस प्रतिरूप के अग्रिम दो चरण बनाइए। इन चरणों में कितनी माचिस की तीलियों की आवश्यकता होगी?

(ii) नीचे दी गई तालिका को पूर्ण कीजिए—

चरण संख्या	1	2	3	4	5	...	n
माचिस की तीलियों की संख्या							

(iii) n वें चरण के लिए आवश्यक माचिस की तीलियों की संख्या का पता लगाने के लिए सूत्र ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

(iv) प्रतिरूप के 15वें चरण के लिए माचिस की कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?

(v) क्या माचिस की 200 तीलियों से इस प्रतिरूप में कोई चरण निर्मित हो सकता है? अपने उत्तर को प्रमाणित कीजिए।

*13. मान लीजिए $p(x) = ax + b$ और $q(x) = cx + d$ दो रैखिक बहुपद इस प्रकार हैं कि —

(i) बहुपद $p(x)$ का आलेख, बिंदुओं (2, 3) और (6,11) से होकर जाता है।

(ii) बहुपद $q(x)$ का आलेख, बिंदु (4, −1) से होकर जाता है।

(iii) बहुपद $q(x)$ का आलेख, बहुपद $p(x)$ के आलेख के समानांतर है।

बहुपदों $p(x)$ और $q(x)$ को ज्ञात कीजिए। इसके अतिरिक्त, उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिस पर ये रेखाएँ x-अक्ष से मिलती हैं।

*14. $f(x) = ax + a$, जहाँ $a > 0$ है, के रूप के सभी रैखिक फलनों में कौन-सा गुण सामान्य है?

सारांश

- किसी **बीजीय व्यंजक** में संख्याएँ, चर राशियाँ और गणितीय संक्रियाओं के चिह्न विद्यमान होते हैं। उदाहरण के लिए बीजीय व्यंजक $2x^2 + 5xy - 3y^2$ में x व y **चर** हैं, $2x^2$, $5xy$ व $-3y^2$ **पद** हैं और संख्याएँ 2, 5 व −3 पदों के **गुणांक** हैं।
- **एकचरीय व्यंजक** वे बीजीय व्यंजक हैं जिनमें एक ही चर होता है। इस प्रकार $x^2 + 5x + 3$ और $3y^3 - 4y^2 + 5$ क्रमशः x और y में एकचरीय व्यंजक हैं। किसी एकचरीय व्यंजक में चर की उच्चतम घातांक उस व्यंजक की **घात** कहलाती है। इस प्रकार $x^2 + 5x + 3$ की घात 2 है जबकि $3y^3 - 4y^2 + 5$ की घात 3 है।
- जिस बहुपद की घात एक होती है उसे **रैखिक बहुपद** कहते हैं। अतः रैखिक बहुपद $2x + 3$ और $5 - 4y$ में चर क्रमशः x और y हैं।
- **रैखिक वृद्धि** का तात्पर्य उस प्रतिरूप से है जिसमें कोई राशि समान समयांतरालों में एक निश्चित दर से वृद्धि करती है। इसके विपरीत **रैखिक ह्रास** उस प्रतिरूप को दर्शाता है जिसमें कोई राशि समान समयांतरालों में एक निश्चित दर से घटती है।
- **रैखिक प्रतिरूप** संख्याओं का एक अनुक्रम है जिसमें क्रमागत पदों के मध्य अंतर अचर (निश्चित) होता है।
- दो चरों x व y के मध्य **रैखिक संबंध** को सरल रेखा $y = ax + b$ से व्यक्त किया जाता है। इस रेखा का ढलान a है। अचर b को y-अंतःखंड कहा जाता है जो मूलबिंदु से उस बिंदु की दूरी है जिस पर रेखा y-अक्ष को प्रतिच्छेद करती है। जब $b = 0$ हो तो रेखा का समीकरण $y = ax$ है और रेखा मूलबिंदु से होकर जाती है।

© NCERT not to be republished

- **रैखिक वृद्धि** को धनात्मक ढलान के साथ एक सरल रेखा से दर्शाया जाता है और **रैखिक ह्रास** को ऋणात्मक ढलान के साथ एक सरल रेखा से दर्शाया जाता है।
- समानांतर रेखाएँ $y = ax + b$ के रूप में होती हैं, जहाँ ढलान a निश्चित होता है और y-अंतःखंड b का मान परिवर्तित होता है।

© NCERT not to be republished

3 संख्याओं का संसार

0920CH03

3.1 गणित का उदय — गिनती करने की मानवीय आवश्यकता

मानव द्वारा नगरों के निर्माण, सूत्रबद्ध नियमों और सिद्धांतों अथवा तारों के अध्ययन करने के बहुत पहले एक आधारभूत एवं व्यावहारिक आवश्यकता अस्तित्व में थी — गिनती करते रहने की आवश्यकता। गणित का उद्भव कक्षाओं में श्यामपट्ट पर समीकरणों को हल करने से नहीं हुआ है, इसका उद्भव धूल-मिट्टी में, वृक्ष की छालों पर और अस्थियों पर हुआ है।

कल्पना कीजिए कि आप सहस्त्रों वर्ष पूर्व सरस्वती नदी के तट पर स्थित एक छोटी-सी कृषक बस्ती में निवास कर रहे हैं। आपके पास मवेशियों का एक झुंड है। प्रत्येक सुबह वे चरने के लिए घने जंगलों में जाते हैं और संध्या के समय लौट आते हैं। आप यह कैसे सुनिश्चित करेंगे कि एक बछड़ा झुंड से अलग नहीं हो गया है? संख्याओं के लिए शब्दों और लिपिबद्ध प्रतीकों के बिना मानव इसका समाधान **एकैकी-संगतता** (वन-टू-वन कॉरसपोंडेंस) की संकल्पना से किया करते थे।

बस्ती से चरागाह की ओर जाने वाली प्रत्येक गाय के लिए चरवाहा मिट्टी के घड़े में एक कंकड़ डालता था। संध्या में प्रत्येक गाय के वापस आने पर वह एक कंकड़ को निकाल लेता था। यदि दिन के अंत में मिट्टी का घड़ा खाली हो जाता तो इसका अर्थ होता था कि पशुओं का झुंड सुरक्षित है। यदि घड़े में कंकड़ शेष रहते थे तो इसका अर्थ था कि गायें छूट गई होंगी या मार्ग भटक गई होंगी। एक वस्तु से दूसरी वस्तु के मिलान करने के इस सरल कार्य से ही **प्राकृत संख्याओं** ($N = \{1, 2, 3, 4, \ldots.\}$) का जन्म हुआ।

3.1.1 अस्थियों पर लिखा गया इतिहास

वर्तमान में उपयोग होने वाली दशमलव स्थानीय-मान प्रणाली को सुव्यस्थित रूप से प्रस्तुत करने का कार्य भारतीय उपमहाद्वीप में हुआ है, वहीं मानवीय इतिहास में प्राकृत संख्याओं के अंकन के प्रारंभिक साक्ष्य हमें अफ्रीका की सभ्यताओं में मिलते हैं। प्रारंभिक गणितज्ञ कागज का उपयोग नहीं करते थे, वे अस्थियों पर उकेरे गए गिनती के चिह्नों का उपयोग करते थे।

लेबोम्बो अस्थि की खोज लगभग 35,000 वर्ष पूर्व दक्षिण अफ्रीका और स्वाजीलैंड के मध्य स्थित लेबोम्बो पर्वत में हुई थी। यह एक प्रकार की अस्थि है जिसमें सोच-समझकर कर उकेरे गए 29 समरूप खाँचे बने हुए हैं। मानवविज्ञानियों और गणितज्ञों का ऐसा विश्वास है कि उकेरने का यह कार्य अनायास नहीं था, अपितु एक ऐसा उपाय था, जिसका उपयोग चंद्रमा की कलाओं या मासिक धर्म की

© NCERT not to be republished

गणना के लिए किया जाता था, जो यह संकेत करता है कि आदिमानव प्राकृत संख्याओं के माध्यम से समय का पता लगाते थे।

इससे भी अधिक रोचक **इशांगो अस्थि** है, जो कांगो लोकतांत्रिक गणराज्य में नील नदी के उद्गम के निकट पाई गई और जिसका तिथि निर्धारण 20,000 सामान्य संवत पूर्व किया गया है। इस अस्थि में असमान खाँचों के तीन स्तंभ पाए गए हैं। इशांगो अस्थि को गणितीय उत्कृष्टता का प्रतीक माने जाने का कारण इसमें विद्यमान रेखाओं का विशिष्ट समूहन है। इन स्तंभ समूहों में से एक में 11, 13, 17 और 19 खाँचें हैं जो 10 से लेकर 20 के मध्य की अभाज्य संख्याएँ हैं। अन्य स्तंभ 2 से गुणा करने (दोगुना) की संकल्पना को प्रस्तुत करता हुआ प्रतीत होता है। ये प्राचीन अवशेष यह इंगित करते हैं कि वस्तुतः 'संख्या' की अमूर्त संकल्पना कई हजार वर्ष पुरानी है।



चित्र 3.1 — इशांगो अस्थि पर पाए गए अभाज्य संख्या मिलान-रेखा समूहों का निरूपण

3.1.2 भारतीय संदर्भ में व्यापार और खगोलिकी

जैसे-जैसे सभ्यताएँ उन्नत होती गईं, वैसे-वैसे बृहत् संख्याओं की आवश्यकता भी बढ़ती गई। सिंधु घाटी सभ्यता के प्राचीन नगरीय केंद्रों, जैसे — लोथल और हड़प्पा में, व्यापार के लिए मानकीकृत माप और भार आवश्यक हो गए थे। मेसोपोटामिया से लाजवर्द मणि, पकी हुई मिट्टी से निर्मित मृदभांडों या सूती वस्त्रों का व्यापार करने वाले व्यापारियों के लिए सुदृढ़ लेखा प्रणाली आवश्यक थी।

वैदिक काल में, भारतीय दार्शनिक बृहत् संख्याओं को लेकर अति रोमांचित थे और उन्होंने इस संदर्भ में गहन चिंतन-मनन किया। सहस्त्रों वर्ष पूर्व वेदों में 10 से लेकर 10^{12} तक के सभी घातांकों का नामकरण किया गया है (जिन्हें 'परार्ध' कहा गया था)। चौथी शताब्दी सामान्य संवत पूर्व की *ललितविस्तर* में बुद्ध ने 10^{53} तक के नामों का वर्णन किया है, जिसे 'तल्लक्षण' कहा जाता है।

10 के घातांकों के रूप में राशियों को व्यक्त करने का कार्य *ऋग्वेद* में स्पष्ट रूप से किया गया है। इस प्रकार, भारत में आगामी वर्षों के दौरान 10 के घातांकों पर आधारित संख्या पद्धति विकसित करने की पृष्ठभूमि बनाई गई, जिसका उपयोग वर्तमान में संपूर्ण विश्व में हो रहा है। स्थानीय मान और 10 के घातांकों पर आधारित भारतीय संख्या पद्धति के विकास ने संभवत: सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण गणितीय आविष्कार 'शून्य की अवधारणा' का मार्ग प्रशस्त करने में सहयोग किया।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 3.1

1. बंदरगाह नगर लोथल में एक व्यापारी ताम्र शिलिकाओं को लेने के लिए मसालों की थैलियों का विनिमय करता है। वह मसाले की प्रत्येक 2 थैलियों से 15 ताम्र शिलिकाएँ लेता है। यदि वह बाजार में मसालों की 12 थैलियाँ लेकर जाता है तो वह उनके बदले कितनी ताम्र शिलिकाएँ बाजार से लेकर आएगा?
2. इशांगो अस्थि के एक स्तंभ पर संख्याओं का अनुक्रम— 11, 13, 17, 19 देखिए। इन संख्याओं में क्या समानता है? इस प्रतिरूप में उपयुक्त आगामी तीन संख्याओं को सूचीबद्ध कीजिए।
3. हमें ज्ञात है कि प्राकृत संख्याएँ योग के अंतर्गत संवृत होती हैं (किन्हीं दो प्राकृत संख्याओं का योग सदैव एक प्राकृत संख्या होती है)। क्या संख्याएँ घटाव के अंतर्गत संवृत होती हैं? अपने उत्तर को सिद्ध करने हेतु कुछ उदाहरण दीजिए।

*4. प्राचीन भारत के निवासी गणना करने के लिए अपनी अंगुलियों की संधियों का उपयोग करते थे, जो वर्तमान में भी प्रचलन में है। प्रत्येक अंगुली में तीन संधियाँ होती हैं और अंगूठे का उपयोग उन्हें गिनने के लिए किया जाता है। एक हाथ पर आप कितनी गिनती कर सकते हैं? यह प्राचीन आधार-12 गणन पद्धतियों से कैसे संबंधित है?

3.2 शून्य की क्रांति— जब 'कुछ नहीं', 'कुछ है' में परिवर्तित हो गया

हजारों वर्षों तक संख्या रेखा का आरंभ 1 से होता था। यदि आपके पास पाँच सेब हैं और आपने सभी सेब दे दिए तो आपके पास ऐसी कोई संख्या विद्यमान नहीं थी जो आपकी स्थिति को प्रस्तुत कर सकती हो। स्वाभाविक रूप से, आपके पास एक ही शब्द शेष रहता था— रिक्तता अर्थात सेबों का समाप्त हो जाना। बेबीलोन और माया जैसी सभ्यताओं ने किसी संख्या में रिक्त स्तंभ को दर्शाने के लिए स्थानधारक प्रतीक चिह्नों का उपयोग किया, परंतु उन्होंने 'कुछ नहीं होने' को किसी संख्या द्वारा प्रदर्शित किए जाने पर विचार नहीं किया, जिसे हम जोड़, घटा या गुणा कर सकें।

यह ब्रह्मगुप्त (628 सामान्य संवत) का ही कार्य था, जिन्होंने औपचारिक रूप से रिक्तता को एक संख्या में रूपांतरित किया। वास्तव में, उनके इस कार्य ने गणित को ही रूपांतरित कर दिया। यह ऐतिहासिक प्रगति, भारतीय दार्शनिक परंपराओं से ही अभिप्रेरित थी।

3.2.1 दर्शनशास्त्र से गणित की ओर— शून्यता की संकल्पना

सातवीं शताब्दी सामान्य संवत पूर्व के बहुत पहले से स्थापित विपुल बौद्ध साहित्य और उपनिषदों में **शून्यता** की संकल्पना (रिक्तता) एक गहन अवस्था में थी, जो योग और ध्यान

© NCERT not to be republished

का लक्ष्य थी। 'शून्यता' शब्द का उपयोग इन ग्रंथों में व्यापक रूप से किया गया है जिसका उद्देश्य किसी व्यक्ति विशेष की उस अवस्था का वर्णन करने के लिए किया गया है जो वह ध्यानावस्था के दौरान प्राप्त करने के लिए प्रयासरत रहता है अर्थात पूर्ण स्थायित्व और प्रशांति की अवस्था प्राप्ति के लिए किसी के मस्तिष्क को सभी वृत्तियों (मस्तिष्क का आरोह-अवरोह) से मुक्त करना। तीसरी शताब्दी सामान्य संवत पूर्व के आस-पास पतंजलि ने *योग सूत्र* में भी शून्यता के सिद्धांत का वर्णन इस अर्थ और संदर्भ में किया है कि कैसे शून्यता का सिद्धांत किसी व्यक्ति विशेष को अपने मस्तिष्क, शरीर और इंद्रियों को नियंत्रित करने में सहायता प्रदान करता है।

चूँकि भारतीय विचारकों ने इस 'रिक्तता अवस्था' का सम्मान किया, अतः उन्हें दर्शन में शून्यता को एक संकल्पना के रूप में प्रतिपादित करने हेतु आवश्यक संकल्पनात्मक रूपरेखा प्राप्त हुई। शून्यता का यह सिद्धांत विभिन्न क्षेत्रों, जैसे — वास्तुकला, साहित्य, भाषा-विज्ञान से होते हुए आर्यभट और अंततः ब्रह्मगुप्त की कृतियों के माध्यम से गणित में अपने मार्ग को प्रशस्त करता गया।

इस प्रकार, रिक्तता का यह दार्शनिक सिद्धांत, गणितीय शून्य में परिवर्तित होकर और भी सुस्पष्ट हो गया।

3.2.2 बख्शाली पांडुलिपि और ब्रह्मगुप्त के नियम

वर्तमान में उपयोग की जा रही हिंदू संख्या पद्धति में रिक्त स्थान से एक चिह्न में भौतिक रूपांतरण को प्रत्यक्षतः *बख्शाली पांडुलिपि* में देखा जा सकता है जिसका तिथि निर्धारण आरंभिक सामान्य संवत शताब्दियों में किया गया। इसमें गहरे रंग के बिंदु से शून्य को प्रदर्शित किया जाता था।

यद्यपि, एक चिह्न किसी पृष्ठ पर अंकन मात्र है जब तक कि यह नियमबद्ध नहीं हो जाता है। शून्य का पूर्ण रूप से संक्रियात्मक संख्या में रूपांतरण **ब्रह्मगुप्त** की कृति में हुआ। उनकी मौलिक कृति *ब्रह्मस्फुटसिद्धांत* (628 सामान्य संवत) में उन्होंने स्पष्ट रूप से किसी संख्या में से स्वयं अर्थात उसी संख्या को घटाने का परिणाम ($a - a = 0$) शून्य माना है।

तत्पश्चात ब्रह्मगुप्त ने 'शून्य' के साथ अंकगणित के मूलभूत नियमों को प्रतिपादित किया।

ब्रह्मगुप्त के शून्य संबंधी नियम

- यदि किसी संख्या में शून्य का योग किया जाता है तो संख्या अपरिवर्तित रहती है — $a + 0 = a$
- यदि किसी संख्या में से शून्य को घटाया जाता है तो संख्या अपरिवर्तित रहती है — $a - 0 = a$
- यदि किसी संख्या को शून्य से गुणा किया जाता है तो परिणाम शून्य होता है — $a \times 0 = 0$

© NCERT not to be republished

3.3 पूर्णांक — क्षितिज का विस्तार

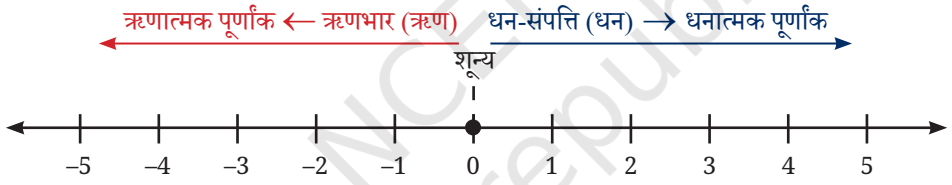
ब्रह्मगुप्त 'शून्य' तक ही नहीं रुके। उन्होंने अनुभव किया कि यदि किसी संख्या में से स्वयं को घटाया जाता है तो परिणाम शून्य ($5 - 5 = 0$) प्राप्त होता है। अब यदि हम छोटी संख्या में से एक बड़ी संख्या को घटाएँ तो क्या होगा? ($3 - 5 = \square$)?

इसका उत्तर प्राप्त करने के लिए ब्रह्मगुप्त ने अपने गणित को वाणिज्य और जीवन की वास्तविकता से जोड़ने का प्रयत्न किया।

उन्होंने दो स्थितियों का अवलोकन किया —

- **धन-संपत्ति (धन)** — सकारात्मक संख्याएँ, जो धन और संपत्ति को दर्शाती हैं।
- **ऋणभार (ऋण)** — नकारात्मक संख्याएँ, जो ऋणभार को दर्शाती हैं।

संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर स्थित संख्याओं को परिभाषित करके ब्रह्मगुप्त ने सर्वप्रथम **'ऋण संख्याओं'** का औपचारिक परिचय विश्व के समक्ष प्रस्तुत किया। धनात्मक प्राकृतिक संख्याओं, उनकी समकक्ष ऋणात्मक संख्याओं और शून्य संयोजन से **पूर्णांकों** के समुच्चय का निर्माण होता है, जिसे चिह्न Z (जर्मन शब्द 'जाहलेन' से व्युत्पन्न, जिसका अर्थ 'संख्याएँ' होता है) से दर्शाया जाता है।



चित्र 3.2

3.3.1 पूर्णांकों का अंकगणित

ब्रह्मगुप्त ने इन पूर्णांकों के योग और गुणन के लिए स्पष्ट नियमावली प्रदान की थी, जिसका उपयोग हम वर्तमान में भी ठीक उसी प्रकार कर रहे हैं जैसी उन्होंने 1300 वर्ष पूर्व लिखी थी —

1. **धन-संपत्ति और धन-संपत्ति के योग का परिणाम धन-संपत्ति होता है** $5 + 4 = 9$
2. **ऋणभार और ऋणभार के योग का परिणाम ऋणभार होता है** $(-5) + (-4) = -9$ (यदि आप पर ₹5 का ऋणभार है और आपने ₹4 और उधार ले लिए तो आपका कुल ऋणभार 9 होगा।)
3. **किसी धन-संपत्ति से शून्य को घटाने पर परिणाम धन-संपत्ति प्राप्त होता है, उसी प्रकार ऋणभार से शून्य को घटाने पर परिणाम ऋणभार प्राप्त होता है** $7 - 0 = 7$ और $-6 - 0 = -6$
4. **किसी धन-संपत्ति और ऋणभार का गुणनफल एक ऋणभार होता है** $(-3) \times 4 = -12$
5. **दो ऋणभारों का गुणनफल एक धन-संपत्ति होता है** $(-3) \times (-4) = 12$

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

एक ऋणात्मक संख्या को दूसरी ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर धनात्मक संख्या क्यों प्राप्त होती है? इस पर क्रियाविधि और ऋण के संदर्भ में विचार कीजिए। यदि एक ऋणात्मक संख्या ऋणभार को दर्शाती है तो इसे ऋणात्मक संख्या से गुणा करना ऋण के निरस्तीकरण को अभिव्यक्त करता है।

(संकेत — यदि कोई आपके चार ऋणभार, जिनमें से प्रत्येक ₹3 मूल्य (अर्थात -3) का है, को आपसे ले लेता है तो प्रभावी रूप से आप ₹12 से धनी हो जाते हैं। इस प्रकार, $(-3) \times (-4) = +12$ होता है।

प्रश्नावली 3.2

1. मध्याह्न के समय उच्च तुंगता वाले लद्दाख के मरुस्थल में तापमान $4^{\circ}C$ अंकित किया गया है। मध्यरात्रि के समय इसके तापमान में $15^{\circ}C$ की कमी हो जाती है। मध्यरात्रि का तापमान क्या है?
2. एक मसाला-व्यापारी ₹850 का ऋण लेता है। अगले दिन उसे ₹1200 का लाभ (धन) प्राप्त होता है। आने वाले सप्ताह में उसे ₹450 की हानि होती है। इस अनुक्रम को पूर्णांकों का उपयोग करते हुए समीकरण के रूप में लिखिए और उसके अंतिम लाभ-हानि की गणना कीजिए।
3. ब्रह्मगुप्त के नियमों का उपयोग करते हुए निम्नलिखित की गणना कीजिए —

   (i) $(-12) \times 5$ (ii) $(-8) \times (-7)$

   (iii) $0 - (-14)$ (iv) $(-20) \div 4$
4. वास्तविक जीवन से संबंधित ऋणभार के एक उदाहरण का उपयोग करते हुए विस्तारपूर्वक बताइए कि किसी ऋणात्मक संख्या को घटाना, एक धनात्मक संख्या का योग करने के समान क्यों है (जैसे $10 - (-5) = 15$)।

3.4 रिक्त स्थानों की पूर्ति करना — भिन्न और परिमेय संख्याएँ

जैसे-जैसे समाज अधिक जटिल होता गया, मापन भी गणना करने के समान ही महत्त्वपूर्ण होता गया। यदि एक कृषक गेहूँ के खेत को अपने तीन पुत्रों में विभाजित करता है तो प्रत्येक को कितना भाग मिलेगा? यदि किसी व्यंजन को बनाने में आधा प्याला घी चाहिए तो इसे हम गणितीय रूप में कैसे व्यक्त करेंगे?

वे संख्याएँ जो एक संपूर्ण के भागों को प्रस्तुत करती हैं, **भिन्न** कहलाती हैं। ठीक वैसे ही, जैसे प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक योज्य व्युत्क्रम होता है (3 का -3 है, 19 का -19 आदि), हम प्रत्येक धनात्मक भिन्न के लिए एक योज्य व्युत्क्रम की कल्पना कर सकते हैं, जैसे $-\frac{3}{4}$ के लिए $\frac{3}{4}$, $-\frac{19}{7}$ के

© NCERT not to be republished

लिए $\frac{19}{7}$ इत्यादि। आइए, हम ऐसी धनात्मक भिन्नों के योज्य व्युत्क्रम को ऋणात्मक भिन्नों से इंगित करते हैं। ध्यान दीजिए कि एक ऋणात्मक भिन्न में, '–' का चिह्न या तो अंश या हर के साथ प्रयुक्त किया जा सकता है, जैसे $-\frac{1}{5} = \frac{-1}{5} = \frac{1}{-5}$

जब हम सभी पूर्णांकों और सभी भिन्नों (धनात्मक और ऋणात्मक, दोनों) को संयोजित करते हैं, तो हमें **'परिमेय संख्याओं'** का समुच्चय प्राप्त होता है, जिसे Q (भागफल के लिए) द्वारा दर्शाया जाता है।

एक **परिमेय संख्या** को किसी ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप परिमेय संख्या की परिभाषा में निहित $q \neq 0$ की आवश्यकता की व्याख्या कर सकते हैं?

इस स्तर पर हमें आवश्यक रूप से कुछ महत्त्वपूर्ण अवलोकन करने चाहिए—

- सभी परिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। उदाहरण के लिए 5 और –10 को क्रमशः $\frac{5}{1}$ और $\frac{-10}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसका आशय यह है कि परिमेय संख्याओं में प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक भी सम्मिलित होते हैं।

- परिमेय संख्याओं का $\frac{p}{q}$ के रूप में, जहाँ p और q पूर्णांक हों तथा $q \neq 0$ हो, निरूपण अद्वितीय नहीं होता। उदाहरण के लिए $-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} = -\frac{3}{9} = -\frac{10}{30} = -\frac{2026}{6078}$ इत्यादि। ये समतुल्य परिमेय संख्याएँ (अथवा समतुल्य भिन्न) हैं। यह तथ्य हमें दी गई एक भिन्न के अंश और हर के मध्य किसी भी सार्व गुणनखंड को विभाजित करने की स्वतंत्रता देता है। परिणामी भिन्न इस स्थिति में अपने मूल भिन्न का समतुल्य होता है। उदाहरण के लिए $\frac{12}{30}, \frac{2}{5}$ के समतुल्य है। यहाँ हमने अंश और हर दोनों को 6 से विभाजित किया है।

- एक सामान्य समझ यह है कि जब हम कहते हैं कि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है या जब हम $\frac{p}{q}$ को संख्या रेखा पर दर्शाते हैं तो हम यह मानते हैं कि $q \neq 0$ और यह भी मानते हैं कि p और q का 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड नहीं है (अर्थात p और q **सह-अभाज्य** हैं)। इस प्रकार संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ के समतुल्य अनंत भिन्नों (अर्थात भिन्न $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{12}, \ldots, \frac{1013}{2026}, \ldots$) को दर्शाने के लिए हम $\frac{1}{2}$ का चयन करते हैं।

© NCERT not to be republished

जैसा कि आपको स्मरण होगा कि हमने कक्षा 6 और 7 में ब्रह्मगुप्त द्वारा प्रतिपादित भिन्नों के योग, घटाव, गुणन और विभाजन के लिए नियमों के विषय में पढ़ा था। उन्होंने यह भी बताया था कि ये नियम धनात्मक और ऋणात्मक, दोनों प्रकार के भिन्नों पर लागू होते हैं। ये भिन्न एक साथ मिलकर परिमेय संख्याएँ बनाती हैं।

नीचे विभिन्न नियमों को प्रस्तुत किया गया है—

1. **समतुल्यता**— दो परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ समतुल्य होती हैं यदि $ad = bc$ है।
2. **दो परिमेय संख्याओं का योग और घटाव**— सर्वप्रथम हम दो परिमेय संख्याओं को $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{b}$ भिन्नों के रूप में व्यक्त करते हैं, जिनमें समान हर b है। इसके उपरांत हम $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ तथा $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ नियम का उपयोग करते हैं।
3. **दो परिमेय संख्याओं का गुणन और विभाजन**— हम $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ के नियम का उपयोग करते हैं, यदि (जहाँ $b \neq 0, d \neq 0$) हो और $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ के नियम का उपयोग करते हैं, यदि (जहाँ $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$) हो।
4. उपरोक्त अंकगणितीय नियमों के अनुसार योग और गुणन दोनों क्रम विनिमय हैं (अर्थात; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ और $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$) तथा वे बंटन नियम का अनुसरण करते हैं। यदि p, q और r परिमेय संख्याएँ हैं तो $p(q + r) = pq + pr$ होगा।

परिमेय संख्याएँ योग, घटाव और गुणन के अंतर्गत संवृत होती हैं अर्थात यदि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का योग करते हैं, दो परिमेय संख्याओं को घटाते हैं या दो परिमेय संख्याओं को गुणा करते हैं तो परिणामस्वरूप एक परिमेय संख्या ही प्राप्त होती है। परिमेय संख्याएँ विभाजन के अंतर्गत भी संवृत होती हैं, यदि वह परिमेय संख्या 0 से विभाजित न हों। इसका अर्थ है कि दो परिमेय संख्याओं का भागफल भी पुन: एक परिमेय संख्या होगी, यदि वह संख्या 0 से विभाजित न हो।

सोचिए और विचार कीजिए

1. भिन्न-भिन्न हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग अथवा घटाव करते समय आप उनके हर को समान कैसे बनाएँगे?
2. परिमेय संख्याओं के लिए बंटन नियम को सत्यापित कीजिए।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 3.3

1. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याएँ समतुल्य हैं—

   (i) $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{6}$ (ii) $\frac{5}{4}$ और $\frac{10}{8}$

   (iii) $-\frac{3}{5}$ और $-\frac{6}{10}$ (iv) $\frac{9}{3}$ और 3

2. योगफल ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{12}+\frac{5}{8}$

   (iii) $-\frac{4}{7}+\frac{3}{14}$

3. अंतर ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{11}{8}-\frac{3}{4}$

   (iii) $-\frac{7}{9}-\left(-\frac{2}{3}\right)$

4. गुणनफल ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{11}\times\frac{5}{8}$

   (iii) $-\frac{4}{7}\times\frac{5}{14}$

5. भागफल ज्ञात कीजिए—

   (i) $\frac{2}{3}\div\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{7}{11}\div\frac{5}{8}$

   (iii) $-\frac{4}{7}\div\frac{5}{14}$

© NCERT not to be republished

6. सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}$

7. बंटन गुणधर्म का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का सरलीकरण कीजिए—

$$\frac{7}{9}\left(\frac{6}{7}-\frac{3}{4}\right)$$

8. परिमेय संख्या x को इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $\frac{5}{6}\left(x+\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}$

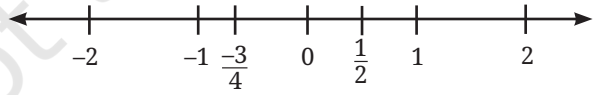
3.4.1 संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का निरूपण

हम जानते हैं कि पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। इस कार्य को करने के लिए हम एक बिंदु का चयन करते हैं और इसे शून्य के रूप में अंकित करते हैं, इसे संख्या रेखा का मूलबिंदु कहेंगे। दाईं ओर एक इकाई अग्रसर होने पर जिस बिंदु पर हम पहुँचते हैं, उसे 1 के रूप में निरूपित करते हैं, इसी प्रकार दो इकाई अग्रसर होने पर उसे 2 से निरूपित करते हैं और इस प्रकार संख्या रेखा बनती चली जाती है। ठीक इसी प्रकार, मूलबिंदु से बाईं ओर एक इकाई अग्रसर होने पर हमें -1 की प्राप्ति होती है, दो इकाई अग्रसर होने पर -2 की प्राप्ति होती है और मूलबिंदु से बाईं ओर भी इस प्रकार संख्या रेखा विस्तारित होती जाती है। प्रत्येक पूर्णांक, अपने आगामी पूर्णांक से समान दूरी पर स्थित होता है। इसे चित्र 3.3 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 3.3

परिमेय संख्याओं को भी संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। पूर्णांकों के अतिरिक्त, ये दो पूर्णांकों के मध्य भी स्थित हो सकते हैं। उदाहरण के लिए $\frac{1}{2}$, 0 और 1 के ठीक मध्य में स्थित होता है और $-\frac{3}{4}$, -1 और 0 के मध्य स्थित होता है, जैसा चित्र 3.4 में प्रदर्शित किया गया है।

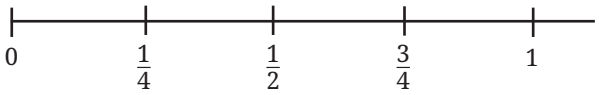


चित्र 3.4

एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$, $q\neq 0$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए इकाई अंतराल (दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य की दूरी) को q समान भागों में विभाजित कीजिए। यदि संख्या धनात्मक है तो मूलबिंदु 0 से दाईं ओर p भाग आगे बढ़िए और यदि संख्या ऋणात्मक हो तो बाएँ ओर बढ़िए।

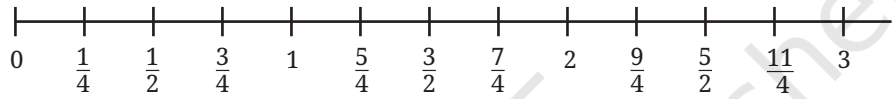
© NCERT not to be republished

उदाहरण के लिए $\frac{3}{4}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए, 0 और 1 के मध्य अंतराल को चार समान भागों में विभाजित कीजिए और 0 से दाईं ओर तीन भागों तक बढ़िए।



चित्र 3.5

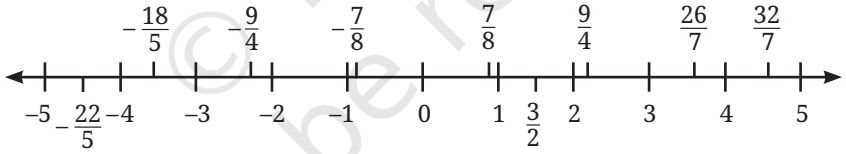
यहाँ तक कि 1 से बड़े भिन्न को भी इस विधि से संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, अत: यह 2 और 3 के मध्य स्थित है। हम 2 और 3 के मध्य अंतराल को चार समान भागों में विभाजित करते हैं और 2 से दाईं ओर एक भाग आगे बढ़ते हैं।



चित्र 3.6

सोचिए और विचार कीजिए

$\frac{8}{5}$ और $-\frac{7}{4}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करने का प्रयत्न कीजिए।



चित्र 3.7 — संख्या रेखा पर कुछ पूर्णांक और परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान

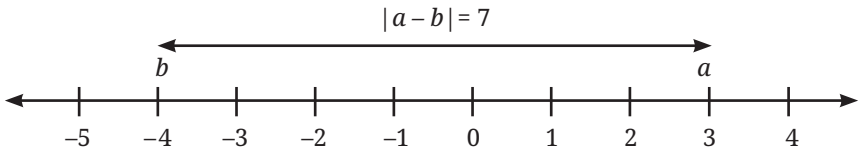
एक परिमेय संख्या x के **निरपेक्ष मान** को $|x|$ के रूप में लिखा जाता है जो संख्या रेखा पर 0 से इसकी दूरी को दर्शाता है।

उदाहरण 1 $\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$, $\left|-\frac{5}{3}\right|$ भी $\frac{5}{3}$ के समान है और $|0| = 0$ होता है।

अत: एक धनात्मक संख्या का निरपेक्ष मान वह संख्या स्वयं होती है। एक ऋणात्मक संख्या का निरपेक्ष मान उस संख्या का धनात्मक मान है। अत: किसी परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान सदैव ही ऋणेतर होता है, अर्थात $|x| \geq 0$ होगा।

© NCERT not to be republished

दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए, संख्या रेखा पर उनके मध्य की दूरी को $|a-b|$ से दर्शाया जाता है। चित्र 3.8 में पूर्णांकों -4 और 3 के मध्य की दूरी को दर्शाया गया है।



चित्र 3.8

3.4.2 परिमेय संख्याओं की सघनता

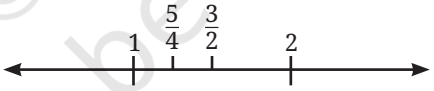
परिमेय संख्याओं के सबसे अद्भुत गुणों में से एक उसका घनत्व है। किन्हीं दो पूर्णांकों, जैसे 1 और 2 के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{3}{2}$ है। 1 और $\frac{3}{2}$ के मध्य एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{5}{4}$ है।

संख्या रेखा पर दो परिमेय संख्याओं में कितनी भी निकटता क्यों ना हो, उनका माध्य ज्ञात करके आप सदैव उनके मध्य एक और परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, 1 और $\frac{3}{2}$ के मध्य एक परिमेय संख्या को आप उनका माध्य ज्ञात करके प्राप्त कर सकते हैं—

$$\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

यह स्पष्ट करने का प्रयास कीजिए कि दो परिमेय संख्याओं a और b का माध्य, जो $\frac{(a+b)}{2}$ है, सदैव a और b के मध्य स्थित एक परिमेय संख्या ही क्यों होती है?



चित्र 3.9

इसका अर्थ यह है कि संख्या रेखा पर किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य अनंत परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा को अवश्य ही भर देती हैं और रिक्तता की कोई भी संभावना शेष नहीं रहती है, परंतु क्या वास्तव में ऐसा है?

प्रश्नावली 3.4

1. एक ही संख्या रेखा पर $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{4}$ और $1\frac{1}{2}$ को निरूपित कीजिए।
2. अनिवार्य रूप से $-\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के मध्य विद्यमान तीन भिन्न परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

3. व्यंजक $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)$ का सरलीकरण कीजिए।

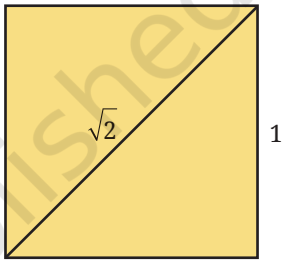
4. एक दर्जी के पास $15\frac{3}{4}$ मीटर परिष्कृत रेशमी कपड़ा है। यदि एक कुर्ता बनाने के लिए $2\frac{1}{4}$ मीटर रेशमी कपड़े की आवश्यकता होती है तो दर्जी कुल कितने कुर्ते बना सकता है?

5. 3.1415 और 3.1416 के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

*6. क्या आप किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात करने की किसी अन्य विधि सोच सकते हैं?

3.5 अपरिमेय संख्याएँ

शताब्दियों तक गणितज्ञों की यह धारणा बनी हुई थी कि इस ब्रह्माण्ड में प्रत्येक मापनीय लंबाई को दो पूर्णांकों के अनुपात में व्यक्त किया जा सकता है। यद्यपि, जब बौधायन ने 800 सामान्य संवत पूर्व के आस-पास *शुल्बसूत्र* (जटिल ज्यामितीय अग्नि वेदियों के निर्माण की निर्देश-पुस्तिका) की रचना की, उनके समक्ष शीघ्र ही ऐसी मापें उत्पन्न हो गईं, जो भिन्नों के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती थीं। कुछ शताब्दियों के पश्चात ऐसी ही समस्याएँ ग्रीकों के समक्ष भी आईं।



चित्र 3.10

एक ऐसे वर्ग पर विचार कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 1 इकाई हो। बौधायन–पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, विकर्ण की लंबाई d सूत्र $1^2 + 1^2 = d^2$ दी जाती है। इस प्रकार, $d^2 = 2$ है। अत: विकर्ण की लंबाई $\sqrt{2}$ है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या $\sqrt{2}$ को एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है?

जैसा कि आपने कक्षा 8 में अध्ययन किया था, इसका उत्तर 'नहीं' है! हम शीघ्र ही पुनः देखेंगे कि ऐसा क्यों होता है! संख्या रेखा पर निरूपित वे संख्याएँ, जो पूर्णांकों के अनुपात के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती हैं, **अपरिमेय संख्याएँ** कहलाती हैं।

3.5.1 $\sqrt{2}$ की अपरिमेयता की उपपत्ति

$\sqrt{2}$ की अपरिमेयता को सर्वप्रथम हिप्पासस नामक गणितज्ञ ने सिद्ध किया था, जो पाइथागोरस विद्यालय का एक सदस्य था (लगभग 400 सामान्य संवत पूर्व के आस-पास)। $\sqrt{2}$ क्यों अपरिमेय है, इसकी व्याख्या के लिए उन्होंने एक कुशाग्र तकनीक का उपयोग किया, जिसे **विरोधाभास द्वारा उपपत्ति**

© NCERT not to be republished

कहा जाता है। इसके नाम के अनुरूप इस विधि में हम जो सिद्ध करना चाहते हैं, उसके विपरीत कल्पना कर लेते हैं और यह प्रदर्शित करते हैं कि यह कल्पना तार्किक विरोधाभास उत्पन्न करती है।

प्रमाण — हम प्रमाण की व्याख्या कई चरणों में करेंगे।

चरण 1 — कल्पना — मान लीजिए, $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए इसे सरलतम भिन्न $\frac{p}{q}$ जबकि $q \neq 0$ रूप में लिखा जा सकता है। (इसका अभिप्राय यह है कि p और q ऐसे पूर्णांक हैं जिनका 1 के अतिरिक्त कोई भी सार्व गुणनखंड नहीं है अर्थात वे सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

चरण 2 — समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर —

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

चरण 3 — दोनों पक्षों को q^2 से गुणा करने पर —

$$2q^2 = p^2$$

चरण 4 — p के लिए निगमन —

चूँकि p^2 किसी पूर्णांक का दोगुना है अत: p^2 को एक सम संख्या होना चाहिए। यदि एक संख्या का वर्ग सम संख्या है तो वह संख्या स्वयं भी सम होगी। इसलिए p एक सम पूर्णांक है। मान लीजिए, $p = 2k$ (जहाँ k एक पूर्णांक है)।

चरण 5 — चरण 3 के समीकरण में $p = 2k$ को पुनः प्रतिस्थापित कीजिए —

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$2q^2 = 4k^2$$

चरण 6 — दोनों पक्षों को 2 से विभाजित कीजिए —

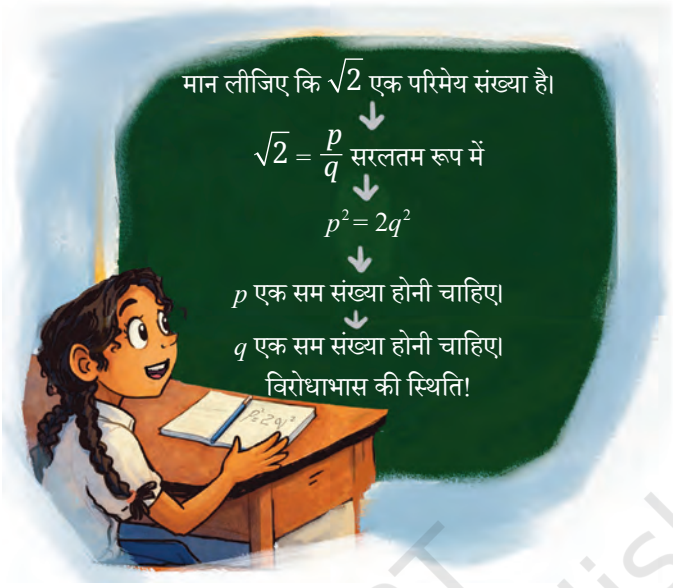
$$q^2 = 2k^2$$

चरण 7 — q के लिए **निगमन** — अब हम देखते हैं कि q^2 किसी पूर्णांक k^2 का दोगुना है। इसका आशय यह है कि q^2 एक सम संख्या है और इसी कारण q को भी आवश्यक रूप से एक सम पूर्णांक होना चाहिए।

चरण 8 — विरोधाभास — हमने यह निगमित किया कि p एक सम संख्या है और q एक सम संख्या है। इसका अर्थ यह है कि दोनों का सार्व गुणनखंड 2 है। यद्यपि चरण 1 में हमने यह माना था कि $\frac{p}{q}$ अपने सरलतम रूप में है और इनका कोई भी सार्व गुणनखंड नहीं है!

चूँकि हमारे तार्किक चरण त्रुटिहीन हैं इसलिए हमारी प्रारंभिक कल्पना असत्य है। अत: $\sqrt{2}$ को एक भिन्न के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। यह अपरिमेय है।

© NCERT not to be republished



सोचिए और विचार कीजिए

विरोधाभास द्वारा उपपत्ति का उपयोग करते हुए $\sqrt{3}$ की अपरिमेयता सिद्ध करने का प्रयत्न कीजिए। क्या यह विधि $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ या $\sqrt{10}$ के लिए भी सहायक सिद्ध होगी।

3.5.2 $\sqrt{n}$ लंबाई की संरचना विधि

सोचिए और विचार कीजिए

हमने पूर्व में देखा है कि एक ऐसी रेखा कैसे प्राप्त की जाए, जिसकी लंबाई एक परिमेय संख्या हो। ऐसी रेखाएँ कैसे प्राप्त कर सकते हैं जिनकी लंबाई अपरिमेय हो?

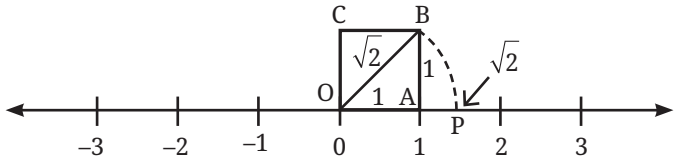
उदाहरण के लिए, $\sqrt{2}$ लंबाई के एक रेखाखंड के निर्माण और संख्या रेखा पर उसकी स्थिति प्रदर्शित करने के लिए हम निम्नलिखित चरणबद्ध प्रक्रिया का अनुसरण कर सकते हैं—

चरण 1— संख्या रेखा पर हम OA = 1 इकाई का माप लेते हैं और A से OA पर एक लंब खींचते हैं (देखिए चित्र 3.11)।

चरण 2— इस लंब रेखा पर हम बिंदु B को इस प्रकार अंकित करते हैं कि AB = 1 इकाई हो और मूलबिंदु को B से मिला देते हैं। स्पष्ट है कि OB = $\sqrt{2}$ इकाई है।

© NCERT not to be republished

चरण 3 — 'O' को केंद्र मानकर और OB को त्रिज्या लेकर, हम परकार से एक चाप खींचते हैं जो संख्या रेखा को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करता है। स्पष्ट है कि OP = $\sqrt{2}$ इकाई है। अतः P अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ को प्रदर्शित करता है।



चित्र 3.11 — अपरिमेय लंबाइयों की रचना करना एवं उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाना

सोचिए और विचार कीजिए

इस विधि को मापनी और परकार के उपयोग से $\sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ लंबाई के रेखाखंडों की रचना करने के लिए विस्तारित कीजिए। इस विधि को किसी भी $\sqrt{n}$ रूप की लंबाई के रेखाखंड की रचना करने के लिए व्यापकीकृत कीजिए, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

3.5.3 पाई (π) की कहानी और माधव की अनंत श्रेणियाँ

पाई (π) एक अन्य प्रसिद्ध अपरिमेय संख्या है, जो वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात होता है। शताब्दियों से गणितज्ञ π के लिए भिन्नात्मक सन्निकट मान को अपेक्षाकृत बेहतर करने हेतु प्रयासरत रहे हैं। आर्यभट (499 सामान्य संवत) ने π का अति सटीक सन्निकट मान $\frac{3927}{1250} = 3.1416$ दिया, परंतु उन्होंने बताया था कि यह केवल आसन्न (सन्निकट मान) है और इंगित किया कि π के लिए पूर्णतः सटीक भिन्न संभवतः ज्ञात नहीं की जा सकती।

यद्यपि π अपरिमेय है (लैंबर्ट ने 1761 ई. में इसे औपचारिक रूप से सिद्ध कर दिया था), किसी एक भिन्न (या परिमित रूप से अनेक भिन्नों) द्वारा π को कभी भी पूर्णतः सटीक रूप से व्यक्त अथवा सूत्रित नहीं किया जा सकता। π के लिए प्रथम सटीक सूत्र चौदहवीं शताब्दी में **संगमग्राम के माधव** ने दिया, जिन्होंने केरल स्कूल ऑफ मैथेमेटिक्स की स्थापना की। माधव ने यह अनुभव किया कि एक अपरिमेय संख्या को व्यक्त करने के लिए आप केवल एक ही भिन्न का उपयोग नहीं कर सकते; आपको आवश्यक रूप से एक अनंत श्रेणी के योग का उपयोग करना होगा। उन्होंने गहन अनंत श्रेणी की खोज की —

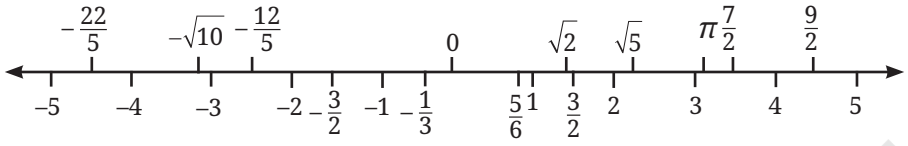
$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

हम जानते हैं कि इसका अर्थ है कि 2,100 या एक लाख पदों का योग करने का क्या अर्थ होता है। अनंत पदों के योगफल ज्ञात करने का अभिप्राय क्या है? इसका अर्थ यह है कि अनंत अनुक्रम के पहले पद से प्रारंभ करते हुए जैसे-जैसे हम अधिक से अधिक पद जोड़ते जाएँगे, वैसे-वैसे हम π के

© NCERT not to be republished

मान के निकट और निकट पहुँचते जाएँगे। आप उच्चतर कक्षाओं में अनंत श्रेणियों के संदर्भ में और भी अध्ययन करेंगे।

इस प्रकार, संख्या रेखा पर न केवल परिमेय संख्याएँ विद्यमान हैं अपितु इस पर अपरिमेय संख्याएँ भी सम्मिलित होती हैं। हमने देखा कि कैसे कुछ अपरिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाया जाता है और अब हम शेष अपरिमेय संख्याओं को सरलता से संख्या रेखा पर स्थित मान लेंगे।



चित्र 3.12

3.6 वास्तविक संख्याएँ— दशमलव और चक्रीय प्रतिरूप

जब हम परिमेय संख्याओं के सघन जाल को अपरिमेय संख्याओं की अपूर्णीय रिक्तता से मिलाते हैं तब हम वास्तविक संख्याओं की अखंड सतत रेखा का निर्माण करते हैं।

एक परिमेय संख्या को एक अपरिमेय संख्या से अलग करने की सरलतम विधि उसके दशमलव प्रसार को देखना है।

3.6.1 परिमेय दशमलव— सांत और आवर्ती

यदि आप एक परिमेय संख्या के अंश को उसके हर से विभाजित करते हैं तो विभाजन की दो स्थितियों में से कोई एक घटित होगी—

1. **यह समाप्त हो जाता है**— अंततः विभाजन में शेषफल के रूप में 0 प्राप्त होता है। विभाजन परिमित दशमलव स्थानों तक समाप्त हो जाता है।

   उदाहरण 2— $\frac{3}{8} = 0.375$ (क्या आप यह बता सकते हैं कि किन परिमेय संख्याओं के लिए विभाजन परिमित दशमलव स्थानों तक समाप्त या सांत हो जाएगा?)

2. **यह आवर्ती होता है**— विभाजन की प्रक्रिया में शेषफल के रूप में कभी भी 0 की प्राप्ति नहीं हो पाती है, किंतु अंकों के अनुक्रम की अनंततः पुनरावृत्ति होती रहती है।

   उदाहरण 3— $\frac{5}{11} = 0.454545... = 0.\overline{45}$

सोचिए और विचार कीजिए

$\frac{10}{3}$ और $\frac{11}{12}$ के दशमलव प्रसार ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। दशमलव बिंदु के पश्चात आने वाले अंकों की पुनरावृत्ति के विषय में आप क्या अवलोकन करते हैं?

© NCERT not to be republished

कुछ परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण आवर्ती क्यों होता है? दीर्घ विभाजन प्रक्रिया का उपयोग करते हुए $\frac{1}{7}$ की गणना करने की कल्पना कीजिए। आप 7 से विभाजन कर रहे हैं। प्रत्येक चरण में संभावित शेषफल क्या होंगे? वे केवल 1, 2, 3, 4, 5 या 6 (0 क्यों नहीं) हो सकते हैं, क्योंकि शेषफल की संभावनाएँ सीमित होती हैं। अंततः शेषफल दूसरी बार अवश्य प्राप्त होगा। यदि एक शेषफल की पुनरावृत्ति होती है, तो संपूर्ण विभाजन प्रक्रिया की अनंत पुनरावृत्ति होती जाती है जिससे आवर्ती दशमलव की रचना होती है!

दशमलव प्रसार के प्रकार का अनुमान

रोचक बात यह है कि हम लंबी विभाजन प्रक्रिया अपनाए बिना यह अनुमान लगा सकते हैं कि किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत (समाप्त) होगा या सदैव चलता रहेगा!

इसके लिए हम हर के **अभाज्य गुणनखंडों** की सहायता लेते हैं।

मान लीजिए $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, अपने सरलतम रूप में एक परिमेय संख्या है (अर्थात p और q का 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड नहीं है)।

भिन्न $\frac{3}{20}$ पर विचार कीजिए। 20 का अभाज्य गुणनखंडन $2^2 \times 5$ है।

अतः, $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} = \frac{15}{100} = 0.15$ होगा।

हम 100 प्राप्त करने के लिए अंश और हर दोनों को 5 से गुणा करते हैं। इस प्रकार, हमें 0.15 प्राप्त होता है, जो एक सांत दशमलव है।

सोचिए और विचार कीजिए

$\frac{p}{q}$ का दशमलव प्रसार निश्चित रूप से सांत होगा, जब q का अभाज्य गुणनखंड केवल 2, केवल 5 अथवा 2 और 5 दोनों हो। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

ऐसा इसलिए है क्योंकि ऐसी स्थितियों में हम अंश और हर को एक उपयुक्त संख्या से गुणा करके हर को 10 के घातांक के रूप में रूपांतरित कर सकते हैं।

परिमेय दशमलव का $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरण

स्थिति 1 — सांत दशमलव

हमने विगत कक्षाओं में अध्ययन किया है कि सांत दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में कैसे रूपांतरित किया जाता है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 4 — 0.35 को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

हम जानते हैं कि $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

आइए, अब हम समझते हैं कि एक असांत (अनवसानी) आवर्ती दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में कैसे रूपांतरित किया जाता है।

स्थिति 2 — शुद्ध आवर्ती दशमलव

एक शुद्ध आवर्ती दशमलव में दशमलव बिंदु के ठीक बाद एक अंक अथवा अंकों की शृंखला की पुनरावृत्ति प्रारंभ हो जाती है।

उदाहरण 5 — $0.\overline{6}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 0.\overline{6}$ है।

चरण 2 — चूँकि एक अंक की पुनरावृत्ति हो रही है अत: दोनों पक्षों को $10^1 = 10$ से गुणा करने पर हमें $10x = 6.\overline{6}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 — पहले समीकरण को दूसरे समीकरण में से घटाइए —

$10x - x = 6.\overline{6} - 0.\overline{6} = 6$

चरण 4 — $9x = 6$ को x का मान ज्ञात करने के लिए हल कीजिए।

इस प्रकार, $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ है।

उदाहरण 6 — $0.\overline{45}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

मान लीजिए $x = 0.\overline{45}$ है।

चूँकि दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है अत: दोनों पक्षों को $10^2 = 100$ से गुणा करने पर, हमें $100x = 45.\overline{45}$ प्राप्त होता है। पहले समीकरण को दूसरे समीकरण में से घटाने के पश्चात हमें $99x = 45$ प्राप्त होता है।

अत:, $x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$ है।

स्थिति 3 — सामान्य आवर्ती दशमलव

एक सामान्य आवर्ती दशमलव में दशमलव बिंदु के ठीक बाद कुछ अनावर्ती अंक होते हैं और इसके पश्चात अंकों का आवर्ती खंड होता है।

उदाहरण 7 — $0.1\overline{6}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 0.1\overline{6}$ है।

चरण 2 — सर्वप्रथम दशमलव को इस प्रकार स्थानांतरित कीजिए कि आवर्ती खंड दशमलव बिंदु के ठीक बाद में आए।

चूँकि एक अंक अनावर्ती है तो हम $10^1 = 10$ से गुणा करते हैं और $10x = 1.\overline{6}$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

चरण 3 — अब, एक पूर्ण आवर्ती चक्र को स्थानांतरित करने के लिए (1 अंक की पुनरावृत्ति), हम पुनः $10^1 = 10$ से गुणा करते हैं और $100x = 16.\overline{6}$ प्राप्त करते हैं।

चरण 4 — दूसरे स्थानांतरित समीकरण में से पहले स्थानांतरित समीकरण को घटाने पर हमें प्राप्त होता है —

$100x - 10x = 16.\overline{6} - 1.\overline{6}$ या $90x = 15$, अतः $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

उदाहरण 8 — $2.35\overline{7}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 2.35\overline{7}$ है।

चरण 2 — यहाँ '35' अनावर्ती है (दो अंक) एवं '7' की पुनरावृत्ति होती है (1 अंक)। सर्वप्रथम, अनावर्ती अंकों को दशमलव बिंदु से पहले स्थानांतरित करने के लिए हम इसे $10^2 = 100$ से गुणा करते हैं, जिससे हमें $100x = 235.\overline{7}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 — अब हम पूर्ण आवर्ती चक्र को स्थानांतरित करने के लिए $10^1 = 10$ से गुणा करते हैं, जिससे हमें $1000x = 2357.\overline{7}$ प्राप्त होता है।

चरण 4 — घटाने पर हमें $1000x - 100x = 2357.\overline{7} - 2357.\overline{7}$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार $900x = 2122$ और $x = \frac{2122}{900} = \frac{1061}{450}$ है।

उदाहरण 9 — $2.45\overline{37}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए।

चरण 1 — मान लीजिए $x = 2.45\overline{37}$ है।

चरण 2 — यहाँ '45' अनावर्ती है (दो अंक) एवं '37' की पुनरावृत्ति होती है (दो अंक)। सर्वप्रथम हम अनावर्ती अंकों को दशमलव से पहले स्थानांतरित करने के लिए $10^2 = 100$ से गुणा करते हैं और हमें $100x = 245.\overline{37}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 — अब हम पूर्ण आवर्ती चक्र को स्थानांतरित करने के लिए $10^2 = 100$ से गुणा करते हैं, जिससे हमें $10000x = 24537.\overline{37}$ प्राप्त होता है।

चरण 4 — घटाने पर हमें $10000x - 100x = 24537.\overline{37} - 245.\overline{37}$ प्राप्त होता है।

अतः $9900x = 24292$ और $x = \frac{24292}{9900} = \frac{6073}{2475}$ है।

रूपांतरण के लिए सारांश सारणी

दशमलव का प्रकार	अनुसरण किए जाने वाले चरण
शुद्ध आवर्ती	• मान लीजिए x दशमलव संख्या है। • 10^n से गुणा कीजिए जहाँ n आवर्ती अंकों की संख्या है। • इसे मूल समीकरण से घटाइए और x ज्ञात करने के लिए हल कीजिए।

© NCERT not to be republished

सामान्य आवर्ती	• मान लीजिए x दशमलव संख्या है। • 10^m से गुणा कीजिए, जहाँ m अनावर्ती अंकों की संख्या है। पुनः 10^n से गुणा कीजिए, जहाँ n आवर्ती अंकों की संख्या है। • इसे पूर्व के समीकरण से घटाइए और x ज्ञात करने के लिए हल कीजिए।

3.6.2 चक्रीय संख्याओं का जादू

जब हम $\frac{1}{7}$ के लिए दशमलव की गणना करते हैं तो हमें 0.142857142857... या $0.\overline{142857}$ प्राप्त होता है। आवर्ती खंड 142857, गणित के सर्वाधिक रोचक रत्नों में से एक है, जो एक **चक्रीय संख्या** है। क्या होता है, जब हम इसे 1 से 6 तक के अंकों से गुणा करते हैं—

$$142857 \times 1 = 142857$$
$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

समान अंक ही चक्रीय क्रम में स्थान परिवर्तित करते जाते हैं! यह सुंदर आंतरिक संरचना परिमेय संख्या $\frac{1}{7}$ की विशेषता है।

3.6.3 अपरिमेय दशमलव — अव्यवस्थित एवं अनंत

अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में वस्तुतः अंक न कभी समाप्त होते हैं और न ही उनकी पुनरावृत्ति होती है। इनमें न कोई चक्रीय खंड होता है और न ही ऐसा प्रतिरूप होता है, जो अनंत रूप से आवर्ती हो। इसके उदाहरणों में सम्मिलित हैं—

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488 \ldots$$
$$\pi = 3.1415926535897932384 \ldots$$

प्रश्नावली 3.5

1. दीर्घ विभाजन किए बिना निम्नलिखित परिमेय संख्याओं में से यह निर्धारित कीजिए कि कौन-सी सांत दशमलव है और कौन-सी आवर्ती दशमलव है— $\frac{7}{20}$, $\frac{4}{15}$ और $\frac{13}{250}$, तत्पश्चात स्पष्ट रूप से दीर्घ विभाजन करते हुए अपने उत्तरों की जाँच कीजिए और इन परिमेय संख्याओं को दशमलव में भी व्यक्त कीजिए।

© NCERT not to be republished

2. $\frac{1}{13}$ के लिए दीर्घ विभाजन कीजिए। अंकों के आवर्ती खंड को पहचानिए। यदि आप $\frac{2}{13}$ की गणना करते हैं तो क्या यह चक्रीय गुण को प्रदर्शित करता है? अब आप $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$ इत्यादि की गणना कीजिए। आपने क्या ध्यान किया?
3. निम्नलिखित संख्याओं को परिमेय या अपरिमेय के रूप में वर्गीकृत कीजिए—
   (i) $\sqrt{81}$
   (ii) $\sqrt{12}$
   (iii) 0.33333 …
   (iv) 0.123451234512345 …
   (v) 1.01001000100001… (इस प्रतिरूप पर ध्यान दीजिए— क्या इसमें एकल खंड की पुनरावृत्ति हो रही है?)
   (vi) 23.560185612239874790120

   परिमेय संख्याओं की स्थिति में उनके स्पष्ट भिन्न रूप को ज्ञात कीजिए।
4. संख्या $0.\overline{9}$ (अर्थात 0.99999) एक परिमेय संख्या है। बीजगणित (मान लीजिए $x = 0.\overline{9}$ है, 10 से गुणा कीजिए और घटाइए) का उपयोग करते हुए व्याख्या कीजिए कि 0.9 ठीक 1 के समान क्यों है?

*5. हम देख चुके हैं कि $\frac{1}{7}$ का आवर्ती खंड एक चक्रीय संख्या है। कुछ और संख्याओं (n) को ज्ञात करने का प्रयास कीजिए, जिनके प्रतिलोम $\left(\frac{1}{n}\right)$ आवर्ती खंड के ऐसे दशमलव उत्पन्न करते हों, जो चक्रीय हैं।

दशमलव निरूपण की अद्वितीयता का अभाव— जैसे $1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100}$ होता है, वैसे ही परिमेय संख्याओं के दो दशमलव रूप हो सकते हैं। प्रत्येक सांत दशमलव का एक वैकल्पिक रूप होता है, जिसमें 9 की पुनरावृत्ति होती है— 1.000... = 0.999..., 2.47000... = 2.46999...

क्या यह विस्मयकारी नहीं है कि 0.999 = 1 होता है? कई लोगों ने अनुमान लगाया होगा कि यह 1 से कुछ कम है।

3.7 निष्कर्ष— एक अनंत यात्रा

संख्याओं के संसार में हम एक लंबी यात्रा कर चुके हैं। प्राचीन भारत में हमने व्यतीत हो रहे दिनों का लेखा-जोखा रखने के लिए इशांगो की अस्थि पर उकेरे गए सरल खाँचों से लेकर शून्य की गहन

© NCERT not to be republished

दार्शनिक रिक्तता तक की सुदूर यात्रा की है। हमने ब्रह्मगुप्त के साथ शून्य की सीमा-रेखा के पार ऋणभार (ऋण) और ऋणात्मक संख्याओं के क्षेत्र में प्रवेश किया। हमने पाया कि संख्याओं के मध्य का अंतराल भिन्नों से अनंत रूप से सघन है, इसके बाद भी इसमें $\sqrt{2}$ और π जैसी अनंत-अनावर्ती-दशमलव अपरिमेय संख्याएँ मूल रूप से अंतर्निहित हैं। परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को संयुक्त करके हम सतत अखंड **वास्तविक संख्या रेखा** का निर्माण करते हैं। इस संपूर्ण ब्रह्मांड में प्रत्येक लंबाई, प्रत्येक तापमान, प्रत्येक वास्तविक भौतिक माप का इस संख्या रेखा पर अपना निवास है।

संख्याओं के संसार का उद्भव

हमारा संख्याओं का संसार सहस्र वर्षों के दौरान चरणबद्ध रूप से विकसित हुआ है जिससे मानवीय आवश्यकताओं की पूर्ति की जा सके—

- **प्राकृत संख्याएँ (N)**— मूलभूत गणन संख्याएँ (1, 2, 3, ...) हैं। ये पूर्णांकों के समूह में सम्मिलित होती हैं।
- **पूर्णांक (Z)**— इनमें शून्य और ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित होती हैं {..., −2, −1, 0, 1, 2,...}। ये बाद में परिमेय संख्याओं के समूह में समाहित हो जाती हैं।
- **परिमेय संख्याएँ (Q)**— इसमें $\frac{p}{q}$ रूप के सभी भिन्न सम्मिलित होते हैं, जहाँ p, q पूर्णांक और $q \neq 0$ है। वे उन संख्याओं के भी रूप में होती हैं जो सांत दशमलव (जैसे 0.135) और आवर्ती दशमलव (जैसे $0.\overline{142857}$) होती हैं।
- **अपरिमेय संख्याएँ (I)**— ये संख्याएँ उपरोक्त संख्याओं से पृथक होती हैं। इस प्रकार की संख्याओं को भिन्नों के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है (जैसे $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{10}$) और न ही इन्हें सांत और आवर्ती दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- **वास्तविक संख्याएँ (R)**— **परिमेय** और **अपरिमेय** संख्याएँ साथ मिलकर पूरी वास्तविक संख्या रेखा का निर्माण करती हैं।



चित्र 3.13

© NCERT not to be republished

क्या यह यात्रा समाप्त हो चुकी है? क्या वास्तविक संख्या रेखा से परे और अधिक संख्याओं के अन्वेषण की संभावना शेष है?

सोचिए और विचार कीजिए

इस पहेली पर विचार कीजिए कि -1 का वर्गमूल क्या है? हम जानते हैं कि $1 \times 1 = 1$ होता है। हम यह भी जानते हैं कि $(-1) \times (-1) = 1$ होता है। ऐसी कोई भी वास्तविक संख्या नहीं है कि जब उसे स्वयं से गुणा करें तो परिणाम ऋणात्मक संख्या प्राप्त हो। अत: $\sqrt{-1}$ का संख्या रेखा पर अस्तित्व नहीं है।

इसके समाधान के लिए, गणितज्ञों ने इस संख्या-रेखा से पूर्णतः विमुख संख्याओं के एक नए आयाम का आविष्कार किया, जिसे i वर्ण द्वारा निरूपित किया गया, जो **काल्पनिक संख्याओं** के लिए प्रयुक्त होता है। यद्यपि ये संख्याएँ काल्पनिक लगती हैं, तथापि ये आधुनिक विद्युत अभियांत्रिकी, क्वांटम यांत्रिकी और उस तकनीक के लिए अनिवार्य हैं जो आपके मोबाइल को ऊर्जा देती हैं। परंतु यह यात्रा आगामी वर्ष के लिए है। अभी आप वास्तविक संख्याओं के विषय में अपने ज्ञान को सुदृढ़ कीजिए क्योंकि ब्रह्मांड व्यापक रूप से इनकी ही भाषा में लिपिबद्ध है।

अंतिम प्रश्नावली

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दीर्घ विभाजन की प्रक्रिया के माध्यम से सांत दशमलव या अनावर्ती और आवर्ती दशमलव (जो भी उपयुक्त हो) में रूपांतरित कीजिए—

   (i) $\frac{3}{50}$ (ii) $\frac{2}{9}$

2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में रूपांतरित कीजिए—

   (i) 12.6 (ii) 0.0120 (iii) $3.0\overline{52}$

   (iv) $1.2\overline{35}$ (v) $0.\overline{23}$ (vi) $2.0\overline{5}$

   (vii) $2.12\overline{5}$ (viii) $3.12\overline{5}$ (ix) $2.\overline{1625}$

4. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए—

   (i) 0.532 (ii) $1.1\overline{5}$

© NCERT not to be republished

5. 3 और 4 के मध्य 6 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के मध्य 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. $\frac{1}{6}$ और $\frac{2}{5}$ के मध्य 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
8. यदि $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{16}{15}$ है तो परिमेय संख्या x ज्ञात कीजिए।
9. मान लीजिए a और b दो ऐसी शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं कि $a+\frac{1}{b}=0$ है।

   कोई संख्यात्मक मान निर्दिष्ट किए बिना निर्धारित कीजिए कि ab धनात्मक है या ऋणात्मक। अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।
10. एक परिमेय संख्या का सांत दशमलव प्रसार है व जिसका अंतिम शून्येतर अंक चौथे दशमलव स्थान पर है। प्रदर्शित कीजिए कि ऐसी संख्या को $\frac{p}{10^4}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p एक पूर्णांक है जो 10 से अविभाज्य है। क्या यह आवश्यक है कि इस परिमेय संख्या का हर जब अपने सरलतम रूप में लिखा जाता है तो वह 2^4 या 5^4 से विभाज्य हो? कारण बताइए।
11. विभाजन किए बिना यह निर्धारित कीजिए कि $\frac{18}{125}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असांत। यदि यह सांत है तो दशमलव स्थानों की संख्या बताइए।
12. अपने सरलतम रूप में एक परिमेय संख्या का हर $2^3 \times 5$ है। इसके दशमलव प्रसार में कितने दशमलव स्थान होंगे? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

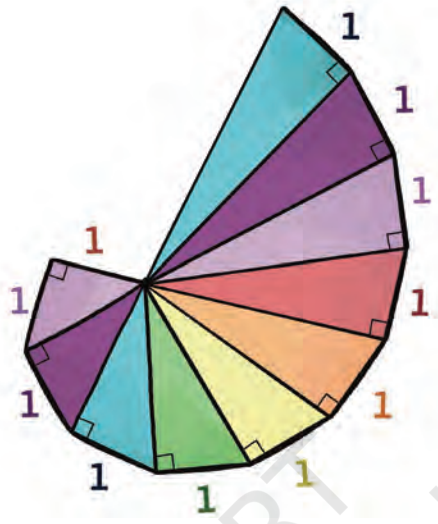
*13. मान लीजिए $a=\frac{7}{12}$ और $b=\frac{5}{6}$ है। a और b दोनों को $\frac{k_1}{m}$ और $\frac{k_2}{m}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ k_1, k_2 और m पूर्णांक हैं और $k_2 - k_1 > 6$ है। समान हर m का उपयोग करते हुए a और b के मध्य स्थित ठीक पाँच भिन्न परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनके अंश पूर्णांक हों। स्पष्ट कीजिए कि इस विधि से दो परिमेय संख्याओं a और b के मध्य स्थित ऐसी n परिमेय संख्याओं को ज्ञात करने के लिए $k_2 - k_1 > n + 1$ प्रतिबंध क्यों आवश्यक है।

*14. तीन परिमेय संख्याएँ x, y, z इस प्रकार हैं कि $x + y + z = 0$ और $xy + yz + zx = 0$ प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं। प्रदर्शित कीजिए कि सभी परिमेय संख्याएँ x, y, z एक साथ आवश्यक रूप से शून्य ही होंगी।

*15. प्रदर्शित कीजिए कि परिमेय संख्या $\frac{(a+b)}{2}$, परिमेय संख्याओं a और b के मध्य स्थित है।

© NCERT not to be republished

16. चित्र 3.14 (जिसे वर्गमूल सर्पिल कहा जाता है) में प्रदर्शित सभी समकोण त्रिभुजों के कर्णों की लंबाई ज्ञात कीजिए।



चित्र 3.14 — वर्गमूल सर्पिल

सारांश

इस अध्याय में आपने निम्नलिखित संकल्पनाओं का अध्ययन किया —

- **प्राकृत संख्याएँ (N)** गणन संख्याएँ {1, 2, 3, ...} होती हैं जिनका उद्भव हजारों वर्षों पूर्व मानव की गिनती करने की आवश्यकता के फलस्वरूप हुआ था।
- **शून्य की संकल्पना** को दार्शनिकों द्वारा भारत में विधिवत रूप से प्रस्तुत किया गया था और इसके उपरांत ब्रह्मगुप्त (629 सामान्य संवत) ने रिक्तता (शून्यता) की दार्शनिक स्थिति को एक वास्तविक संख्या में रूपांतरित किया, जिसके आधार पर व्यक्ति अंकीय संक्रियाएँ कर सकता है। ब्रह्मगुप्त ने ऋणात्मक संख्याओं अर्थात 0 से छोटी संख्याओं का भी परिचय करवाया।
- **पूर्णांक (Z),** संख्या रेखा को 1 से बाईं ओर 0 के साथ-साथ उन ऋणात्मक संख्याओं को सम्मिलित कर विस्तार देता है, जिन्हें ब्रह्मगुप्त ने ऐतिहासिक रूप से 'धन-संपत्ति' (धन) के विपरीत ऋणभार (ऋण) के रूप में वर्गीकृत किया था।
- **ब्रह्मगुप्त के नियम,** प्रतीकात्मक चिह्नों के साथ अंकगणित के लिए एक सुदृढ़ रूपरेखा को प्रस्तुत करते हैं, जिसमें 'दो ऋणों का गुणनफल धन होता है'($- \times - = +$) जैसे नियम के साथ-साथ शून्य के नियम सम्मिलित हैं।

© NCERT not to be republished

- **परिमेय संख्याओं (Q)** को ऐसी किसी भी संख्या के रूप में परिभाषित किया गया है जिसे अनुपात $\frac{p}{q}$ (जहाँ p और q पूर्णांक और $q \neq 0$ है) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। ब्रह्मगुप्त ने परिमेय संख्याओं के योग, घटाव, गुणन और विभाजन के औपचारिक नियमों को भी विधिवत रूप से प्रस्तुत किया।
- **परिमेय संख्याएँ सघन** होती हैं। इसका अर्थ यह है कि किन्हीं भी दो परिमेय संख्याओं के मध्य सदैव एक परिमेय संख्या स्थित होती है।
- **अपरिमेय संख्याएँ,** $\sqrt{2}$ और π जैसे वे मान होते हैं, जिन्हें भिन्नों के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। उनका अस्तित्व प्रमाणित करता है कि संख्या रेखा पर रिक्त स्थान होते हैं जिनकी पूर्ति केवल परिमेय संख्याएँ नहीं कर सकती हैं। किसी संख्या की अपरिमेयता का प्रथम प्रमाण $\sqrt{2}$ था जिसे हिप्पासस (लगभग 400 सामान्य संवत पूर्व) द्वारा दिया गया था। यह विरोधाभास द्वारा उपपत्ति थी। π की अपरिमेयता का प्रमाण स्विस गणितज्ञ जोहान्न लैम्बर्ट ने 1761 में दिया था (इस संदर्भ में यह संदेह है कि π की अपरिमेयता का प्रमाण आर्यभट ने 499 सामान्य संवत में दिया था)।
- **वास्तविक संख्याएँ (R)** सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का पूर्ण संघ है, जो पूर्ण रूप से सतत एवं अखंड रेखा का निर्माण करती हैं, जहाँ प्रत्येक वास्तविक भौतिक माप के लिए एक संगत बिंदु विद्यमान है।
- **दशमलव प्रसार** परिमेय बनाम अपरिमेय के लिए एक गणितीय युक्ति के रूप में कार्य करता है। परिमेय संख्याएँ सदैव सांत अथवा आवर्ती दशमलव के रूप में होती हैं जबकि अपरिमेय संख्याएँ अनंत चलने वाले अनावर्ती दशमलव के रूप में होती हैं।
- **चक्रीय संख्याओं** का उदाहरण $\frac{1}{7}$ के दशमलव प्रसार में देखे गए आवर्ती खंड के अंक (142857) थे, जो परिमेय संख्याओं में निहित सौम्य और सममित आंतरिक प्रतिरूपों को प्रकट करती हैं।
- **काल्पनिक संख्याओं** को अंतिम संकल्पनात्मक सीमांतक के रूप में $\sqrt{-1}$ जैसी संक्रियाओं को हल करने के लिए प्रस्तुत किया गया है, जिनका हल वास्तविक संख्या रेखा पर नहीं किया जा सकता और जिनके लिए गणित के एक नवीन आयाम की आवश्यकता है।

© NCERT not to be republished

4 बीजीय सर्वसमिकाओं का अन्वेषण

0920CH04

4.1 भूमिका

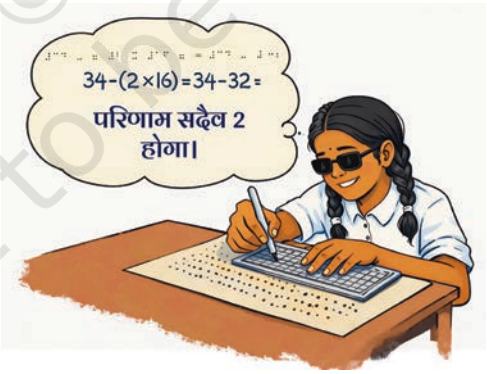
पिछले अध्यायों में आपने रैखिक बहुपदों (लीनियर पॉलिनॉमियल) का अध्ययन किया और यह सीखा कि कैसे इनका उपयोग वास्तविक जीवन की समस्याओं को व्यक्त करने तथा उनका समाधान करने में किया जा सकता है। आपने रैखिक समीकरणों का भी अध्ययन किया और यह ज्ञात किया कि वे कैसे विभिन्न राशियों के मध्य संबंधों को दर्शाते हैं।

इस अध्याय में हम एक कदम आगे बढ़ते हुए बीजीय सर्वसमिकाओं (अल्जेब्रिक आइडेंटिटीज) का अन्वेषण एवं अध्ययन करेंगे। ये गणित के विशेष नियम होते हैं, जो न केवल जटिल गणनाओं को सरल बनाते हैं अपितु बीजीय व्यंजकों को कुशलतापूर्वक हल करने में भी सहायक होते हैं।

आइए, कुछ सरल प्रतिरूपों को समझते हुए प्रारंभ करते हैं।

उदाहरण 1— किन्हीं तीन क्रमागत वर्ग संख्याओं पर विचार कीजिए। उदाहरण के लिए, 1, 4 और 9 को लीजिए। इनमें से सबसे छोटी और सबसे बड़ी वर्ग संख्या को जोड़िए। इस प्रकार, $1 + 9 = 10$ प्राप्त होता है। अब इस योगफल में से मध्य की वर्ग संख्या का दोगुना घटाइए। इससे $10 – (2 \times 4) = 10 – 8 = 2$ प्राप्त होता है।

अब इस प्रक्रिया के माध्यम से तीन अन्य क्रमागत वर्ग संख्याओं के दूसरे समूह के साथ हल करने का प्रयास कीजिए। मान लीजिए, तीन क्रमागत वर्ग संख्याएँ 9, 16, 25 हैं।



उदाहरण के लिए, क्रमागत वर्ग संख्याओं 25, 36, 49 पर विचार कीजिए।

इस नियम से हमें $(25 + 49) – (2 \times 36) = 74 – 72 = 2$ प्राप्त होता है।

इस प्रक्रिया को तीन क्रमागत वर्ग संख्याओं के अन्य समूह के साथ दोहराइए। परिणाम सदैव 2 ही प्राप्त होता है!

© NCERT not to be republished

यह प्रतिरूप आश्चर्यजनक लग सकता है परंतु हम शीघ्र ही इसके पीछे के कारण का बीजगणित के माध्यम से पता लगाएँगे।

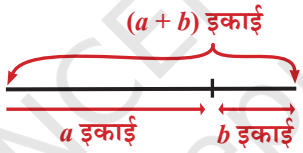
सोचिए और विचार कीजिए

इस प्रकार के और अधिक प्रतिरूप खोजने का प्रयास कीजिए। उदाहरण के लिए, आप चार क्रमागत वर्ग लेकर देख सकते हैं कि क्या आप कोई प्रतिरूप ढूँढ़ पाते हैं।

4.2 सर्वसमिकाओं का दृश्यांकन

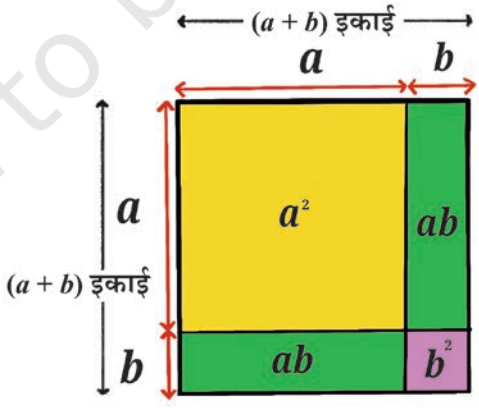
इस अनुभाग में हम विगत कक्षाओं में सीखी गई कुछ बीजीय सर्वसमिकाओं पर पुनर्विचार करेंगे और ज्यामितीय निदर्शों (मॉडलों) की सहायता से उनके दृश्यांकन का प्रयास करेंगे। विशेष रूप से हम पदों को दर्शाने के लिए वर्गों और आयतों का उपयोग करेंगे।

दो रेखाखंड लीजिए, जिनकी लंबाइयाँ क्रमश: a और b इकाई हैं तथा इन दोनों इकाइयों को मिलाकर चित्र 4.1 में दर्शाए अनुसार $(a + b)$ इकाई का एक लंबा रेखाखंड बनाइए।



चित्र. 4.1

अब हम $(a + b)$ इकाई भुजा वाला एक वर्ग बना सकते हैं और इसे चित्र 4.2 में दर्शाए अनुसार छोटे वर्गों तथा आयतों में विभाजित कर सकते हैं।



चित्र 4.2 — $(a + b)$ इकाई भुजा वाला वर्ग

© NCERT not to be republished

अवलोकन कीजिए कि बाहरी वर्ग का क्षेत्रफल $(a + b)^2$ है। बाहरी वर्ग के भीतर एक बड़ा वर्ग है, जिसका क्षेत्रफल a^2 है जबकि छोटे वर्ग का क्षेत्रफल b^2 है। दोनों आयतों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ab है। दोनों वर्ग साथ मिलकर बड़ा वर्ग बनाते हैं, निष्कर्षतः हम कह सकते हैं—

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

चित्र 4.2 से स्पष्ट है कि $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ है, जो a और b लंबाई के सभी रेखाखंडों के लिए मान्य है।

संख्याएँ a और b पर विचार कीजिए, जहाँ a और b रेखाखंडों की लंबाइयों को व्यक्त नहीं करते हैं। क्या होगा, जब a और b ऋणात्मक संख्याएँ हों? आइए, कुछ ऋणात्मक संख्याओं के लिए जाँचते हैं कि क्या तब भी यह समीकरण काम करेगा।

उदाहरण 2 — मान लीजिए, $a = -2$ और $b = -3$ है।

तो $(a + b) = -5$ और $(a + b)^2 = 25$ होगा।

साथ ही, $a^2 = 4$, $b^2 = 9$ और $2ab = 12$ होगा।

अतः $a^2 + 2ab + b^2 = 4 + 12 + 9 = 25$ है।

इस प्रकार, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ यहाँ भी सत्य है!

अब मान लीजिए कि a और b परिमेय संख्याएँ हैं तथा $a = -\frac{2}{3}$ और $b = \frac{3}{4}$ है।

तब $(a + b) = \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12}$

$$(a+b)^2 = \frac{1}{144}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{4}{9} - 1 + \frac{9}{16} = \frac{64 - 144 + 81}{144} = \frac{145 - 144}{144} = \frac{1}{144}$$

अतः $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य प्रतीत होता है। परंतु हम अब भी निश्चित रूप से नहीं कह सकते कि क्या यह सर्वसमिका सभी संख्याओं के लिए सत्य है। इसे सत्यापित करने के लिए आइए, हम संख्याओं के वितरण गुणधर्म का उपयोग करके आगे की जाँच करें—

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a(a + b) + b(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

स्मरण कीजिए कि कक्षा 8 में आपको $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से एक सर्वसमिका के रूप में परिचित करवाया गया था।

एक समीकरण और एक सर्वसमिका में क्या अंतर है?

© NCERT not to be republished

एक **बीजीय सर्वसमिका** वह समीकरण होता है, जो उसमें उपस्थित चर के सभी मानों के लिए सत्य होता है जबकि यह आवश्यक नहीं है कि एक समीकरण चर के सभी मानों के लिए सत्य हो।

उदाहरण के लिए, $x^2 - 1 = 24$ केवल $x = 5$ अथवा -5 के लिए ही सत्य है। इसलिए यह एक समीकरण है।

परंतु $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, x और y के सभी मानों के लिए सत्य है। अत: यह समीकरण एक सर्वसमिका भी है।

अब तक आपने देख लिया है कि $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ है। परंतु क्या आप यह पता लगा सकते हैं कि इनमें से बड़ा कौन-सा है?

उदाहरण के लिए, यदि $a = 10$ तथा $b = 2$ है तब $(a + b)^2$ और $a^2 + b^2$ के मान क्या होंगे?

$(a + b)^2 = (10 + 2)^2 = 12^2 = 144$ तथा $a^2 + b^2 = 10^2 + 2^2 = 104$ है।

अतः इस स्थिति में, $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ है।

परंतु क्या यह सभी संख्याओं a और b के लिए सत्य है?

सोचिए और विचार कीजिए

1. यदि $(a + b)^2 < a^2 + b^2$ है तो a और b के विषय में आप क्या कह सकते हैं?
2. यदि $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ है तो a और b के विषय में आप क्या कह सकते हैं?
3. कब $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ होगा?

क्या आपने अवलोकन किया कि $(a + b)^2$ और $a^2 + b^2$ दोनों ही धनात्मक हैं तो कौन-सा पद यह तय करेगा कि कौन बड़ा है? इसके लिए $(a + b)^2$ के विस्तार का उपयोग कीजिए।

हम सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग व्यापक द्विपद व्यंजक के वर्ग को निकालने के लिए कर सकते हैं।

उदाहरण 3— आइए, $(5x + 2y)^2$ का विस्तार करने का प्रयास करते हैं। यहाँ $a = 5x$ तथा $b = 2y$ है।

तब $(5x + 2y)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(2y) + (2y)^2 = 25x^2 + 20xy + 4y^2$ है।

हम अंकीय गणनाओं के लिए भी सर्वसमिका का उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 4— 43^2 की गणना करने के लिए हम इस प्रकार लिख सकते हैं—

$(40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$

प्रश्नावली 4.1

1. सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए —

(i) $(7x + 4y)^2$ (ii) $\left(\frac{7}{5}x + \frac{3}{2}y\right)^2$ (iii) $(2.5p + 1.5q)^2$

© NCERT not to be republished

(iv) $\left(\frac{3}{4}s+8t\right)^2$ (v) $\left(x+\frac{1}{2y}\right)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

2. उपर्युक्त सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

(i) $(64)^2$ (ii) $(105)^2$ (iii) $(205)^2$

4.3 सर्वसमिकाओं का उपयोग करके बीजीय व्यंजकों का गुणनखंड करना

कुछ बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने में भी सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग किया जा सकता है।

उदाहरण 5— बीजीय व्यंजक $x^2 + 4x + 4$ पर विचार कीजिए।

हम देखते हैं कि—

$x^2 = (x)^2$, $4 = 2^2$ और $4x = 2(2)(x)$ है।

अतः $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2$ की तुलना $a^2 + 2(a)(b) + b^2$ से की जा सकती है, जहाँ $a = x$ और $b = 2$ है।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $(x + 2)$, $x^2 + 4x + 4$ का एक गुणनखंड है।

उदाहरण 6— आइए, किसी अन्य बीजीय व्यंजक के गुणनखंड ज्ञात करने का प्रयास करें—

$36x^2 + 12x + 1$

इसे $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में लिखने पर हमें प्राप्त होगा—

$36x^2 + 12x + 1 = (6x)^2 + 2(6x)(1) + 1^2$,

जहाँ $a = 6x$ तथा $b = 1$ है। इसलिए $36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2$ होगा

अत: $36x^2 + 12x + 1$ का एक गुणनखंड $(6x + 1)$ है।

उदाहरण 7— आइए, $50p^2 + 60pq + 18q^2$ का गुणनखंड करने का प्रयास करते हैं। इस स्थिति में a तथा b क्या होंगे?

ऐसे पद के विषय में सोचने का प्रयास कीजिए, जिसका वर्ग $50p^2$ हो। यह $\sqrt{50}p$ है। परंतु यदि हम वर्गमूल के चिह्न का उपयोग नहीं करना चाहते हैं तो हम इसे निम्न प्रकार से हल कर सकते हैं—

हम देखते हैं कि पदों $50p^2$, $60pq$ तथा $18q^2$ में 2 एक सार्व गुणनखंड है।

अत: $50p^2 + 60pq + 18q^2 = 2(25p^2 + 30pq + 9q^2)$ होगा।

आइए, अब व्यंजक $25p^2 + 30pq + 9q^2$ पर ध्यान देते हैं।

ऐसे पद के विषय में सोचिए, जिसका वर्ग $25p^2$ हो। $9q^2$ के विषय में क्या विचार है?

© NCERT not to be republished

$50p^2 + 60pq + 18q^2$

$= 2\left[(5p)^2 + 2(5p)(3q) + (3q)^2\right]$

$= 2\,(5p + 3q)^2$

यहाँ हमने 2 को सार्व गुणनखंड के रूप में बाहर निकालने के पश्चात सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग करके व्यंजक $25p^2 + 30pq + 9p^2$ का गुणनखंड ज्ञात किया है।

अब तक दिए गए सभी उदाहरणों में हमने सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग विभिन्न बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए किया है।

सोचिए और विचार कीजिए

यदि हम $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ में b के स्थान पर $-b$ रखें तो क्या होगा?

हमें $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ प्राप्त होता है, जो एक सर्वसमिका भी है और इसका उपयोग $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ की तरह ही किया जा सकता है।

आइए, उदाहरण 1 में देखे गए प्रतिरूप को पुनः देखते हैं। कोई भी तीन क्रमागत संख्याएँ $(n - 1)$, n तथा $(n + 1)$ के रूप में ली जा सकती हैं। इनके वर्ग क्रमशः $(n - 1)^2$, n^2 तथा $(n + 1)^2$ हैं।

सबसे छोटे और सबसे बड़े वर्ग का योगफल है—

$(n - 1)^2 + (n + 1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2$

इससे $2n^2$ को घटाने पर परिणाम 2 आएगा। अतः आपको सदैव 2 की प्राप्ति होगी! वास्तव में यह इस तथ्य का प्रमाण है कि यदि हम किन्हीं तीन क्रमागत वर्ग संख्याओं में सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या के योगफल में से मध्य की संख्या के दोगुने को घटाते हैं तो हमें सदैव 2 प्राप्त होता है।

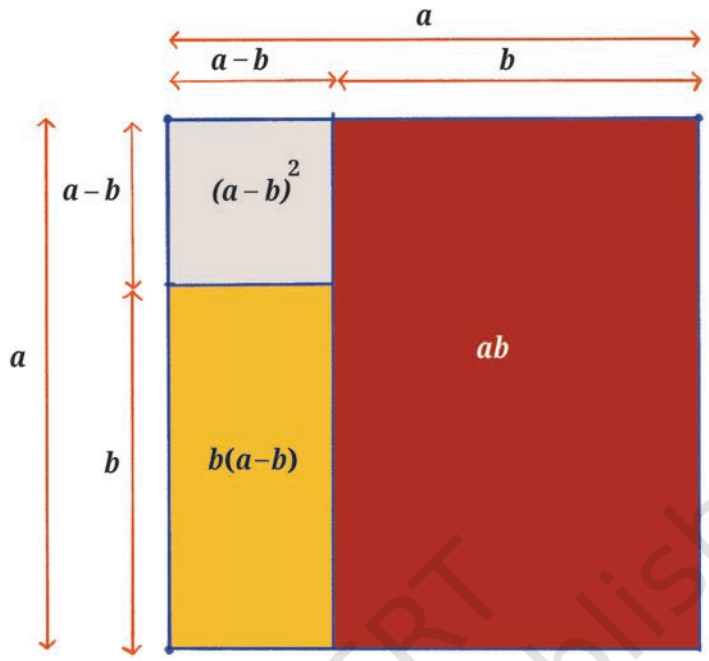
जैसे सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का उपयोग संख्याओं के वर्गों की प्राप्ति के लिए किया जा सकता है, वैसे ही हम $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का भी उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 8— मान लीजिए कि हमें 29^2 की गणना करनी है। हम इसे, इस प्रकार अभिव्यक्त कर सकते हैं—

$(30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \times 30 \times 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

आइए, सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का दृश्यांकन करने के लिए हम a इकाई भुजा वाला एक वर्ग बनाते हैं और a को दो भागों में विभाजित करते हैं, एक भाग की लंबाई $(a - b)$ इकाई तथा दूसरे भाग की लंबाई b इकाई है। आकृति इस प्रकार दिखाई देगी।

© NCERT not to be republished



चित्र 4.3 — a इकाई भुजा वाला वर्ग

किसी बड़े वर्ग का क्षेत्रफल a^2 वर्ग इकाई है। छोटे वर्ग का क्षेत्रफल $(a-b)^2$ वर्ग इकाई है। बड़ा आयत ab वर्ग इकाई क्षेत्रफल का है जबकि छोटा आयत $b\,(a-b)$ वर्ग इकाई क्षेत्रफल का है। अतः $(a-b)^2$ प्राप्त करने के लिए हम बड़े वर्ग के क्षेत्रफल में से दोनों आयतों के क्षेत्रफल घटाते हैं।

इस प्रकार हमें प्राप्त होता है—

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

प्रश्नावली 4.2

1. पूर्णतः गुणनखंडन कीजिए—

   (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

   (ii) $4s^2 + 20st + 25t^2$

   (iii) $49x^2 + 28xy + 4y^2$

© NCERT not to be republished

(iv) $64p^2 + \frac{32}{3}pq + \frac{4}{9}q^2$

*(v) $3a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2$

*(vi) $\frac{9}{5}s^2 + 6sv + 5v^2$

(**संकेत**— उदाहरण 7 में 2 को एक सार्व गुणनखंड के रूप में प्राप्त किया गया था। क्या इसी विधि का उपयोग ऊपर दिए गए प्रश्न (v) और (vi) में किया जा सकता है?)

2. सर्वसमिका $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का उपयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $(79)^2$ (ii) $(193)^2$ (iii) $(299)^2$

4.4 कुछ अन्य सर्वसमिकाएँ

क्या होगा, यदि हम तीन संख्याओं a, b और c के योगफल का वर्ग अर्थात $(a + b + c)^2$ ज्ञात करना चाहें?

आइए, $b + c$ को d से विस्थापित करते हैं।

हमें यह पहले ही ज्ञात है कि $(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$ है।

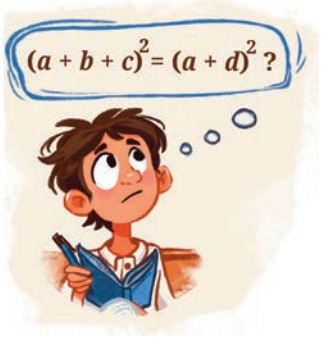


इसलिए d को $(b + c)$ के स्थान पर रखने से हमें $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2$ प्राप्त होगा।

अतः $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ है।

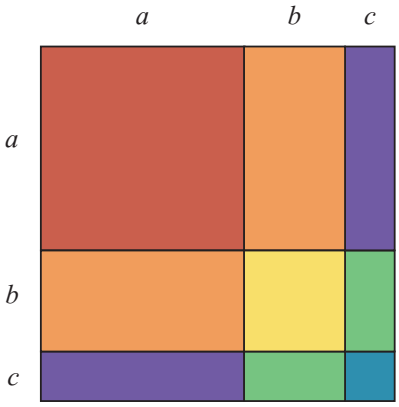
वास्तव में, इसे इस प्रकार स्मरण रखना अधिक सुविधाजनक होगा—

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$



आइए, चित्र 4.4 में दर्शाए अनुसार $a + b + c$ भुजा वाला एक वर्ग बनाकर इसकी ज्यामितीय व्याख्या करते हैं।

© NCERT not to be republished



चित्र 4.4— सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ को प्रदर्शित करता एक ज्यामितीय प्रदर्श

सोचिए और विचार कीजिए

चित्र 4.4 में दर्शाए गए वर्गों और आयतों को चिह्नित कीजिए, जिससे यह सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ को दर्शाए।

उदाहरण 9— आइए, इस सर्वसमिका का उपयोग किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करने हेतु करें, मान लीजिए संख्या 119 है।

$$119^2 = (100 + 10 + 9)^2$$
$$= 100^2 + 10^2 + 9^2 + 2(100)(10) + 2(100)(9) + 2(10)(9)$$
$$= 10000 + 100 + 81 + 2000 + 1800 + 180 = 14161$$

अभी तक हमने नीचे दी गई तीन सर्वसमिकाओं को सत्यापित कर लिया है और इनका उपयोग गणना और बीजीय व्यंजकों के परिवर्तन में किया है—

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

प्रश्नावली 4.3

1. ऊपर दी गई सर्वसमिकाओं में से किसी एक सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित वर्ग ज्ञात कीजिए। सुनिश्चित कीजिए कि इनमें से कौन-सी सर्वसमिका का उपयोग गणना को सरल बनाता है—

© NCERT not to be republished

(i) 117^2 (ii) 78^2 (iii) 198^2

(ii) 214^2 (v) 1104^2 (vi) 1120^2

2. उपर्युक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके गुणनखंड कीजिए—

(i) $16y^2 - 24y + 9$ (ii) $\frac{9}{4}s^2 + 6st + 4t^2$

(iii) $\frac{m^2}{9} + \frac{mk}{3} + \frac{k^2}{4} + 3nk + 2mn + 9n^2$ (iv) $\frac{p^2}{16} - 2 + \frac{16}{p^2}$

(v) $9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

3. सर्वसमिका $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ का उपयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए—

(i) $(p + 3q + 7r)^2$ (ii) $(3x - 2y + 4z)^2$

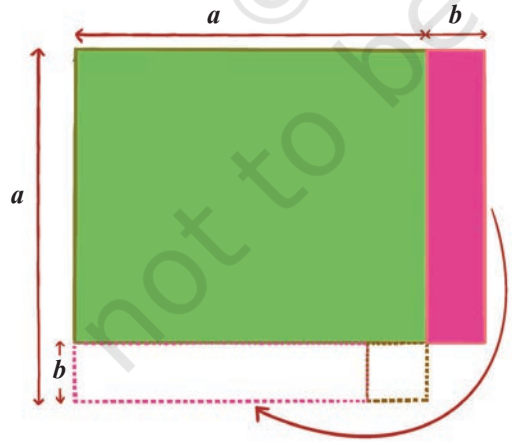
4. क्या यह एक सर्वसमिका है?

$(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$

कक्षा 8 में आप एक अन्य सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ से परिचित हो चुके हैं।

यदि इसे $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$ के रूप में लिखा जाए तो यह और अधिक उपयोगी हो सकती है।

निम्नलिखित चित्र को देखिए। सर्वसमिका $a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$ को स्वयं के लिए सिद्ध कीजिए।



चित्र 4.5

750 सामान्य संवत में 'श्रीधराचार्य' ने संख्याओं के वर्गों की शीघ्र गणना की विधि के रूप में इस सर्वसमिका को प्रस्तावित किया था। उदाहरण के लिए—

$55^2 = (55 + 5)(55 - 5) + 5^2$

$= 60 \times 50 + 25$

$= 3000 + 25 = 3025$

© NCERT not to be republished

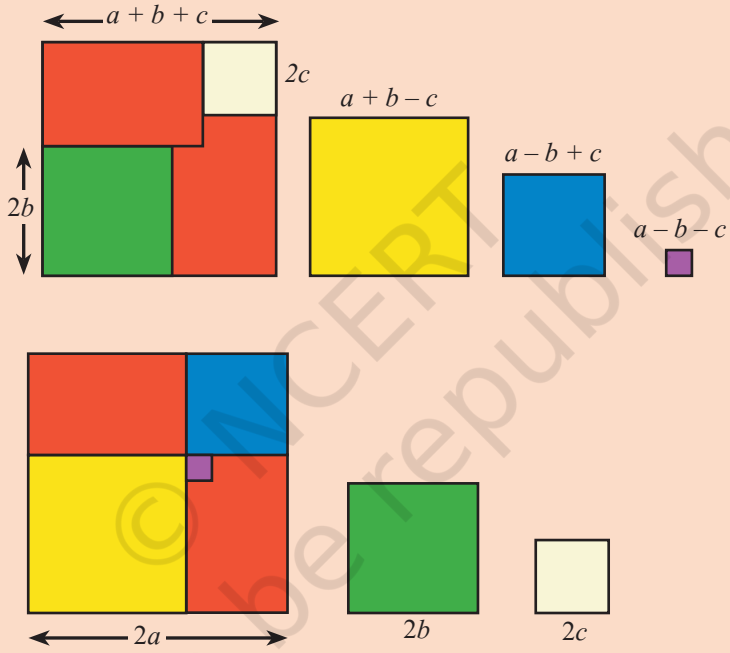
सोचिए और विचार कीजिए

1. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करके निम्नलिखित की गणना करने का प्रयास कीजिए—

   (i) 35^2 (ii) 65^2 (iii) 85^2 (iv) 105^2

   क्या आपने किसी रोचक प्रतिरूप का अवलोकन किया?

2. नीचे दिए गए चित्रों की दो पंक्तियों का अवलोकन कीजिए। ये एक बीजीय सर्वसमिका को दर्शाती हैं। इस सर्वसमिका की पहचान करने का प्रयास कीजिए—



चित्र 4.6

4.5 बीजीय टाइलों का उपयोग करके गुणनखंड करना

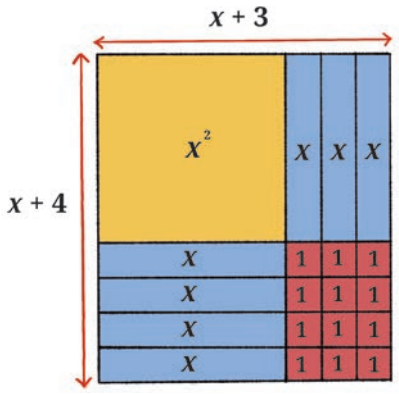
एक आयत पर विचार कीजिए, जिसकी भुजाएँ $(x + 3)$ तथा $(x + 4)$ इकाई हैं।

हम जानते हैं कि ऐसे आयत का क्षेत्रफल $(x + 3)\ (x + 4)$ वर्ग इकाई है।

वितरण गुणधर्म का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$$

© NCERT not to be republished



चित्र 4.7 — $x^2 + 7x + 12$ का गुणनखंड

चित्र 4.7 बीजीय टाइलों का उपयोग करके $x + 3$ और $x + 4$ के गुणन को प्रदर्शित करने में सहायता करता है। व्यंजक $x + 3$ को एक x-टाइल और तीन इकाई टाइलों द्वारा दर्शाया गया है। इसी प्रकार $x + 4$ को एक x-टाइल और चार इकाई टाइलों द्वारा दर्शाया गया है। इन दोनों रैखिक व्यंजकों का गुणनफल बड़े आयत द्वारा प्रदर्शित होता है जिसमें एक x^2 टाइल, 7 x-टाइलें तथा 12 इकाई टाइलें सम्मिलित हैं।

ध्यान दीजिए कि $x^2 + 7x + 12$ में $7x$ को $3x + 4x$ के रूप में विभाजित किया गया है। इसे इस प्रकार दर्शाया गया है कि x^2-टाइल की दाईं ओर तीन x-टाइलें और x^2-टाइल के नीचे चार x-टाइलें व्यवस्थित की गई हैं। साथ ही 12 इकाई टाइलों को 3×4 के व्यूह में व्यवस्थित किया गया है। एक बार जब आयताकार व्यवस्था बन जाती है तो हम देखते हैं कि आयत की विमाएँ क्रमशः $x + 3$ और $x + 4$ इकाई हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

मान लीजिए, $7x$ को $2x + 5x$ के रूप में विभाजित किया जाता है; क्या तब भी समान प्रकार की आयताकार व्यवस्था बनाई जा सकती है? अन्य संभावनाओं पर विचार कीजिए और परीक्षण कीजिए।

चित्र 4.7 हमें दो बीजीय सर्वसमिकाओं के दृश्यांकन में सहायता करता है—

(i) रैखिक व्यंजकों $x + 3$ और $x + 4$ को गुणा करने पर हमें सर्वसमिका $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ प्राप्त होती है।

(ii) इसी प्रकार, व्यंजक $x^2 + 7x + 12$ को रैखिक गुणनखंडों $(x + 3)$ और $(x + 4)$ के रूप में गुणनखंडित किया जा सकता है, जिससे वही सर्वसमिका $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$ प्राप्त होती है।

सोचिए और विचार कीजिए

बीजीय टाइलों का उपयोग गुणनफलों को प्रदर्शित करने और गुणनखंड ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है—

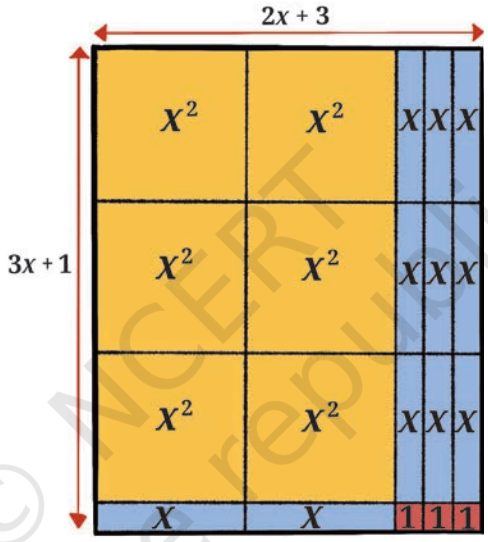
1. बीजीय टाइलों का उपयोग करते हुए $x + 2$ और $x + 3$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
2. $x^2 + 11x + 30$ के लिए बीजीय टाइलों को इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि आप उसके गुणनखंडों को देख सकें।

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

हमने देखा कि $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ है।
साथ ही, $(x + 6)(x + 7) = x^2 + 13x + 42$ है।
इस प्रतिरूप का व्यापकीकरण करके $(x + a)(x + b)$ का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

अब उस स्थिति पर विचार कीजिए, जहाँ हमारे पास चित्र 4.8 में दर्शाए अनुसार $2x + 3$ तथा $3x + 1$ भुजाओं वाला एक आयत है। आप इसके क्षेत्रफल $(2x + 3)(3x + 1)$ के विषय में क्या कहेंगे?



चित्र 4.8 — $(2x + 3) \times (3x + 1)$ को दर्शाने के लिए बीजीय टाइलों का उपयोग

समीकरण को सत्य सिद्ध करने हेतु उचित व्यंजकों द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

$$(px + a)(qx + b) = (_____)x^2 + (_____)x + _____$$

साथ ही, वितरण गुणधर्म का उपयोग करते हुए अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

4.6 बीजीय टाइलों के उपयोग के बिना गुणनखंडन

बीजीय व्यंजक $x^2 + 7x + 12$ पर विचार कीजिए जिसे रैखिक पदों $x + 3$ तथा $x + 4$ के गुणन द्वारा प्राप्त किया गया था। हमने चित्र 4.7 में देखा भी है कि $7x$ को $3x + 4x$ के रूप में ऐसे विभाजित किया गया कि बीजीय टाइलों का उपयोग करके आयत बनाया जा सके। परंतु हम 'x पद के विभाजन' को टाइलों के उपयोग के बिना कैसे करेंगे?

© NCERT not to be republished

उदाहरण 10 — आइए, $x^2 + 7x + 12 = x^2 + (a + b)\,x + ab$ से प्रारंभ करते हैं।

समीकरण के दोनों पक्षों में x-पद और अचर पदों के गुणांकों की तुलना करने पर हमें $a + b = 7$ तथा $ab = 12$ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए, यह तभी संभव है जब $a = 3$ और $b = 4$ अथवा $a = 4$ और $b = 3$ हो। अतः हम इन दो संभावनाओं में से एक का चयन करते हैं और गुणनखंडों को $(x + a)$ $(x + b)$ के रूप में लिखते हैं जो कि $(x + 3)(x + 4)$ है।

उदाहरण 11 — आइए, $x^2 + 11x + 30$ को इसी प्रकार गुणनखंडित करने का प्रयास करें।

$$x^2 + 11x + 30 = x^2 + (a + b)x + ab$$

इससे $a + b = 11$ और $ab = 30$ प्राप्त होता है। हमें a और b के मान इस प्रकार चुनने होंगे कि $ab = 30$ और $a + b = 11$ दोनों संतुष्ट हों। क्या होगा, यदि हम $a = 2$ और $b = 15$ चुनें या $a = 3$ और $b = 10$ चुनें? स्पष्ट है कि ये उपयुक्त मान नहीं हैं क्योंकि $ab = 30$ होने पर भी $a + b = 11$ के समान नहीं है। अत: हम 30 के गुणनखंडों को देखते हैं और $a = 5$ तथा $b = 6$ या इसके विपरीत $a = 6$ और $b = 5$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार x-पद, $11x$ को $5x + 6x$ के रूप में विभाजित किया जा सकता है।

अतः $x^2 + 11x + 30 = x^2 + (5 + 6)x + 30 = (x + 5)(x + 6)$

उदाहरण 12 — $x^2 - 5x + 6$ का गुणनखंड करने हेतु हम सबसे पहले ध्यान देते हैं कि x का गुणांक ऋणात्मक है। एक बार पुन: $x^2 - 5x + 6$ की तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ से करने पर हमें $a + b = -5$ और $ab = 6$ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि ये दोनों समीकरण एक साथ तभी संतुष्ट हो सकते हैं, जब $a = -2$ और $b = -3$ हों या इसके विपरीत $a = -3$ और $b = -2$ हों।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्न सर्वसमिकाओं को पूर्ण करने हेतु रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—
   (i) $s^2 - 11s + 24 = (_____)\,(_____)$
   (ii) $(_____)\,(x + 1) = (3x^2 - 4x - 7)$
   (iii) $10x^2 - 11x - 6 = (2x - ___)\,(___ + 2)$
   (iv) $6x^2 + 7x + 2 = (_____)\,(_____)$
2. ऐसी सर्वसमिका का चयन कीजिए और उसका उपयोग कीजिए, जिससे आप सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कर सकें—
   (i) $(41)^2$ (ii) $(27)^2$
   (iii) (23×17) (iv) $(135)^2$

© NCERT not to be republished

(v) $(97)^2$ (vi) (18×29)

(vii) (34×43) (viii) $(205)^2$

3. निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए—

(i) $9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab + 12ac - 4bc$ (ii) $16s^2 + 25t^2 - 40st$

(iii) $r^2 - r - 42$ (iv) $49g^2 + 14gh + h^2$

(v) $64u^2 + 121v^2 + 4w^2 - 176uv - 32uw + 44vw$

सोचिए और विचार कीजिए

जेम्स और रेशमा विद्यालय में सीखी गईं बीजीय सर्वसमिकाओं के विषय में बात कर रहे थे—

जेम्स— $(a - b)^2 (a + b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a + b)$

रेशमा— मेरा मत भिन्न है। $(a - b)^2 (a + b) = (a - b)[(a - b)(a + b)]$

$= (a - b)(a^2 - b^2)$

उत्तर प्राप्त करने हेतु मैं यह गुणनफल ज्ञात करूँगी।

आपके अनुसार कौन सही है और क्यों?

इसी प्रकार, और अधिक सर्वसमिकाओं को संयोजित करने का प्रयास कीजिए और नए परिणाम ज्ञात कीजिए।

4.7 नई सर्वसमिकाएँ ज्ञात करना

इस अनुभाग में हम बीजीय व्यंजकों के साथ प्रयोग करेंगे और देखेंगे कि क्या हम किन्हीं नई सर्वसमिकाओं को प्राप्त कर सकते हैं।

आपके विचार में $(a + b)^3$ कैसा दिखेगा?

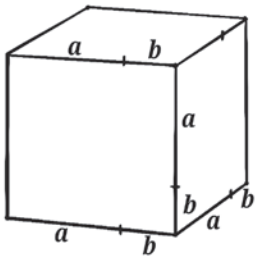
आइए, वितरण गुणधर्म का उपयोग करके उत्तर प्राप्त करते हैं—

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

यहाँ हमें एक नई सर्वसमिका प्राप्त हुई है—

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

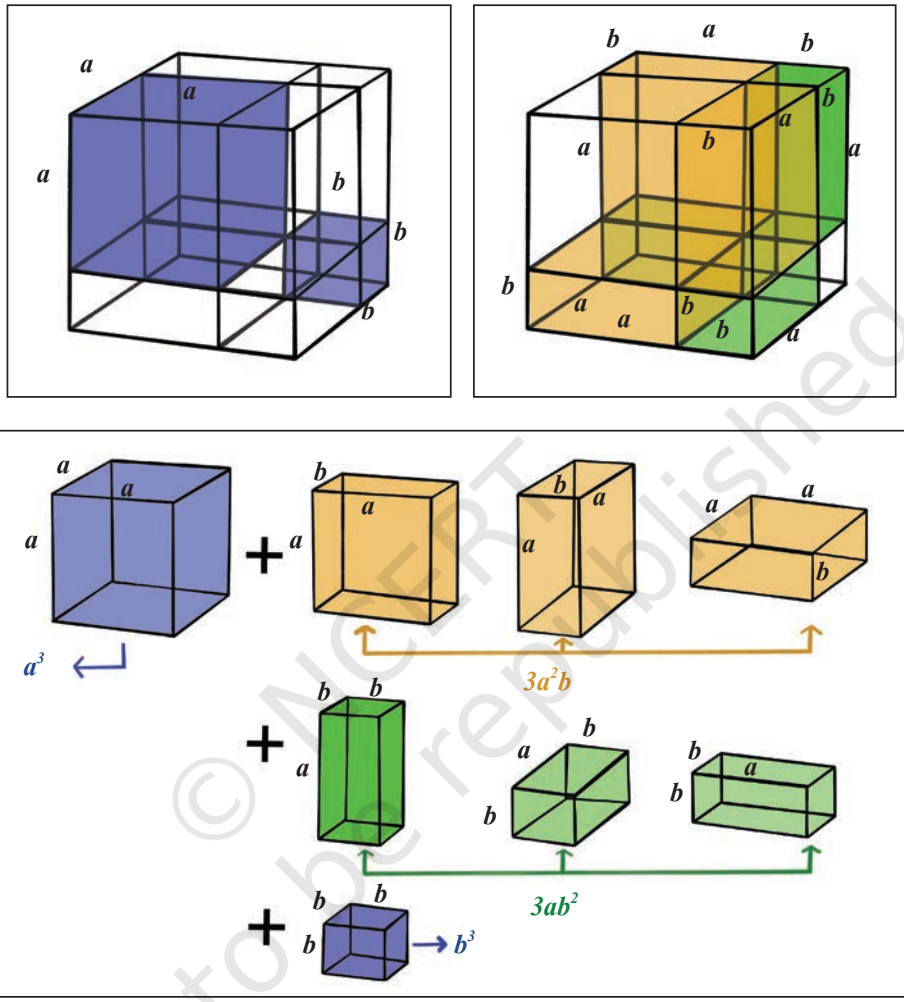
आइए, हम इस सर्वसमिका के दृश्यांकन का प्रयास करते हैं। हमने देखा कि $a + b$ भुजा वाले एक वर्ग को वर्गों और आयतों में विभाजित किया जा सकता है। इससे हमें $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सर्वसमिका प्राप्त हुई। क्या होगा, यदि हमारे पास $a + b$ भुजा वाला एक घन हो? क्या हम $(a + b)$ भुजा वाले घन को छोटे घनों और घनाभों में विभाजित करके इस नई सर्वसमिका को निरूपित कर सकते हैं?



चित्र 4.9 — भुजा $a + b$ वाला घन

© NCERT not to be republished

हम जानते हैं कि इस घन का आयतन $(a + b)^3$ है। आइए, इस घन को छोटे घनों और घनाभों में विभाजित करते हैं।



चित्र 4.10 — सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ का निरूपण

ध्यान दीजिए कि बड़े घन को दो घनों और छह घनाभों में विभाजित किया जा सकता है। इन घनों का आयतन क्रमशः a^3 तथा b^3 घन इकाई है।

अन्य छह घनाभों में से तीन घनाभों की विमाएँ a इकाई × a इकाई × b इकाई हैं और अन्य तीन घनाभों की विमाएँ a इकाई × b इकाई × b इकाई हैं। और इनके आयतन क्रमश: a^2b और ab^2 घन इकाई होंगे। अत: छह घनाभों का कुल आयतन $3a^2b + 3ab^2$ है।

इससे हमें प्राप्त होता है— $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

© NCERT not to be republished

यहाँ हमें एक नई सर्वसमिका प्राप्त हुई, जो इस प्रकार है—

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

इस नई सर्वसमिका में यदि हम b को $-b$ से विस्थापित कर दें तो क्या होगा?

$$[a+(-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

इससे हमें सर्वसमिका $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ प्रात होती है। ध्यान दीजिए कि चारों पदों में से दो पद धनात्मक और दो पद ऋणात्मक हैं। ये पद व्यंजक में एकांतर क्रम में आते हैं।

आइए देखते हैं कि हम इन नई सर्वसमिकाओं का उपयोग कैसे कर सकते हैं।

उदाहरण 13— उस घन की भुजा क्या है, जिसका आयतन $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$ घन इकाई है?

$p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$ की तुलना सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ के दाएँ पक्ष से करने पर हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$(p)^3 + 3\,(p)^2(2q) + 3(p)(2q)^2 + (2q)^3$$

जो $(p + 2q)^3$ है जिससे $a = p$ और $b = 2q$ हो। अत: घन की भुजा $p + 2q$ इकाई होगी।

उदाहरण 14— अब व्यंजक $8n^3 - 60n^2m + 150nm^2 - 125\,m^3$ पर विचार कीजिए।

यदि आप इसे $(a - b)^3$ के रूप में लिखते हैं तो a और b क्या होंगे?

व्यंजक $8n^3 - 60\ \ n^2m + 150nm^2 - 125m^3$ को $(2n)^3 - 3(2n)^2\ \ (5m) + 3(2n)\ (5m)^2 - (5m)^3$ के रूप पुनः लिखने पर और इसकी तुलना $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$ से करने पर हमें $(2n - 5m)^3$ प्राप्त होता है। अतः $a = 2n$ और $b = 5m$ है।

आइए, अब कुछ ज्ञात सर्वसमिकाओं के साथ प्रयोग करके और अधिक सर्वसमिकाएँ प्राप्त करते हैं। वितरण गुणधर्म का उपयोग करते हुए निम्नलिखित को गुणा करने का प्रयास कीजिए—

1. $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
2. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

आइए, प्रथम सर्वसमिका का गुणनफल ज्ञात करते हैं—

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$$

$$= x^3 - y^3$$

अत: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$ है। यह भी एक सर्वसमिका है!

© NCERT not to be republished

आप स्वयं के लिए x और y के भिन्न-भिन्न मान चुनकर इसकी पुष्टि कर सकते हैं।

अनुमान लगाइए कि $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ क्या होगा।

सोचिए और विचार कीजिए

हमें ज्ञात है कि $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ है।

इसके अतिरिक्त हमने यह सत्यापित किया है कि $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ है।

अवलोकन कीजिए कि $x - y$, $x^2 - y^2$ और $x^3 - y^3$ का सार्व गुणनखंड है।

क्या आपके विचार में $x - y$, $x^4 - y^4$ का भी गुणनखंड है?

ध्यान दीजिए कि $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ है।

क्या आप देख सकते हैं कि $x - y$, $x^4 - y^4$ का एक गुणनखंड किस प्रकार है?

$x^5 - y^5$ के विषय में आपका क्या विचार है? क्या इसमें भी $x - y$ एक गुणनखंड के रूप में है?

आगे अन्वेषण करते हुए आइए हम $(x + y + z)$ और $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$ का गुणन करते हैं।

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$
$$= (x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - x^2z - xyz) + (x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - xyz - y^2z)$$
$$+ (x^2z + y^2z + z^3 - xyz - xz^2 - yz^2)$$
$$= (x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - \cancel{x^2z} - xyz) + (\cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - xyz - \cancel{y^2z})$$
$$+ (\cancel{x^2z} + \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{xz^2} - \cancel{yz^2})$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

अतः $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

यह भी एक अन्य सर्वसमिका है। आइए, हम इसके कुछ अनुप्रयोगों का अन्वेषण करते हैं।

उदाहरण 15 — तीन संख्याओं का योगफल 10 है और उनका गुणनफल 25 है। उनके वर्गों का योगफल 38 है। पिछली सर्वसमिका का उपयोग करके इन तीनों संख्याओं के घनों का योगफल ज्ञात कीजिए।

माना कि तीन संख्याएँ क्रमशः x, y और z हैं। प्रश्न के अनुसार $x + y + z = 10$, $xyz = 25$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 38$ है।

सर्वसमिका $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है— $(10)(38 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(25)$

इस प्रकार, $x^3 + y^3 + z^3 = 380 - 10(xy + xz + yz) + 75 = 455 - 10(xy + xz + yz)$ होगा।

© NCERT not to be republished

$(xy + xz + yz)$ का मान ज्ञात करने हेतु हमें सर्वसमिका—

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ का उपयोग करना होगा।

हमें $100 = 38 + 2\,(xy + xz + yz)$ प्राप्त होता है। इस प्रकार $xy + xz + yz = 31$ है।

अब इसे पहले वाले समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है—

$x^3 + y^3 + z^3 = 455 - 10\,(xy + xz + yz) = 455 - 10\,(31) = 455 - 310 = 145$

4.8 परिमेय व्यंजकों का सरलीकरण

इस अध्याय के पिछले अनुभागों में हमने बीजीय व्यंजकों का गुणनखंडन करना सीखा है। आइए, देखें कि गुणनखंडन विधि का उपयोग करके हम कुछ परिमेय बीजीय व्यंजकों को कैसे हल कर सकते हैं।

उदाहरण 16— परिमेय व्यंजक $\frac{x^2 - 7x + 12}{5x^2 + 5x - 100}$ को यह मानते हुए सरल कीजिए कि $5x^2 + 5x - 100 \neq 0$

इस परिमेय व्यंजक को सरल बनाने हेतु हमें अंश और हर में उपस्थित व्यंजकों के सार्व गुणनखंडों को काटना होगा।

इस परिमेय व्यंजक को सरल बनाने हेतु हमें बीजीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करना होगा।

आइए, सबसे पहले अंश व्यंजक $x^2 - 7x + 12$ को देखते हैं। हमें a और b ज्ञात करने हैं जिससे $a + b = -7$ और $ab = 12$ हो। क्या आप ऐसी दो संख्याओं के विषय में विचार कर सकते हैं? ये संख्याएँ -3 और -4 हैं। व्यंजक के गुणनखंड करने पर हमें $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)\,(x - 4)$ प्राप्त होता है।

आइए, अब हर व्यंजक $5x^2 + 5x - 100$ को देखते हैं। हम देख सकते हैं कि तीनों पद 5 के गुणज हैं। इसलिए हम 5 को सार्व गुणनखंड ले सकते हैं। व्यंजक को इस प्रकार सरल करते हैं— $5x^2 + 5x - 100 = 5\,(x^2 + x - 20)$ अब हमें a और b इस प्रकार ज्ञात करने हैं कि $a + b = 1$ और $ab = -20$ हों। ऐसी दो संख्याओं के विषय में विचार करने का प्रयास कीजिए। ये संख्याएँ 5 और -4 हैं। इस प्रकार, हमें $5x^2 + 5x - 100 = 5\,(x - 4)\,(x + 5)$ प्राप्त होता है।

'अंश' और 'हर' में गुणनखंडित व्यंजकों को प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{5x^2 + 5x - 100} = \frac{x^2 - 7x + 12}{5(x^2 + x - 20)} = \frac{(x-4)(x-3)}{5(x-4)(x+5)}$$

इस प्रकार, सार्व गुणनखंड $x - 4$ को काट सकते हैं, क्योंकि यह 0 के समान नहीं है। हमें यह ज्ञात है क्योंकि $5x^2 + 5x - 100 \neq 0$ है। अत:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{5x^2 + 5x - 100} = \frac{x-3}{5(x+5)}$$

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

निम्नलिखित परिमेय व्यंजक को सरल करने का प्रयास कीजिए—

$$\frac{36s^2-12st+t^2}{t^2+2ts-48s^2}=\frac{(6s-t)^2}{(__+__)(__+__)}$$

(**संकेत**— $t^2+2ts-48s^2$ का गुणनखंड कीजिए और $t^2+2ts-48s^2\neq 0$ मानते हुए परिमेय व्यंजकों को सरल कीजिए।)

प्रश्नावली 4.5

1. यह मानते हुए कि हर में दिए गए व्यंजक शून्य के समान नहीं हैं, निम्नलिखित परिमेय व्यंजकों को सरल कीजिए—

(i) $\dfrac{3p^2-3pq-18q^2}{p^2+3pq-10q^2}$ (ii) $\dfrac{n^3-3n^2m+3nm^2-m^3}{5m^2-10mn+5n^2}$

(iii) $\dfrac{w^3-v^3+x^3+3wvx}{w^2+v^2+x^2-2wv-2vx+2wx}$ (iv) $\dfrac{4y^2-20yz+25z^2}{\left(25z^2-4y^2\right)}$

(v) $\dfrac{\left(x^2+x-6\right)\left(x^2-7x+12\right)}{(x^2-6x+8)\left(x^2-9\right)}$ (vi) $\dfrac{p^4-16}{p^2-4p+4}$

उदाहरण 17— सायरा ने x इकाई भुजा वाला एक वर्ग, x इकाई लंबाई और 1 इकाई चौड़ाई वाली 8 आयताकार पट्टियों और 1 इकाई भुजा वाले 15 वर्गों को व्यवस्थित करके एक बड़ा आयत बनाया है। x के पदों में आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

x इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल = x^2 वर्ग इकाई

x इकाई लंबाई और 1 इकाई चौड़ाई वाले आयत का क्षेत्रफल = x वर्ग इकाई

ऐसे 8 आयतों का कुल क्षेत्रफल = $8x$ वर्ग इकाई

1 इकाई भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल = 1 वर्ग इकाई

ऐसे 15 वर्गों का कुल क्षेत्रफल = 15 वर्ग इकाई

सभी वर्गों और आयतों का कुल क्षेत्रफल = $x^2+8x+15$ वर्ग इकाई

© NCERT not to be republished

अत: सायरा द्वारा बनाए गए आयत का क्षेत्रफल = $x^2 + 8x + 15$ वर्ग इकाई है।

हम $x^2 + 8x + 15$ का गुणनखंड करके सायरा द्वारा बनाए गए आयत की विमाएँ प्राप्त कर सकते हैं।

$x^2 + 8x + 15$ का गुणनखंड करने हेतु हमें a और b की आवश्यकता इस प्रकार है कि $a + b = 8$ और $ab = 15$ हो।

अत: $a = 3$ और $b = 5$ एक संभावना है। x के पदों में सायरा के आयत की संभावित लंबाई और चौड़ाई इस प्रकार है— लंबाई = $x + 5$ इकाई और चौड़ाई = $x + 3$ इकाई।

अब इन टुकड़ों का उपयोग करके सायरा का आयत बनाइए।

उदाहरण 18— एक आयताकार ताल इस प्रकार है कि इसकी चौड़ाई इसकी लंबाई से 4 मीटर कम है और क्षेत्रफल 96 वर्ग मीटर है। ताल की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

मान लीजिए कि ताल की लंबाई x मीटर है। अत: ताल की चौड़ाई $x - 4$ मीटर होगी।

चूँकि क्षेत्रफल 96 वर्ग मीटर दिया गया है, अत: $x(x - 4) = 96$ है।

अर्थात $x^2 - 4x = 96$ अथवा $x^2 - 4x - 96 = 0$

हम पद $-4x$ को विभाजित करने हेतु -96 के उपयुक्त गुणनखंड चुनते हैं। हमें ज्ञात है कि $(-12) \times 8 = -96$ और $(-12) + 8 = -4$ है। अतः $-4x$ को $-12x + 8x$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$x^2 - 4x - 96 = x^2 - 12x + 8x - 96 = x(x - 12) + 8(x - 12) = (x - 12)(x - 8) = 0$

इस प्रकार, $x^2 - 4x - 96 = 0$ का अर्थ $(x - 12)(x + 8) = 0$ है।

अर्थात या तो $x - 12 = 0$ या $x + 8 = 0$ है। इसका तात्पर्य $x = 12$ या $x = -8$ है। चूँकि x ताल की लंबाई है इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकती। अत: हम $x = -8$ को अनदेखा करते हैं और ताल की लंबाई $x = 12$ मीटर होनी चाहिए।

ताल की चौड़ाई = $x - 4 = 12 - 4 = 8$ मीटर है।

अंतिम प्रश्नावली

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i) $(-3x + 4)^2$ (ii) $(2s + 7)(2s - 7)$

(iii) $\left(p^2 + \frac{1}{2}\right)\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$ (iv) $(2n + 7)(2n - 7)$

(v) $(s - 2t)(s^2 + 2st + 4t^2)$ (vi) $\left(\frac{1}{2r} - 4r\right)^2$

© NCERT not to be republished

(vii) $(-3m + 4k - l)^2$ (viii) $\left(x - \frac{1}{3}y\right)^3$

(ix) $\left(\frac{7}{2}k - \frac{2}{3}m\right)^3$

2. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का उपयोग करके मान ज्ञात कीजिए—

(i) 17×21 (ii) 104×96

(iii) 24×16 (iv) 147^3

(v) 199^3 (vi) 127^3

(vii) $(-107)^3$ (viii) $(-299)^3$

3. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों का गुणनखंड कीजिए—

(i) $4y^2 + 1 + \frac{1}{16y^2}$ (ii) $9m^2 - \frac{1}{25n^2}$

(iii) $27b^3 - \frac{1}{64b^3}$ (iv) $x^2 + \frac{5x}{6} + \frac{1}{6}$

(v) $27u^3 - \frac{1}{125} - \frac{27u^2}{5} + \frac{9u}{25}$ (vi) $64y^3 + \frac{1}{125}z^3$

(vii) $p^3 + 27q^3 + r^3 - 9pqr$ (viii) $9m^2 - 12m + 4$

(ix) $9x^3 - \frac{8}{3}y^3 + \frac{z^3}{3} + 6xyz$

(x) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12xy + 36yz + 24zx$

(xi) $27u^3 - \frac{1}{216} - \frac{9u^2}{2} + \frac{u}{4}$

4. निम्नलिखित को सरल कीजिए—

(i) $\frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 - 1}$ (ii) $\frac{9\left(3a^3 - 24b^3\right)}{9a^2 - 36b^2}$ (iii) $\frac{s^3 + 125t^3}{s^2 - 2st - 35t^2}$

संकेत — मान लीजिए कि 'हर' शून्य के समान नहीं है।

© NCERT not to be republished

5. निम्नलिखित व्यंजकों द्वारा आयतों के क्षेत्रफल वर्ग इकाई में दिए गए हैं। इन आयतों की लंबाई और चौड़ाई के संभावित व्यंजक ज्ञात कीजिए—

   (i) $25a^2 - 30ab + 9b^2$ (ii) $36s^2 - 49t^2$

6. निम्नलिखित व्यंजकों द्वारा घनाभों के आयतन घन इकाई में दिए गए हैं। इन घनाभों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के संभावित व्यंजक ज्ञात कीजिए—

   (i) $6a^2 - 24b^2$ (ii) $3ps^2 - 15ps + 12p$

7. गाँव के खेल का मैदान 40 मीटर भुजा वाले एक वर्ग के आकार का है। व्यक्तियों के चलने हेतु खेल के मैदान के चारों ओर s मीटर चौड़ाई का एक मार्ग निर्मित किया गया है। s के पदों में मार्ग के क्षेत्रफल का व्यंजक ज्ञात कीजिए।

8. यदि किसी संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $\frac{10}{3}$ हो तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

9. एक आयताकार ताल का क्षेत्रफल $2x^2 + 7x + 3$ वर्ग हस्त है। यदि इसकी चौड़ाई $2x + 1$ 'हस्त' है, तो इसकी लंबाई ज्ञात कीजिए। 'हस्त' लंबाई मापने की एक इकाई होती थी।

*10. यदि $x - 2$ और $x - \frac{1}{2}$ दोनों $px^2 + 5x + r$ के गुणनखंड हैं तो दर्शाइए कि $p = r$ है।

*11. यदि $a + b + c = 5$ और $ab + bc + ca = 10$ है तो सिद्ध कीजिए कि $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$ होगा।

*12. व्यंजक के गुणनखंड द्वारा जाँच कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $n^3 - n$ सदैव 6 से विभाज्य है। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

*13. निम्न के मान ज्ञात कीजिए—

   (i) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$, जब $x + y = -4$

   (ii) $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$, जब $x = 2y + 6$

सारांश

- सर्वसमिकाएँ ऐसे समीकरण होते हैं, जो चरों के सभी मानों के लिए सत्य होते हैं।
- ज्यामितीय प्रदर्शों (मॉडलों) या बीजीय टाइलों का उपयोग सर्वसमिकाओं के दृश्यांकन की विधियों में से एक है।
- सर्वसमिकाओं का उपयोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड के लिए भी किया जा सकता है।
- द्विघातीय व्यंजकों के गुणनखंडन को बीजीय टाइलों की सहायता से दृश्यांकित किया जा सकता है।

© NCERT not to be republished

- सर्वसमिकाओं का उपयोग संख्याओं का वर्ग करने या संख्याओं के गुणनफल का मूल्यांकन करने जैसी गणनाओं को सरल बनाने के लिए भी किया जा सकता है।
- परिमेय बीजीय व्यंजकों को 'अंश' व 'हर' को गुणनखंडित करके तथा सार्व गुणनखंड को हटाकर हल किया जा सकता है जबकि ऐसा गुणनखंड विद्यमान हो और वह शून्य के समान न हो।
- हमने इस अध्याय में निम्नलिखत सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया है—
  - $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
  - $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
  - $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
  - $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
  - $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
  - $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
  - $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
  - $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
  - $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
  - $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
  - $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

© NCERT not to be republished

5 मैं हूँ गोल-गोल, ऊपर-नीचे

0920CH05

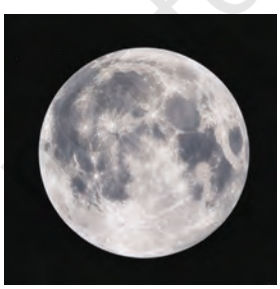
मानव-जाति अपने आस-पास की वस्तुओं की आकृतियों से सदैव ही मुग्ध होती रही है। कुछ आरंभिक गुफा चित्रकलाओं में सूर्य को वृत्त के रूप में प्रदर्शित किया गया है। ओडिशा में गुडाहांडी की गुफा चित्रकलाओं में उनकी ज्यामितीय आकृतियाँ, जैसे— त्रिभुज, वर्ग, वृत्त और अंडाकार आकृतियाँ देखी जा सकती हैं। मनुष्य ने अपने आस-पास की प्रकृति में जो आकृतियाँ देखीं, संभवत: गुफा चित्रकलाओं में मिलने वाली आकृतियाँ उन्हीं से प्रेरित रही होंगी।

क्या आप चित्र 5.1 में आकृतियों के उद्‌भव की पहचान कर सकते हैं?



चित्र 5.1

जब वर्षा की बूँदें जल पर गिरती हैं तो वृत्ताकार तरंगें बनती हैं। पौधे के तने की अनुप्रस्थ काट तथा खिले हुए सूर्यमुखी की आकृति भी वृत्ताकार होती है। पूर्णिमा का चंद्रमा और सूर्य भी वृत्ताकार दिखाई देते हैं।



चंद्रमा



सूर्य (सूर्यग्रहण के समय)

चित्र 5.2

© NCERT not to be republished

छोटे-बड़े सभी प्रकार के वृत्तों में कौन-से गुण एकसमान हैं? ऐसा एक गुण आप कक्षा 7 की गणित की पाठ्यपुस्तक में पढ़ चुके हैं। मनुष्य ने प्रकृति में कई वृत्ताकार प्रतिरूपों (पैटर्न) का अवलोकन करने के बाद ही इस गुण पर ध्यान दिया होगा। प्रत्येक वृत्त का एक केंद्र होता है। वृत्त के सभी बिंदु, केंद्र से समान दूरी पर होते हैं। इस अवलोकन का उपयोग करते हुए हम वृत्त को परिभाषित करते हैं।

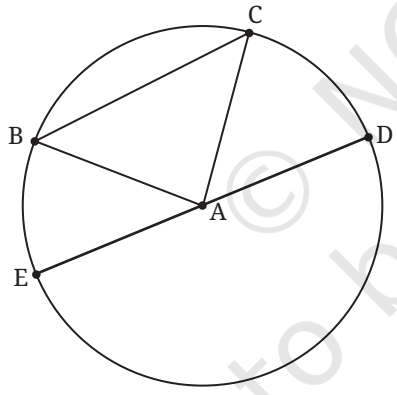
गतिविधि — प्रकृति में विद्यमान कुछ वस्तुओं की सूची बनाइए, जो वृत्ताकार दिखाई देती हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

जमुना के पास कागज का एक वृत्ताकार टुकड़ा है। वह इसके केंद्र का पता लगाने का प्रयास कर रही है। अमीना उसे एक सुझाव देती है। वह उन निर्देशों का पालन करती है और उसके परिणाम से रोमांचित होती है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि अमीना ने उसे क्या सुझाव दिया होगा?

5.1 परिभाषाएँ

जब भी हम गणितीय आकृतियों जैसे— वृत्त, त्रिभुज और वर्ग की बात करते हैं तो हम सदैव यह कल्पना करते हैं कि ये आकृतियाँ एक कागज (द्वि-विमीय समतल) पर बनी हुई हैं।



चित्र 5.3 — वृत्त, केंद्र A, जीवा BC

वृत्त किसी समतल पर उन सभी बिंदुओं का समूह है, जो उस समतल पर किसी दिए गए बिंदु से समदूरस्थ हैं। बिंदुओं का समूह जो इस दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है उसे प्रतिबंध का बिंदुपथ भी कहा जाता है। इस पद (शब्द) का उपयोग करते हुए वृत्त को ऐसे बिंदुओं के बिंदुपथ के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है, जो इस दिए गए बिंदु से समदूरस्थ हों। यह दिया गया बिंदु वृत्त का केंद्र है। **केंद्र** से वृत्त के किसी भी बिंदु के मध्य की दूरी वृत्त की **त्रिज्या** है।

चित्र 5.3 में बिंदु A वृत्त का केंद्र है। समतल पर स्थित सभी बिंदु जो वृत्त के केंद्र A से AB की लंबाई की समान दूरी पर स्थित हैं, वे एक वृत्त बनाते हैं, जिसका केंद्र A है और AB की लंबाई वृत्त की त्रिज्या के समान है।

मान लीजिए B और C, वृत्त पर स्थित दो बिंदु हैं। रेखाखंड BC वृत्त की **जीवा** कहलाती है। जीवा BC द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण $\angle BAC$ है। वह जीवा, जो वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है, उसे वृत्त का **व्यास** कहते हैं।

© NCERT not to be republished

5.2 वृत्त की सममिति

वृत्त के पूर्णत: सममित होने से वे बहुत आकर्षक लगते हैं। मान लीजिए, आप किसी वाहन का पहिया देख रहे हैं। आप देखते हैं कि पहिए का कोई बिंदु या भाग भूमि को स्पर्श कर रहा है। जब आप कुछ समय बाद पुन: पहिए को देखते हैं तो आप पुन: पाते हैं कि पहिए का एक बिंदु भूमि को स्पर्श कर रहा है। क्या आप बता सकते हैं कि पहिए के ये दोनों बिंदु समान बिंदु हैं? आप यह नहीं बता सकते हैं; घूमता हुआ पहिया पूरे समय एक जैसा ही दिखाई देता है। हम कह सकते हैं कि वृत्त में पूर्ण घूर्णन सममिति होती है— पहिए को किसी भी कोण से घुमाइए, वह ठीक पहले जैसा ही दिखाई देता है।

कागज पर एक वृत्त बनाइए और वृत्त के अनुदिश कागज को काट लीजिए। वृत्ताकार कागज को इस प्रकार मोड़िए कि इसके किनारे परस्पर आच्छादित हों, फिर इसे खोल लीजिए। आप कागज पर मोड़ के चिह्न देख सकते हैं जो वृत्त की परावर्तन सममिति की रेखा है। क्या यह रेखा वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है? हाँ, यह रेखा वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है। यह रेखा वृत्त का **व्यास** है। वृत्त के सभी व्यास, परावर्तन सममिति की रेखाएँ हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

1. एक वर्ग में घूर्णन सममिति कौन कौन-सी हैं? इसमें परावर्तन सममिति की कितनी रेखाएँ हैं? एक सम पंचभुज और एक समषट्भुज में घूर्णन सममिति और परावर्तन सममिति की कितनी रेखाएँ होती हैं?
2. 5 इकाई त्रिज्या वाले वृत्त में सबसे लंबी जीवा की लंबाई कितनी है? क्या इस वृत्त में कोई सबसे छोटी जीवा है?
3. किसी दिए गए बिंदु से समदूरस्थ बिंदुओं का बिंदुपथ वृत्त कहलाता है। दिए गए किन्हीं दो बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदुओं के बिंदुपथ के विषय में हम क्या कह सकते हैं?

   (संकेत— हम जानते हैं कि किन्हीं दो दिए गए बिंदुओं A और B से समदूरस्थ कोई भी बिंदु, AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है। क्या इस कारण से रेखाखंड का लंब समद्विभाजक, समदूरस्थ बिंदुओं का बिंदुपथ हो जाएगा। इसके लिए हमें यह सिद्ध करना होगा कि लंब समद्विभाजक पर स्थित सभी बिंदु, A व B से समदूरस्थ हैं।)

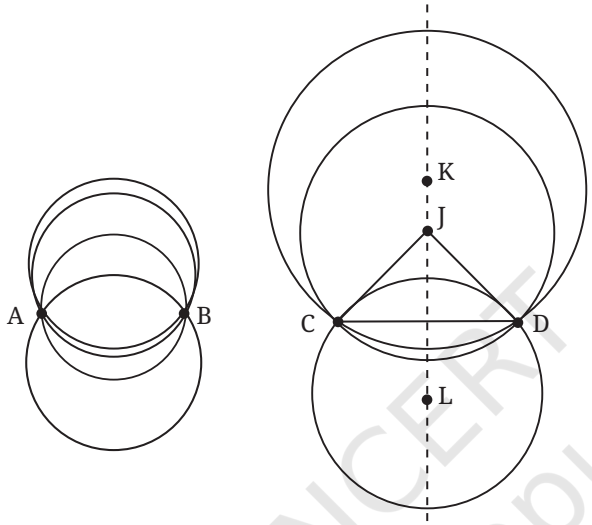
5.3 कितने वृत्त?

अब जब हम वृत्त को परिभाषित कर चुके हैं और इसके कुछ गुणों को सूचीबद्ध कर चुके हैं तो आइए, इस प्रश्न पर विचार करते हैं— किसी समतल पर दिए गए दो बिंदुओं A और B से कितने वृत्त होकर गुजरते हैं?

यदि कोई वृत्त A और B से होकर गुजरता है तो इसका कोई केंद्र बिंदु होगा। मान लीजिए, यह बिंदु O है। लंबाइयाँ OA और OB समान हैं। क्या इस गुण के साथ कोई अन्य बिंदु है? हाँ, यह बिंदु रेखाखंड AB का मध्य बिंदु है। इस मध्य बिंदु को केंद्र मानते हुए A और B से गुजरता हुआ एक वृत्त बनाया जा सकता है। इस वृत्त की त्रिज्या AB की लंबाई की आधी है और AB एक व्यास है।

© NCERT not to be republished

क्या A और B दोनों बिंदुओं से होकर जाने वाले और भी वृत्त हो सकते हैं? स्पष्टत: कोई भी बिंदु जो A और B से समदूरस्थ हो, A और B से होकर जाते हुए वृत्त का केंद्र हो सकता है। क्या आप ऐसे कुछ बिंदु जानते हैं? हम देख चुके हैं कि रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक, A और B से समदूरस्थ बिंदुओं का बिंदुपथ है। लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु, A और B से समदूरस्थ है और प्रत्येक बिंदु जो A और B से समदूरस्थ है, वह AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित है। अत: A और B से होकर जाने वाले सभी वृत्तों के केंद्र, AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।



चित्र 5.4 — दो बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त

चित्र 5.4 में हम बिंदु A और B से होकर जाने वाले तथा बिंदु C और D से होकर जाने वाले वृत्तों को तथा CD के लंब समद्विभाजक को देख सकते हैं। लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु, C और D से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र है। अत: हम बिंदु C व D से होकर जाते हुए केंद्र K, J और L वाले वृत्त देख सकते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

1. किसी समतल पर स्थित दो बिंदुओं से कितने वृत्त होकर जाते हैं?
2. क्या A और B से होकर जाते हुए सभी संभावित त्रिज्याओं वाले वृत्त विद्यमान होते हैं? A और B से होकर जाते हुए सबसे छोटे वृत्त की त्रिज्या क्या है? A और B से होकर जाते हुए सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या क्या है?
3. जैसे-जैसे आप रेखाखंड AB से लंब समद्विभाजक के अनुदिश दूर होते जाते हैं तो A और B से होकर जाते हुए वृत्तों की त्रिज्याएँ बढ़ती हैं या घटती हैं?
4. जैसे-जैसे आप लंब समद्विभाजक के अनुदिश जाते हैं तो क्या उस बिंदु से निर्मित A और B से होकर जाता हुआ वृत्त अधिक वक्रीय या कम वक्रीय प्रतीत होता है?
5. एक समतल पर आपको दो बिंदु A और B दिए गए हैं। आप उसी समतल पर ऐसे कितने वर्ग बना सकते हैं जिनकी सीमारेखा पर A और B स्थित हों? उसी समतल पर आप ऐसे कितने वर्ग बना सकते हैं जिनके कोने के बिंदु A और B हों?

© NCERT not to be republished

यहाँ एक प्रश्न स्वाभाविक है— आप किसी समतल पर तीन भिन्न बिंदुओं A, B और C से होकर जाते हुए कितने वृत्त बना सकते हैं? क्या सदैव कम से कम केवल एक ही ऐसा वृत्त होगा? यह आवश्यक नहीं है! क्या होगा, यदि A, B और C एक ही रेखा पर स्थित हों या **संरेखीय** हों? क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि क्यों इस स्थिति में A, B और C से होकर कोई वृत्त नहीं जाता?

मान लेते हैं कि A, B और C संरेखीय नहीं हैं। इस स्थिति में क्या सदैव ऐसा कोई त्रिभुज है जो A, B और C से होकर जाता है? क्या A, B और C से होकर जाने वाले एक से अधिक वृत्त हो सकते हैं?

प्रमेय 1 — *तीन असंरेखीय बिंदुओं से होकर जाने वाला वृत्त अद्वितीय होता है।*

यह सत्य क्यों है? यदि कोई वृत्त है जो असंरेखीय बिंदुओं A, B और C से होकर जाता है तो इसका केंद्र भी अवश्य होगा। आइए, केंद्र को बिंदु O कहते हैं (हम शीघ्र O को ढूँढ़ लेंगे)।

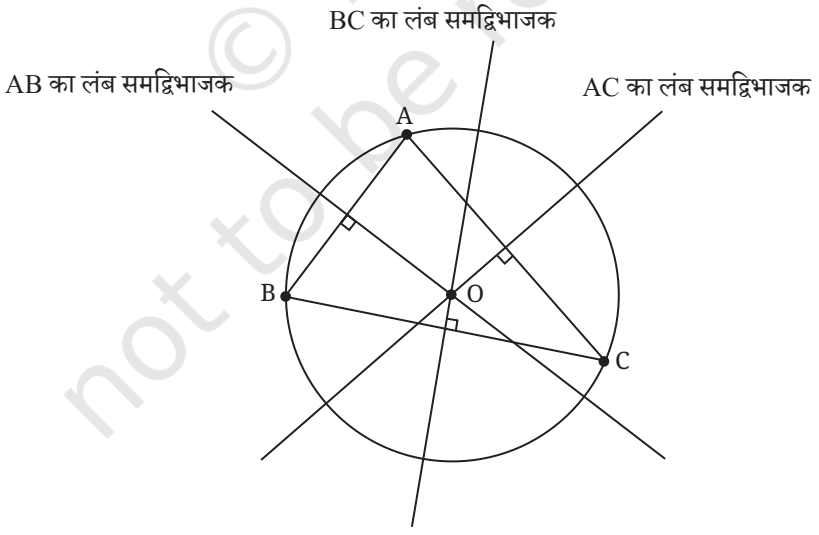
क्योंकि OA = OB है, हम जानते हैं कि O, AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित है।

क्योंकि OA = OC है, हम जानते हैं कि O, AC के लंब समद्विभाजक पर भी स्थित है।

किंतु बिंदु A, B और C **संरेखीय नहीं** हैं, अतः AB और AC के लंब समद्विभाजक केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करेंगे क्योंकि किसी समतल पर दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ केवल एक ही बिंदु पर मिलती हैं। वह प्रतिच्छेद बिंदु O होगा।

हम O को केंद्र मानते हुए OA की लंबाई के समान त्रिज्या का वृत्त बना सकते हैं। यह वृत्त A, B और C से होकर जाएगा। इससे सिद्ध होता है कि यह कथन सत्य क्यों है।

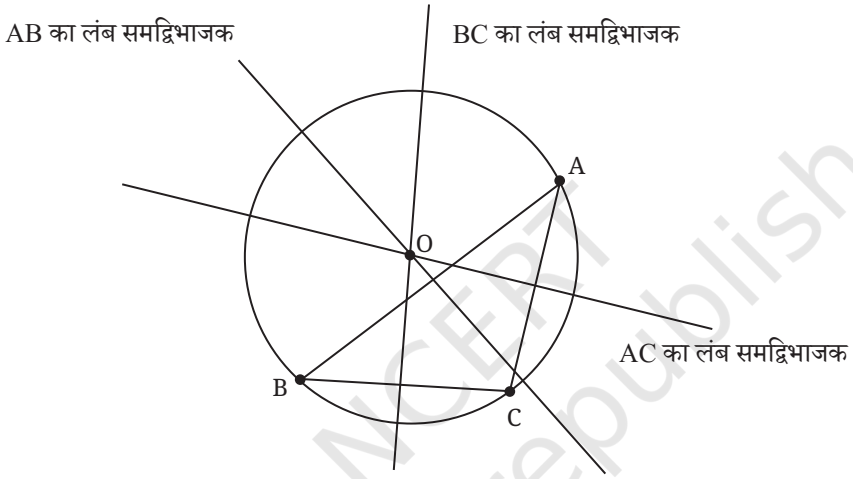
हम जानते हैं कि तीन असंरेखीय बिंदु एक त्रिभुज को भी निर्धारित करते हैं। हमने ऊपर इससे पहले किसी त्रिभुज के शीर्षों से होकर जाते हुए वृत्त की संरचना का उल्लेख किया है।



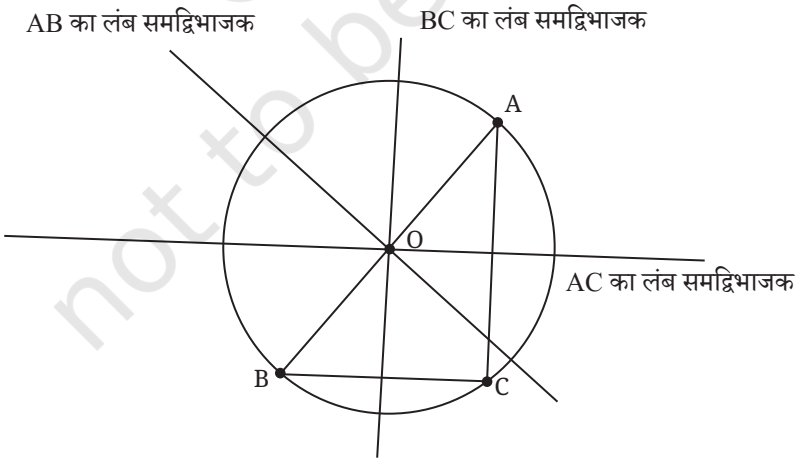
चित्र 5.5 — त्रिभुज ABC का परिवृत्त

© NCERT not to be republished

ΔABC के शीर्षों A, B और C से होकर जाते हुए वृत्त के केंद्र O को ΔABC का **परिकेंद्र** कहते हैं (चित्र 5.5)। इस वृत्त को **परिवृत्त** कहते हैं, जो त्रिभुज का परिगत वृत्त होता है। इसके विपरीत त्रिभुज को वृत्त के अंतर्गत त्रिभुज कहा जाता है क्योंकि AB और BC के लंब समद्विभाजक केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं। अतः किसी दिए गए त्रिभुज के लिए ऐसा केवल एक ही वृत्त है। साथ ही, किसी भी न्यूनकोण त्रिभुज के लिए परिकेंद्र त्रिभुज के अंदर स्थित होता है (चित्र 5.5)। किसी भी अधिक कोण त्रिभुज के लिए परिकेंद्र त्रिभुज के बाहर स्थित होता है (चित्र 5.6)। और किसी भी समकोण त्रिभुज के लिए परिकेंद्र त्रिभुज के कर्ण के मध्यबिंदु पर स्थित होता है (चित्र 5.7)।



चित्र 5.6—अधिक कोण त्रिभुज— परिकेंद्र O त्रिभुज के बाहर स्थित है



चित्र 5.7—समकोण त्रिभुज— परिकेंद्र O कर्ण के मध्यबिंदु पर स्थित है

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 5.1

1. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेंटीमीटर, $\angle A = 70^\circ$ और $\angle B = 60^\circ$ है। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। क्या इस वृत्त का केंद्र त्रिभुज के अंदर या बाहर स्थित है?
2. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेंटीमीटर, $\angle A = 100^\circ$, AC = 4 सेंटीमीटर है। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। इस वृत्त का केंद्र त्रिभुज के अंदर या बाहर स्थित है?
3. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 6 सेंटीमीटर, BC = 7 सेंटीमीटर, CA = 7 सेंटीमीटर है। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। मान लीजिए, परिकेंद्र O है तो OA, OB और OC को मापिए।
4. दो बिंदुओं A और B से होकर जाते हुए वृत्त की न्यूनतम संभावित त्रिज्या क्या है?

सोचिए, रचना कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

1. A, B और C तीन संरेखीय बिंदु हैं। क्या आप ऐसे एक बिंदु P का पता लगा सकते हैं जिसके लिए PA = PB = PC हो? आप AB और BC के लंब समद्विभाजकों के विषय में क्या कह सकते हैं? रचना कीजिए और जाँचिए। क्या आप प्रदर्शित कर सकते हैं कि तीन संरेखीय बिंदुओं A, B और C के लिए AB और BC के लंब समद्विभाजक समांतर हैं? क्या संरेखीय बिंदुओं से होकर जाता हुआ वृत्त संभव है? क्या आप एक ऐसी रेखा खींच सकते हैं, जो दिए गए वृत्त को तीन भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है?
2. दिए गए ΔABC के परिवृत्त की रचना की जाती है। क्या ΔABC के सर्वांगसम अन्य त्रिभुज हो सकते हैं, जिनका परिवृत्त ΔABC का परिवृत्त हो?

5.4 जीवा और जीवा द्वारा अंतरित कोण

आप जानना चाहते होंगे कि कब कोई 4 बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं। इसके लिए आपको इस अध्याय के अंत तक प्रतीक्षा करनी होगी। हमें यह जानने के लिए अभी कुछ और सीखने की आवश्यकता है।



चित्र 5.8 — जीवाएँ और त्रिज्याएँ

एक पहिए के दो बिंदुओं पर धागा बाँधिए; इसे खींचकर बाँधिए (चित्र 5.8)। धागे को पहिए (वृत्त) की जीवा माना जा सकता है। धागे के अंत्य बिंदुओं को वृत्त के केंद्र पर मिलाने की कल्पना कीजिए। धागा वृत्त के केंद्र पर एक कोण अंतरित करता है। अब पहिए को घुमा दीजिए। धागा पहिए के साथ-साथ केंद्र के चारों ओर घूमता है।

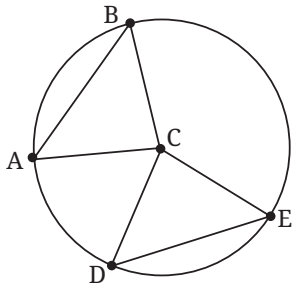
© NCERT not to be republished

पहिए को घुमाने पर बनी नई स्थिति में धागा वृत्त की अन्य जीवा है। पहली और दूसरी जीवा के मध्य क्या समानता है? दोनों जीवाओं की लंबाई समान है, जो धागे की लंबाई के समान है। दूसरी नई जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण के विषय में क्या कहा जा सकता है? यह कोण अवश्य ही पहली जीवा द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण के समान है। अब हम स्पष्ट करते हैं कि ऐसा क्यों है।

प्रमेय 2 — *वृत्त की समान जीवाएँ वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।*

यह प्रमेय क्या बताती है? यह वृत्त की दो समान लंबाई वाली जीवाओं के बारे में बताती है। ज्यामिति में, चित्र बनाने से सदैव सहायता मिलती है (चित्र 5.9 देखिए)। AB और DE समान लंबाई की जीवाएँ हैं। हमें यह स्पष्ट करना है कि ∠ACB, ∠DCE के समान क्यों है। हमें क्या दिया गया है? हमें AB = DE दिया गया है।

यह स्पष्ट करने के लिए कि क्यों दो भिन्न त्रिभुजों में दो कोण समान होते हैं, हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता का उपयोग करते हैं। जिन कोणों को हमें समान दिखाना है, यदि वे संगत कोण हों तो प्रमेय सिद्ध हो जाएगी!



चित्र 5.9

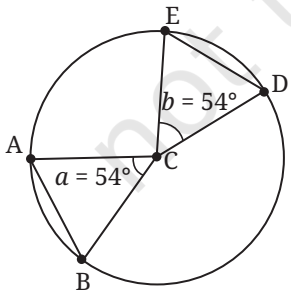
दिया गया है — AB = DE

सिद्ध करना है — ∠ACB = ∠DCE

यह सत्य क्यों है? सर्वप्रथम, हम देखते हैं कि CA = CB = r है, जो वृत्त की त्रिज्या है।

साथ ही CD = CE = r है। अत: CA = CD और CB = CE है। किंतु AB = DE दिया गया है! SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा ΔCAB, ΔCDE के सर्वांगसम है। अत: ∠ACB, ∠DCE के समान है अर्थात केंद्र पर अंतरित कोण समान हैं।

अब मान लीजिए, दो जीवाएँ हैं जो केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं। क्या जीवाएँ आपस में समान हैं? हमें अपने अंतर्बोध से क्या ज्ञात होता है? मान लीजिए, जीवाएँ AB और DE हैं। आइए, अपनी कल्पनाशक्ति का उपयोग करते हैं। मान लीजिए कि बिंदु B, A, E और D वृत्त पर दक्षिणावर्त स्थित हैं जैसा कि चित्र 5.10 में दर्शाया गया है।



चित्र 5.10

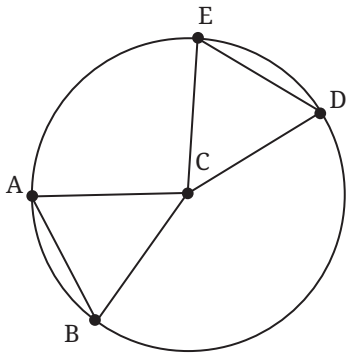
कल्पना कीजिए कि आप वृत्त के केंद्र C पर खड़े हैं। अपनी भुजाओं को इस प्रकार फैलाइए कि उनके मध्य एक कोण बने। मान लीजिए, आपकी भुजाएँ वृत्त को बिंदु A और B पर प्रतिच्छेद करती हैं। आपकी भुजाओं के अंत्य बिंदुओं के मध्य दूरी ही जीवा AB की लंबाई होनी चाहिए। अब मान लीजिए कि आप जिस सतह पर खड़े हैं, वह जादुई रूप से घूर्णन करती है। सतह के साथ आप भी बिंदु C पर गोल घूमने (मान लीजिए दक्षिणावर्त) लगते हैं। आपको अपनी भुजाओं के मध्य बने कोण को परिवर्तित नहीं करना है। घूमते हुए किसी बिंदु पर आपकी बाईं भुजा बिंदु E पर मिलती है।

© NCERT not to be republished

इस समय आपका दायाँ हाथ (अंतबिंदु) कहाँ होगा? इसे बिंदु D पर होना चाहिए, क्या ऐसा नहीं होगा? ऐसा इसलिए है, क्योंकि हमने माना था कि कोण ACB और DCE परस्पर समान हैं और आपने अपने हाथों को हिलाया भी नहीं है। अत: आपकी भुजाओं के अंतबिंदुओं के मध्य दूरी भी DE की दूरी के समान ही होगी। आइए, अब स्पष्ट करते हैं कि यह सत्य क्यों है।

प्रमेय 3 — *वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करने वाली जीवाएँ परस्पर समान होती हैं।*

आइए, चित्र 5.11 में दर्शाए अनुसार आकृति की रचना करते हैं।



चित्र 5.11

दिया गया है — $\angle ACB = \angle DCE$

सिद्ध करना है — $AB = ED$

यह सत्य क्यों है? हम देखते हैं कि—

$AC = BC$ = वृत्त की त्रिज्या है।

इसी प्रकार, $EC = DC$ = वृत्त की त्रिज्या है।

अत: $AC = DC$ और $BC = EC$ है।

चूँकि, $\angle ACB = \angle DCE$ दिया गया है,

अत: SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा $\Delta ACB \cong \Delta DCE$ है। अत: $AB = ED$ होगा।

प्रश्नावली 5.2

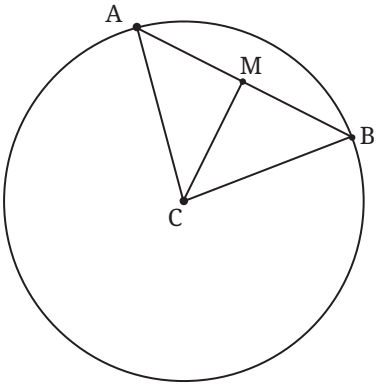
1. प्रदर्शित कीजिए कि किसी जीवा द्वारा वृत्त के केंद्र के साथ बनने वाला त्रिभुज, एक समद्विबाहु त्रिभुज होता है।
2. प्रदर्शित कीजिए कि यदि ऐसे दो समद्विबाहु त्रिभुजों (प्रश्न 1 के त्रिभुज) के आधार की लंबाई समान हो तो वे सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं।

5.5 जीवाओं के मध्यबिंदु और लंब समद्विभाजक

इस अनुभाग में हम जीवाओं के और अधिक गुणों का अध्ययन करेंगे। जब हम किसी वृत्त के केंद्र से जीवा के मध्यबिंदु तक एक रेखाखंड खींचते हैं तो क्या हमें कोई विशेष निष्कर्ष प्राप्त होता है? यदि हम किसी जीवा के लंब समद्विभाजक की रचना करें तो क्या होगा? क्या यह किसी विशेष बिंदु से होकर जाता है?

© NCERT not to be republished

प्रमेय 4 — *किसी वृत्त में केंद्र को जीवा के मध्यबिंदु से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लंब होती है।*



चित्र 5.12

आइए, देखते हैं कि यह सत्य क्यों है। केंद्र C वाला एक वृत्त बनाइए (चित्र 5.12)। कोई भी जीवा AB बनाइए। मान लीजिए, बिंदु M जीवा AB का मध्यबिंदु है। हमें प्रदर्शित करना है कि CM, AB पर लंब है।

उपपत्ति — CAB एक समद्विबाहु त्रिभुज है। AB त्रिभुज का आधार है और CA = CB है।

अत: $\angle A = \angle B$ होगा।

M, AB का मध्यबिंदु है। अत: AM = BM है।

SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा ΔCMA, ΔCMB के सर्वांगसम है।

अत: $\angle CMB = \angle CMA$ होगा। किंतु $\angle CMB + \angle CMA = 180°$ (रेखीय युग्म) है।

अत: दोनों कोणों की माप 90° होगी अर्थात CM, जीवा AB पर लंब है।

प्रश्नावली 5.3

1. क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि प्रमेय 4 का विलोम सत्य क्यों है— किसी वृत्त के केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब उस जीवा को क्यों समद्विभाजित करता है।
   (**संकेत**— चित्र 5.12 का उपयोग कीजिए। आपको बताया गया है कि—
   $\angle CMA = \angle CMB = 90°$ है। आपको प्रदर्शित करना है कि AM = BM है।
2. एक वृत्त के अंतर्गत समद्विबाहु त्रिभुज ABC अंतर्निहित है, जिसमें AB = AC है। प्रदर्शित कीजिए कि A से BC पर डाला गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।
3. किसी वृत्त की 6 सेंटीमीटर और 8 सेंटीमीटर लंबाई की दो समांतर जीवाएँ वृत्त के केंद्र के विपरीत स्थित हैं। यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेंटीमीटर हो तो जीवाओं के मध्यबिंदुओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

ऊपर दिए गए प्रश्न 1 से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय 5 — *किसी वृत्त के केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब उस जीवा को समद्विभाजित करता है।*

© NCERT not to be republished

5.6 जीवाओं की वृत्त के केंद्र से दूरी

गतिविधि — एक वृत्ताकार कागज लीजिए। किनारे की ओर से कागज को अंदर की ओर मोड़िए। अब इस मोड़ को खोल दीजिए। कागज पर बना मोड़ अब एक जीवा के समान है (चित्र 5.13 (ख) देखिए)। अब कागज को पुन: इस प्रकार मोड़िए कि जीवा के अंत्य बिंदु आपस में मिलें। अब इस मोड़ को खोल दीजिए (चित्र 5.13 (ग) देखिए)।



चित्र 5.13 (क)



चित्र 5.13 (ख)



चित्र 5.13 (ग)

इस मोड़ के कारण जीवा दो भागों में विभक्त हो गई है। इन भागों की दूरियाँ मापिए। दोनों मोड़ एक-दूसरे को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं, जीवा उस बिंदु से समद्विभाजित हो जाती है। दोनों मोड़ के चिह्नों के मध्य कोण मापिए। दूसरे मोड़ का चिह्न वृत्त के केंद्र से जीवा पर लंब के अनुदिश है। वृत्त के केंद्र से जीवा के मध्यबिंदु के मध्य की दूरी मापिए। यही दूरी केंद्र से जीवा की मध्य दूरी है।

अब पहली जीवा के समान लंबाई की अन्य जीवा बनाइए। आप यह कैसे करेंगे? आप स्वयं ही यह पता लगाइए। केंद्र से नई जीवा के मध्यबिंदु को मिलाइए और इसकी लंबाई मापिए। क्या यह केंद्र से पहली जीवा के मध्य दूरी के समान ही है?

अब एक अनुरेखण पत्रक लीजिए और इस पर समान त्रिज्या वाला वृत्त बनाइए। अनुरेखण पत्रक पर बने वृत्त को वृत्ताकार कागज पर इस प्रकार रखिए कि दोनों वृत्त परस्पर पूर्णत: आच्छादित हों जाएँ। वृत्ताकार कागज पर बनी जीवा और केंद्र से इस जीवा पर लंब को अनुरेखण पत्रक पर अनुरेखित कीजिए। अब अनुरेखण पत्रक को घुमाइए। आप अनुरेखण पत्रक से जीवा को देख पाएँगे, यह वृत्ताकार कागज पर समान लंबाई की अन्य जीवा के समान दिखाई देती है।

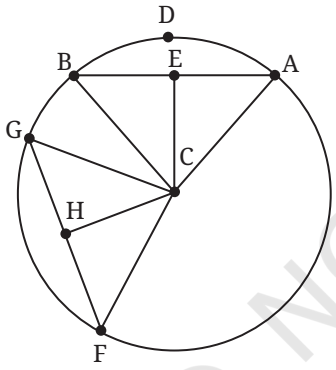
© NCERT not to be republished

वृत्त एक सममित आकृति है। अत: वृत्त को केंद्र के चारों ओर घुमाने पर वृत्त में कोई परिवर्तन नहीं आता है। जैसे-जैसे हम वृत्त को घुमाते हैं, वैसे-वैसे हमारी चयनित जीवा भी घुमती जाएगी जिससे समान लंबाई की नई जीवा प्राप्त होती है। साथ ही, केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब भी घूमता जाता है। समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ प्रतीत होती हैं।

क्या यह पूर्णतया तर्कसंगत व्याख्या है? नहीं, हमने केवल उदाहरण दिए हैं, जिनमें हमारे अनुमान सत्य सिद्ध हो रहे हैं। कोई कथन बहुत से उदाहरणों के लिए सत्य हो सकता है, किंतु इसका यह अर्थ नहीं है कि यह कथन व्यापक रूप से सत्य है। अत: आइए, स्पष्ट करते हैं कि यह कथन क्यों सत्य है।

प्रमेय 6 — *किसी वृत्त की समान लंबाई की जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।*

चित्र बनाइए (चित्र 5.14)।



चित्र 5.14

दिया गया है — वृत्त जिसका केंद्र C है; AB = FG है; E और H क्रमश: AB व FG के मध्यबिंदु हैं।

सिद्ध करना है — CE = CH

यह सत्य क्यों है? प्रमेय 5 द्वारा CE और CH केंद्र C से जीवाओं क्रमश: AB और FG पर लंब हैं।

अत: CE और CH केंद्र C से जीवाओं क्रमश: AB और FG के मध्य दूरी है।

हम इस परिणाम की व्याख्या दो भिन्न प्रकार से करेंगे—

(1) त्रिभुज CAB और CFG सर्वांगसम हैं।

CA = CF (दोनों वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।), इसी प्रकार, CB = CG है।

दिया गया है कि AB = FG है। अत: SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा $\Delta CAB \cong \Delta CFG$ है।

अत: सर्वांगसम त्रिभुजों की ऊँचाइयाँ भी समान होंगी अर्थात CE = CH है। इस प्रकार, जीवाएँ AB और FG केंद्र O से समदूरस्थ हैं।

(2) त्रिभुजों CEA और CHF पर विचार कीजिए।

प्रमेय 5 के अनुसार, केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

अत: E और H क्रमश: AB और FG जीवाओं के मध्यबिंदु हैं।

© NCERT not to be republished

AE = FH (क्योंकि AB = FG है और AB और FG के मध्यबिंदु E व H हैं।)

$\angle CEA = \angle CHF = 90°$

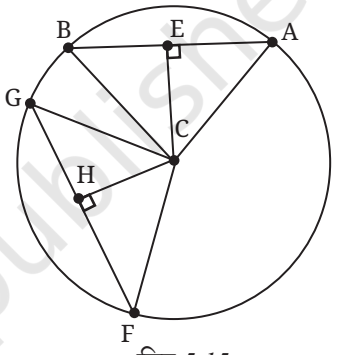
CF = CA, क्योंकि दोनों वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

अत: RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा, $\Delta CEA \cong \Delta CHF$ है।

अत: CE = CH होगा। इस प्रकार, समान जीवाएँ वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

प्रश्नावली 5.4

1. बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके प्रदर्शित कीजिए कि क्यों प्रमेय 6 अवश्य ही सत्य होनी चाहिए।
2. चित्र 5.15 पर विचार कीजिए। यदि CE, AB पर लंब है, CH, GH पर लंब है और CE = CH है तो प्रदर्शित कीजिए कि AB = GF है।
3. बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करते हुए प्रश्न 2 को हल कीजिए।



चित्र 5.15

ऊपर दी गई प्रश्नावली के प्रश्न 2 से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय 7 — *वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ समान लंबाई की होती हैं।*

5.6.1 दो असमान जीवाओं में से कौन-सी वृत्त के केंद्र से अधिक दूरी पर है?

एक वृत्त में दो जीवाएँ दी गई हैं। उनमें से एक जीवा की लंबाई दूसरी जीवा की लंबाई से अधिक है। कौन-सी जीवा केंद्र के अधिक समीप है? क्या आप अनुमान लगा सकते हैं?

गतिविधि — एक वृत्त बनाइए। विभिन्न लंबाइयों की जीवाएँ बनाइए। वृत्त के केंद्र से प्रत्येक जीवा पर लंब बनाइए। जीवाओं की लंबाई और केंद्र से इनकी दूरी को एक तालिका में लिखिए।

तालिका 1

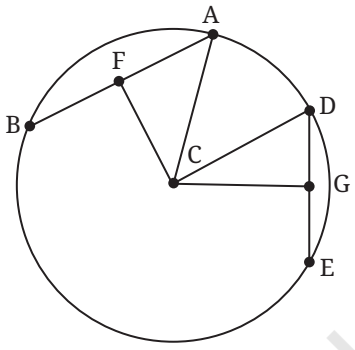
जीवा की लंबाई			
केंद्र से दूरी			

© NCERT not to be republished

आपने क्या अवलोकन किया? जीवा की लंबाई जितनी अधिक होती है, उतनी ही वह जीवा केंद्र के समीप होती है। आइए, यह समझने का प्रयास करते हैं कि यह सत्य क्यों है।

प्रमेय 8 — *मान लीजिए, AB और DE एक वृत्त की जीवाएँ हैं, जिसका केंद्र C है। मान लीजिए, AB > DE है, तब C से AB की दूरी, C से DE की दूरी की अपेक्षा कम होगी।*

सदैव की तरह, सर्वप्रथम हम चित्र बनाते हैं। ध्यान रखिए कि 'C से AB की दूरी' का अर्थ लंबवत दूरी से है। अत: हम C से AB और DE पर लंब क्रमश: CF और CG खींचते हैं।



चित्र 5.16

दिया गया है — AB > DE

सिद्ध करना है — CF < CG

यह सत्य क्यों है? चित्र 5.16 में AC और CD दोनों त्रिज्याएँ हैं।

अत: AC = CD है। बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय द्वारा $CD^2 = CG^2 + GD^2$ और $AC^2 = CF^2 + AF^2$ है।

अत: $CF^2 + AF^2 = CG^2 + GD^2$

अब AB, DE से बड़ा है। अत: AF, GD से बड़ा होगा (क्योंकि F और G, AB और DE के मध्यबिंदु हैं)।

चूँकि $AF^2 > GD^2$ है, अत: $CF^2 < CG^2$ होगा।

अतः CF < CG है।

टिप्पणी — केंद्र से समीपस्थ जीवा वह जीवा होती है जिस पर केंद्र स्थित होता है। इस जीवा की केंद्र C से दूरी शून्य होती है। अत: वृत्त का व्यास सबसे बड़ी जीवा होता है।

यदि केंद्र से जीवा को दूर धकेला जाए तो किसी स्थान पर जाकर जीवा एकल बिंदु के समान हो जाती है, जिसकी लंबाई शून्य है और इस जीवा के केंद्र C से दूरी वृत्त की त्रिज्या है।

प्रश्नावली 5.5

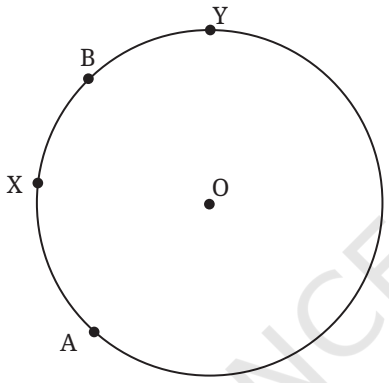
1. वृत्त की जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 7 सेंटीमीटर है और केंद्र से लंबवत दूरी 6 सेंटीमीटर है।
2. स्पष्ट कीजिए कि दिया गया कथन सत्य क्यों है— यदि केंद्र से जीवा की लंबवत दूरी d है और त्रिज्या r है तो जीवा की लंबाई $2\sqrt{r^2 - d^2}$ होगी।

© NCERT not to be republished

*3. किसी वृत्त में, यदि किसी जीवा AB की केंद्र से दूरी अन्य जीवा CD की केंद्र से दूरी की दोगुनी है तो क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि CD = 2AB है? कारण सहित उत्तर दीजिए।

5.7 वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

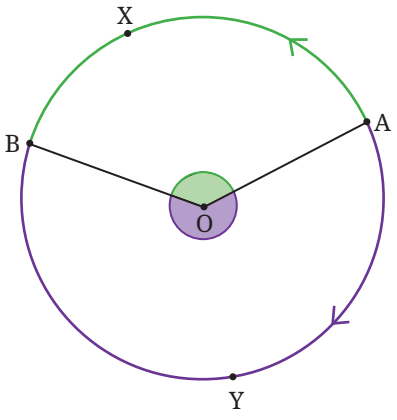
किसी वृत्त का **चाप** उस वृत्त का एक संबद्ध भाग होता है। यह वृत्त पर दो बिंदुओं जिन्हें चाप के अंत्य बिंदु कहा जाता है और उन अंत्य बिंदुओं को वृत्त की परिधि के अनुदिश जोड़ने वाले वक्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।



चित्र 5.17 — दीर्घ चाप AYB और लघु चाप AXB

चित्र 5.17 को देखिए। A और B वृत्त पर स्थित दो बिंदु हैं। A से B तक जाने के दो मार्ग हैं। एक मार्ग बिंदु X से होकर जाता है और दूसरा मार्ग बिंदु Y से होकर जाता है। दोनों मार्गों में से बड़ा मार्ग दीर्घ चाप और छोटा मार्ग लघु चाप कहलाता है।

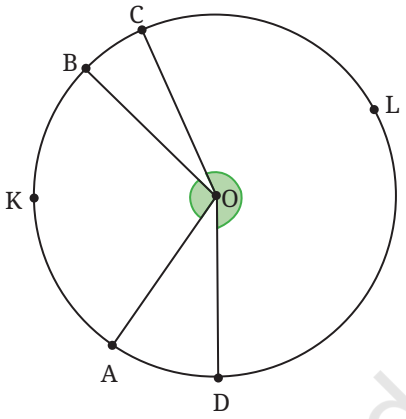
जैसे-जैसे हम चाप के अनुदिश बढ़ते जाते हैं तो हम चाप AB द्वारा केंद्र पर **अंतरित कोण** को कोण AOB की माप द्वारा परिभाषित करते हैं। अत: हम चाप के अनुदिश OA से OB तक बढ़ते हैं और केंद्र पर बनने वाले कोण को मापते हैं। लघु चाप केंद्र पर ∠AOB अंतरित करती है, जब OA से OB तक X के माध्यम से आगे बढ़ते हैं। जब हम OA से OB तक Y के माध्यम से आगे बढ़ते हैं तो हमें दीर्घ चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण प्राप्त होता है (चित्र 5.18 देखिए)।



चित्र 5.18

© NCERT not to be republished

प्रश्न — एक वृत्त बनाया गया है जिसका केंद्र O है तथा A, B, C और D वृत्त पर स्थित बिंदु हैं (चित्र 5.19 देखिए)। चाप AKB तथा चाप CLD द्वारा केंद्र O पर अंतरित कोण मापिए। यदि केंद्र पर अंतरित कोण 180° से कम है तो यह एक लघु चाप है। यदि केंद्र पर अंतरित कोण 180° से अधिक है तो यह एक दीर्घ चाप है। बताइए कि क्या चाप AKB और CLD लघु चाप हैं या दीर्घ चाप हैं।



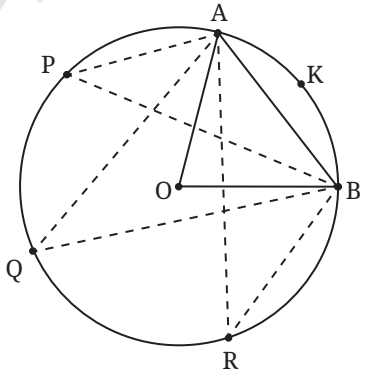
चित्र 5.19

5.7.1 वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के उस बिंदु पर अंतरित कोण जो चाप के बाहर है

'किसी वृत्त के चाप AXB द्वारा वृत्त की परिधि के उस बिंदु पर अंतरित कोण जो उस चाप के बाहर है' से तात्पर्य ΔACB से है, जहाँ C वृत्त पर स्थित कोई अन्य बिंदु है, किंतु चाप AXB पर स्थित नहीं है। ध्यान देने योग्य है कि इस कोण की माप इस बात पर निर्भर नहीं करती है कि हम बिंदु C को कौन-सा विशेष बिंदु चुनते हैं, जब तक कि यह बिंदु वृत्त पर और उस चाप के बाहर स्थित हो।

गतिविधि — एक वृत्त बनाइए, जिसमें एक जीवा AB हो। एक चाप AKB चुनिए, जो जीवा AB के अंत्य बिंदुओं A व B एवं वृत्त पर बिंदुओं A व B के मध्य किसी बिंदु K से मिलकर बनी हो। चाप AKB द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण को मापिए। वृत्त पर स्थित कोई तीन बिंदु P, Q, R लीजिए, जो चाप AKB के बाहर स्थित हों। चाप AKB द्वारा बिंदुओं P, Q, R पर अंतरित कोण मापिए। आपने क्या ध्यान दिया?

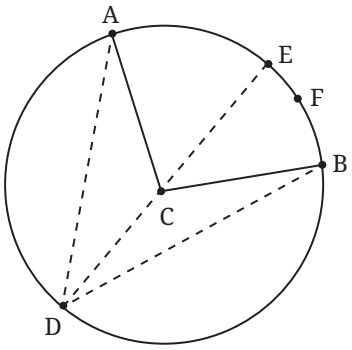
इस गतिविधि को एक अन्य AKB चाप के लिए दोहराइए। इस गतिविधि के आधार पर, किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण और इस चाप के बाहर वृत्त के किसी अन्य बिंदु पर अंतरित कोण के विषय में हम एक कथन प्रतिपादित कर सकते हैं। हम आगे प्रदर्शित करेंगे कि नीचे दिया गया कथन सत्य क्यों है।



चित्र 5.20

© NCERT not to be republished

प्रमेय 9 — *वृत्त के चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण चाप के बाहर वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दोगुना होता है।*



चित्र 5.21 — चाप AFB द्वारा अंतरित कोण

दिया गया है — AFB एक चाप है। ∠ACB चाप AFB, द्वारा केंद्र C पर अंतरित कोण है। D, चाप AFB से बाहर वृत्त पर स्थित एक बिंदु है (चित्र 5.21 देखिए)।

हम यह मान लेते हैं कि DC को आगे बढ़ाने पर यह चाप AFB के किसी बिंदु E पर वृत्त को प्रतिच्छेद करता है जैसे कि चित्र में प्रदर्शित किया गया है।

हम अन्य स्थिति पर कुछ समय पश्चात विचार करेंगे।

सिद्ध करना है — ∠BCA = 2∠BDA

यह सत्य क्यों है? बिंदु D को बिंदु C से मिलाइए और DC को आगे बढ़ाइए, जो चाप AFB को बिंदु E पर प्रतिच्छेद करता है। अब ΔDCB एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें CB = CD है। अत: ∠CBD = ∠CDB होगा।

∠BCE, ΔBCD का बाह्य कोण है। अत: बाह्य कोण प्रमेय द्वारा

$$\angle BCE = \angle CBD + \angle CDB = 2\angle BDC$$

इसी प्रकार, ΔADC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें CA = CD है।

अत: $\angle CAD = \angle CDA$ होगा।

∠ACE, ΔADC का बाह्य कोण है। अत: बाह्य कोण प्रमेय द्वारा

$$\angle ACE = \angle CAD + \angle CDA = 2\angle CDA$$

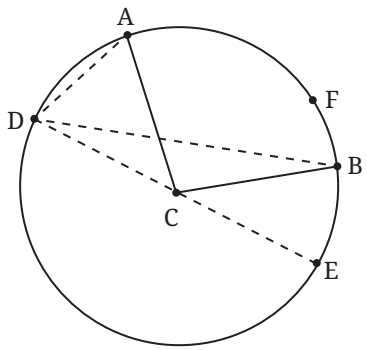
अब ∠BCA = ∠BCE + ∠ECA और ∠BDA = ∠BDE + ∠EDA है।

चूँकि $\angle BCA = 2(\angle BDC + \angle CDA) = 2\angle BDA$ है।

अत: $\angle BCA = 2\ \angle BDA$ होगा।

यदि चित्र 5.22 में दिए अनुसार स्थिति हो तो ऊपर दी गई स्पष्टता सही नहीं होगी, जिसमें DC को आगे बढ़ाने पर यह वृत्त से चाप AFB के बाहर किसी बिंदु E पर मिलता है। हमें इस स्थिति को आगे दी गई अन्य विधि से करना होगा।

© NCERT not to be republished



चित्र 5.22 — चाप AFB द्वारा अंतरित कोण

दिया गया है — AFB एक चाप है। ∠ACB, चाप AFB द्वारा केंद्र C पर अंतरित कोण है। बिंदु D, चाप AFB के बाहर वृत्त पर स्थित बिंदु है और DC को आगे बढ़ाने पर यह वृत्त को चाप AFB के बाहर किसी बिंदु E पर प्रतिच्छेद करता है जैसा कि चित्र 5.22 में दर्शाया गया है।

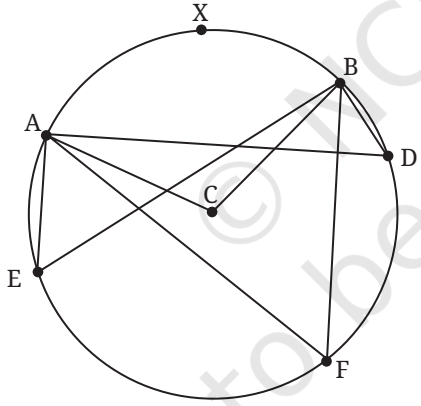
हम यहाँ पुन: समद्विबाहु त्रिभुज के गुणों का उपयोग करेंगे।

∠ACE = ∠ADC + ∠CAD = 2∠ADC, क्योंकि CA = CD (और इसीलिए ∠ADC = ∠CAD) है।

इसी प्रकार, ∠BCE = ∠BDC + ∠CBD = 2∠BDC है।

साथ ही, ∠ACB = ∠ACE – ∠BCE और ∠ADB = ∠ADC – ∠BDC है।

अत: ∠ACB = 2∠ADB है।



चित्र 5.23 — चाप द्वारा समान अंतरित कोण

इस गतिविधि से किसी बहुत रोचक गुणधर्म का पता चलता है। यह वही गुणधर्म है जो प्रमेय 9 से पूर्व में दी गई गतिविधि से प्राप्त होता है। एक चाप AB लीजिए। सुनिश्चित कीजिए कि आप A और B तक चाप के अनुदिश किस मार्ग से जाते हैं। चाप AB के बाहर वृत्त पर स्थित कोई बिंदु D लीजिए।

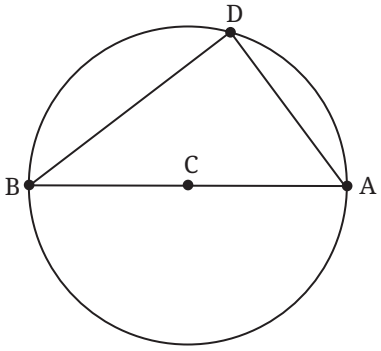
जब तक बिंदु D वृत्त पर चाप के बाहर कहीं भी स्थित हो तब तक ∠ADB समान होगा।

आइए, चित्र 5.23 का उपयोग करते हुए हम इस तथ्य को और स्पष्ट रूप से समझते हैं। बिंदु A से B तक X से होकर जाते हुए वृत्त के चाप पर विचार करते हैं। इस चाप के बाहर वृत्त पर स्थित बिंदु वे बिंदु हैं, जिनसे आप तब होकर गुजरते हैं जब आप A से B तक E से होकर जाते हैं। चाप AXB द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण, भुजा CA द्वारा बना वह कोण है जब हम X से होकर जाते हुए CA से CB तक पहुँचते हैं। बिंदु E, F और D चाप AXB पर स्थित नहीं हैं। प्रमेय से हमें $\angle AEB = \angle ADB = \angle AFB = \frac{1}{2} \angle ACB$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

उपप्रमेय — *व्यास द्वारा वृत्त के किसी भी बिंदु पर अंतरित कोण 90° होता है।*

उपप्रमेय — उपप्रमेय एक ऐसा तथ्य है जो पूर्व में सिद्ध हो चुकी प्रमेय से प्राप्त होता है।

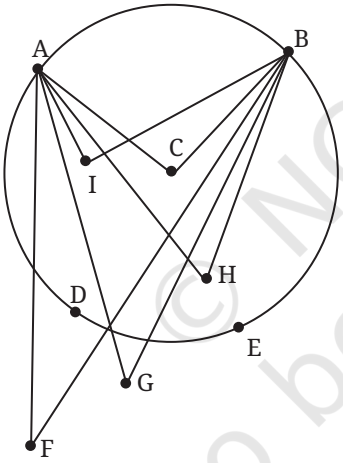


चित्र 5.24

यह सत्य क्यों है? मान लीजिए AB एक व्यास है (चित्र 5.24)। हमें प्रदर्शित करना है कि ∠ADB का मान 90° है। हम A से B तक उस चाप को लेते हैं जिसमें बिंदु D स्थित नहीं है। इस चाप द्वारा केंद्र C पर अंतरित कोण क्या है? हमें इस चाप के अनुदिश बिंदु A से B तक बढ़ना है। अत: अंतरित कोण ∠ACB है जो एक ऋजु कोण (सरल कोण) 180° है। अत: $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle ACB = 90°$ है।

यह तथ्य कि वृत्त के एक ही चाप वृत्तखंड में बने सभी कोण समान होते हैं, एक ऐसा आकर्षक तथ्य है, जो वृत्त को अन्य सभी आकृतियों से भिन्न और विशिष्ट बनाता है।

चित्र 5.25 में चाप AB द्वारा वृत्त के बाहर स्थित बिंदुओं F, G पर अंतरित कोण भिन्न हैं। वृत्त के अंदर स्थित बिंदुओं के लिए भी सभी ∠AIB, ∠ACB और ∠AHB भिन्न हैं। किंतु चाप AB पर स्थित सभी बिंदुओं P पर अंतरित कोण समान हैं। इस प्रकार बिंदु D व E के लिए ∠ADB = ∠AEB है।



चित्र 5.25 — बिंदु और जीवा

प्रश्नावली 5.6

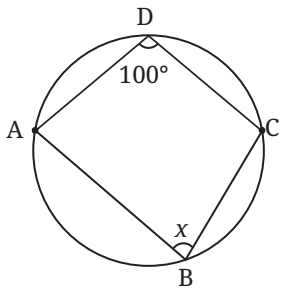
1. किसी वृत्त में जिसका केंद्र O है, केंद्रीय कोण AOB की माप 60° है। यदि वृत्त की त्रिज्या 12 सेंटीमीटर है तो जीवा AB की लंबाई क्या है?
2. मान लीजिए, एक वृत्त का केंद्र O है और वृत्त पर स्थित दो बिंदु A और B हैं।
   (i) क्या AB के एक ही ओर वृत्त पर स्थित दो बिंदु X, Y इस प्रकार हो सकते हैं कि ∠AXB, ∠AYB से भिन्न हो?

© NCERT not to be republished

(ii) क्या यह सत्य है कि यदि $\angle AXB = \angle AYB$ हो तो बिंदु X व Y वृत्त पर एक ही ओर स्थित हैं?

(iii) यदि $\angle AXB = \angle AYB$ हो और X व Y वृत्त पर स्थित नहीं हैं तो क्या A, B और X से होकर जाने वाला वृत्त बिंदु Y से होकर जाएगा?

3. चित्र 5.26 में x ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.26

5.8 बिंदुओं की संवृत्तीयता

अब हम इस प्रश्न का उत्तर ढूँढ़ते हैं कि कब 4 बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होंगे। तत्पश्चात हम आपको इस प्रश्न का उत्तर स्वयं ढूँढ़ने देंगे कि कब 5, 6 और इससे भी अधिक बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होंगे! एक ही वृत्त पर स्थित बिंदुओं को **संवृत्तीय** बिंदु कहते हैं।

प्रमेय 10 — *यदि दो बिंदुओं A व B को जोड़ने वाला रेखाखंड AB, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिंदुओं C व D पर समान कोण अंतरित करता है तो चारों बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं।*

सदैव की तरह सर्वप्रथम हम चित्र बनाते हैं।

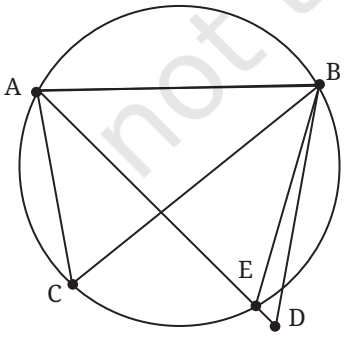
दिया गया है — रेखाखंड AB पर विचार कीजिए। बिंदु C और D, AB के एक ही ओर स्थित है; बिंदु C और D रेखा AB पर स्थित नहीं हैं और $\angle ACB = \angle ADB$ है।

सिद्ध करना है — बिंदु A, B, C, D एक ही वृत्त पर स्थित हैं।

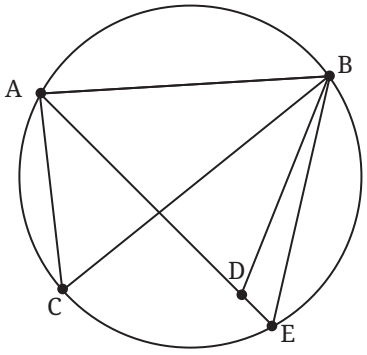
यह सत्य क्यों है? बिंदु A, B, C असंरेखीय बिंदु हैं। अत: प्रमेय 1 का उपयोग करने पर एक वृत्त बिंदुओं A, B, C से होकर जाएगा।

आइए, प्रदर्शित करते हैं कि D उस वृत्त पर स्थित है। इसके लिए आइए A, B और C से होकर जाने वाला कोई वृत्त बनाते हैं।

मान लीजिए कि बिंदु D इस वृत्त पर स्थित नहीं है; तब या तो यह वृत्त के अंदर स्थित होगा या बाहर स्थित होगा। AD को मिलाइए।



चित्र 5.27(क)



चित्र 5.27(ख)

© NCERT not to be republished

यदि बिंदु D वृत्त के बाहर स्थित है तो AD वृत्त को बिंदु E पर प्रतिच्छेद करता है, जैसा चित्र 5.27(क) में प्रदर्शित किया गया है। यदि बिंदु D वृत्त के अंदर स्थित है तो AD को आगे बढ़ाने पर यह वृत्त को बिंदु E पर मिलता है जैसा चित्र 5.27(ख) में प्रदर्शित किया गया है। अब बिंदु C व E जीवा AB द्वारा बने एक ही चाप पर स्थित हैं। अत: $\angle ACB = \angle AEB$ होगा।

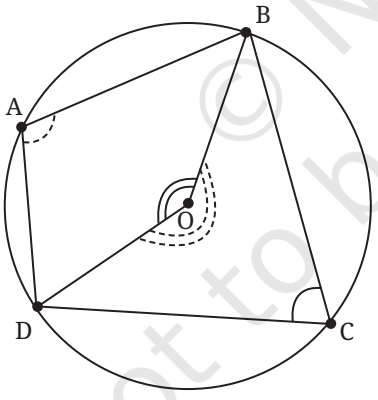
यदि बिंदु D वृत्त के बाहर स्थित है तो $\angle AEB$, ΔBED का बहिष्कोण है, अत: $\angle AEB > \angle ADB$ है। साथ ही, $\angle AEB = \angle ACB$ (एक ही वृत्तखंड में बने कोण) है तथा $\angle ACB = \angle ADB$ (दिया गया) है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\angle ACB$ स्वयं से ही बड़ा है, जो असंभव है।

यदि बिंदु D वृत्त के अंदर स्थित है जैसा चित्र 5.27(ख) में प्रदर्शित किया गया है तो $\angle ADB$, ΔBED का बहिष्कोण है। जिस प्रकार हमने ऊपर दी गई स्थिति में तर्क दिए हैं, उसी प्रकार हमें इस स्थिति में भी असंभव निष्कर्ष प्राप्त होता है।

अत: हमें इन दोनों ही विकल्पों को हटाना होगा (D वृत्त के बाहर स्थित है और D वृत्त के अंदर स्थित है)। अत: बिंदु D अवश्य ही A, B, C से होकर जाते हुए वृत्त पर स्थित होगा। अन्य शब्दों में A, B, C, D संवृत्तीय हैं।

जब किसी चतुर्भुज के शीर्ष संवृत्तीय होते हैं तो वह चतुर्भुज एक **चक्रीय चतुर्भुज** कहलाता है। इस गुण का उपयोग हम वृत्तों के अन्य रोचक गुण को प्रदर्शित करने के लिए करेंगे!

प्रमेय 11 — *चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल $180°$ होता है।*



चित्र 5.28

दिया गया है— A, B, C, D एक चक्रीय चतुर्भुज के शीर्ष हैं (चित्र 5.28)। इसका अर्थ है कि A, B, C, D से होकर जाता हुआ एक वृत्त है। मान लीजिए, वृत्त का केंद्र O है।

सिद्ध करना है— $\angle BAD + \angle BCD = 180°$

हम यह कैसे प्रदर्शित करेंगे कि यह सत्य है? चाप BCD पर विचार कीजिए; बिंदु A वृत्त पर स्थित है और यह चाप BCD के बाहर स्थित है। अत: $\angle BAD$, चाप BCD द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का आधा होगा। चूँकि हम OB से OD तक बिंदु C से होकर जाते हैं, अत: यह प्रतिवर्ती कोण BOD (बिंदुकित) है। इस प्रकार प्रतिवर्ती कोण $\angle BAD = \frac{1}{2}$ (प्रतिवर्ती कोण BOD) है।

© NCERT not to be republished

इसी प्रकार, ∠BCD चाप BAD द्वारा केंद्र O पर अंतरित कोण है। यह एक कोण है जिसे दो वक्रीय चिह्नों द्वारा प्रदर्शित किया गया है। चूँकि C, चाप BCD पर स्थित है इसलिए हमें OB से OD तक बिंदु A से होकर जाना होगा। अत: $\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle BOD)$ है।

अत: $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}$ (केंद्र O पर संपूर्ण कोण)

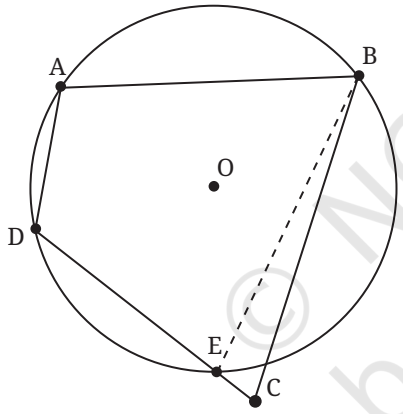
बिंदु O पर एक पूर्ण घूर्णन की माप 360° है।

इस प्रकार, $\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}(360°) = 180°$ है।

अत: एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° है। इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है।

प्रश्न — एक चक्रीय चतुर्भुज के कोणों की माप ∠A = 80°, ∠B = 110°, ∠C = 100° तथा ∠D = 70° है। क्या ऐसे चतुर्भुज की रचना की जा सकती है? स्पष्ट कीजिए कि क्यों या क्यों नहीं।

प्रमेय 12 — *यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° है तो उस चतुर्भुज के शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं अर्थात शीर्ष संवृत्तीय होते हैं।*



चित्र 5.29

दिया गया है — ABCD एक चतुर्भुज है (चित्र 5.29)।

∠BAD + ∠BCD = 180°

∠ABC + ∠CDA = 180°

सिद्ध करना है — ABCD चक्रीय चतुर्भुज है।

यह सत्य क्यों है? मान लीजिए, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज नहीं है। चूँकि A, D, B संरेखीय नहीं हैं, अत: कोई वृत्त होगा जो इन तीनों बिंदुओं से होकर जाता है। यदि वह वृत्त C से होकर नहीं जाता है तो दो स्थितियाँ हो सकती हैं— C वृत्त के बाहर या C वृत्त के अंदर स्थित है।

हम यहाँ केवल पहली स्थिति पर विचार करेंगे और दूसरी स्थिति को विद्यार्थी गृहकार्य के रूप में हल करने का प्रयास करेंगे।

माना कि E वह बिंदु है जिस पर CD वृत्त से मिलता है (चित्र 5.29 देखिए)। तब ABED एक चक्रीय चतुर्भुज होगा। अत: प्रमेय 11 के अनुसार ∠BAD + ∠BED = 180° होगा।

हमें यह भी ज्ञात कि ∠BAD + ∠DCB = 180° है।

अत: ∠BCD = ∠BED है। किंतु यह असंभव है क्योंकि ∠BED, ∠BEC का बहिष्कोण है और इसीलिए वह ∠BCE से बड़ा होगा अर्थात ∠BCD से बड़ा होगा।

अत: बिंदु A, B, C, D सभी एक वृत्त पर स्थित हैं।

© NCERT not to be republished

वृत्त एक सुंदर और लुभावनी आकृति है। इन आधारभूत गुणों को पूर्णत: समझने पर आप वृत्त में सममिति और जीवाओं के गुण, जीवाओं द्वारा अंतरित कोण, केंद्र से जीवाओं की दूरी और चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण को स्पष्ट रूप से समझने लगेंगे।

आगामी कक्षा में आप वृत्त के विषय में ऐसे ही कई अन्य रोचक और आकर्षक परिणामों का अध्ययन करेंगे। हमसे जुड़े रहिए, अभी बहुत कुछ सीखना शेष है।

अंतिम प्रश्नावली

1. किसी वृत्त में, केंद्र से 5 सेंटीमीटर दूरी पर एक जीवा है। यदि वृत्त की त्रिज्या 13 सेंटीमीटर है तो जीवा की लंबाई क्या है?
2. एक वृत्त का चाप केंद्र पर 70° कोण अंतरित करता है। इस चाप द्वारा वृत्त के किसी बिंदु पर अंतरित कोण की माप क्या है?
3. किसी वृत्त का व्यास 26 सेंटीमीटर है। वृत्त में 24 सेंटीमीटर लंबी जीवा बनाई गई है। वृत्त के केंद्र से जीवा की दूरी ज्ञात कीजिए।
4. किसी वृत्त की त्रिज्या 15 सेंटीमीटर है। वृत्त में एक जीवा बनाई गई है। वृत्त के केंद्र से जीवा की दूरी 9 सेंटीमीटर है। जीवा की लंबाई क्या है?
5. सिद्ध कीजिए कि किसी जीवा का लंब समद्विभाजक वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।
6. किसी वृत्त का व्यास AB है। वृत्त की परिधि पर कोई बिंदु C स्थित है। $\angle ACB$ की माप क्या है? अपने तर्क की व्याख्या कीजिए।
7. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जो एक वृत्त के अंतर्गत बनाया गया है। यदि $\angle A$ की माप 75° है तो $\angle C$ की माप कितनी होगी? यदि $\angle B$ की माप 110° है तो $\angle D$ की माप कितनी होगी?
8. चतुर्भुज PQRS एक वृत्त के अंतर्गत बनाया गया है। यदि $\angle P = (2x + 10)°$ और $\angle R = (3x - 20)°$ है तो x का मान और $\angle P$ व $\angle R$ की माप ज्ञात कीजिए।
9. 16 सेंटीमीटर लंबी जीवा की वृत्त के केंद्र से दूरी 6 सेंटीमीटर है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
10. एक चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ 5, 5, 12 और 12 इकाई हैं। चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

*11. एक चक्रीय चतुर्भुज पर विचार कीजिए। चतुर्भुज के परिवृत्त की रचना किए बिना हम किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं कि परिवृत्त का केंद्र चतुर्भुज के अंदर या बाहर स्थित होगा? इसे ज्ञात करने की सबसे उपयुक्त विधि क्या है?

© NCERT not to be republished

*12. जब वृत्त की दो जीवाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो प्रत्येक जीवा दो रेखाखंडों में विभक्त हो जाती है। प्रदर्शित कीजिए कि यदि दोनों जीवाओं की लंबाई समान हो, तो पहली जीवा के रेखाखंड दूसरी जीवा के संगत रेखाखंडों के समान होंगे।

*13. एक वृत्त की रचना कीजिए, जिसमें 6 सेंटीमीटर लंबी जीवा वृत्त के केंद्र से 3 सेंटीमीटर दूरी पर स्थित हो।

(**संकेत**— क्या यह एक किसी त्रिभुज का परिवृत्त है?)

*14. दर्शाइए कि आयत ही एकमात्र ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसे वृत्त के अंतर्गत बनाया जा सकता है।

*15. दर्शाइए कि यदि एक आयत किसी वृत्त के अंतर्गत है तो उसके विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिंदु वृत्त के केंद्र पर ही स्थित होगा।

*16. किसी वृत्त में एक निश्चित लंबाई की सभी जीवाओं पर विचार कीजिए। इन सभी जीवाओं के मध्यबिंदुओं को मिलाने पर कौन-सी आकृति बनती है?

*17. केंद्र O वाले एक वृत्त में जीवाएँ AB और AC सर्वांगसम हैं। स्पष्ट कीजिए कि यह कथन सत्य क्यों है— "वृत्त का केंद्र $\angle BAC$ के कोण समद्विभाजक पर स्थित है।"

18. 10 सेंटीमीटर और 24 सेंटीमीटर लंबाई की दो समांतर जीवाएँ वृत्त के केंद्र के एक ही ओर स्थित हैं। दोनों जीवाओं के मध्य की दूरी 7 सेंटीमीटर है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

*19. त्रिज्या r के एक वृत्त के अंतर्गत एक समषट्भुज की रचना की गई है। षट्भुज की भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए और वृत्त के केंद्र से प्रत्येक भुजा की दूरी ज्ञात कीजिए।

20. किसी वृत्त के अंतर्गत एक चतुर्भुज MNOP की रचना की गई है। यदि MN वृत्त का व्यास है तो $\angle MOP$ और $\angle MNP$ के विषय में आप क्या कह सकते हैं? अपने तर्क को स्पष्ट कीजिए।

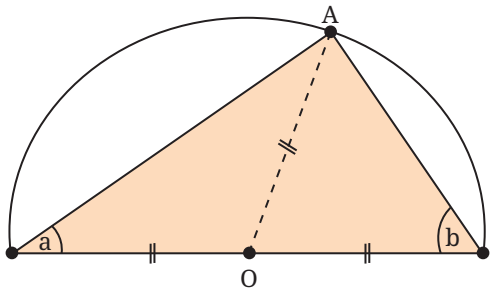
21. मान लीजिए, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। स्पष्ट कीजिए कि किसी भी शीर्ष पर बहिष्कोण, सम्मुख अंत:कोण के समान क्यों है? (अर्थात $\angle CDE = \angle ABC$, जहाँ E, भुजा CD को आगे बढ़ाने पर प्राप्त रेखा पर कोई बिंदु है)।

*22. "वृत्त की ऐसी कोई जीवा नहीं है जो उसके व्यास से बड़ी हो।" आप इस कथन को कैसे सिद्ध करेंगे?

*23. मान लीजिए, A किसी दिए गए वृत्त के अंदर स्थित कोई भी बिंदु है। वृत्त का केंद्र O है। प्रदर्शित कीजिए कि A से होकर जाने वाली वृत्त की सबसे छोटी जीवा, वह जीवा होगी जो OA के लंबवत है।

© NCERT not to be republished

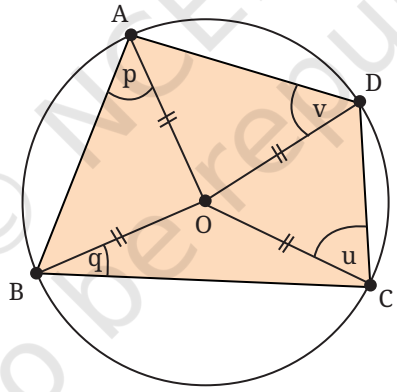
24. अर्धवृत्त का कोण 90° होता है। आप दिए गए चित्र का उपयोग इस कथन को सत्यापित करने के लिए किस प्रकार करेंगे?



चित्र 5.30

*25. किसी वृत्त में दो जीवाएँ CC' और DD', व्यास AB के लंबवत बनाई गई हैं। सिद्ध कीजिए कि जीवाओं CD और C' D' के मध्यबिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड MM', AB के लंबवत है।

*26. किसी भी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है आप नीचे दिए गए चित्र का उपयोग इस कथन को सत्यापित करने में किस प्रकार करेंगे?



चित्र 5.31

सारांश

- एक **वृत्त** किसी समतल पर स्थित उन सभी बिंदुओं का समूह है जो समतल पर किसी निश्चित बिंदु से समान दूरी (**त्रिज्या**) पर स्थित हों। इस निश्चित बिंदु को वृत्त का **केंद्र** कहते हैं।
- वृत्त में किसी भी व्यास के सापेक्ष **परावर्तन सममिति** होती है।

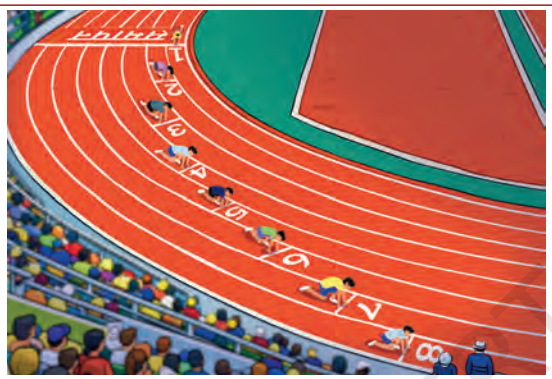
© NCERT not to be republished

- वृत्त में केंद्र के सापेक्ष किसी भी कोण में **घूर्णन सममिति** होती है।
- दिए गए दो बिंदुओं से होकर जाने वाले अनंत वृत्त बनाए जा सकते हैं। इन वृत्तों के केंद्र, दोनों दिए गए बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।
- यदि दिए गए तीन बिंदु एक ही सरल रेखा पर स्थित न हों तो उनसे होकर जाता हुआ **केवल एक ही वृत्त** बनाया जा सकता है; यह वृत्त उस त्रिभुज का **परिवृत्त** कहलाता है जिसके शीर्ष दिए गए तीन बिंदु हैं। इस वृत्त का केंद्र, जिसे तीनों बिंदुओं का **परिकेंद्र** कहते हैं, तीनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंडों के लंब समद्विभाजकों पर स्थित होता है।
- समान जीवाएँ वृत्त के केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं। विलोमत: यदि दो जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं तो जीवाओं की लंबाई समान होती है।
- वृत्त के केंद्र से जीवा के मध्यबिंदु को मिलाने वाली रेखा, उस जीवा पर लंब होती है। इसके विपरीत, केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
- वृत्त में समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं। इसके विपरीत, वे जीवाएँ जो केंद्र से समदूरस्थ होती हैं, वे समान लंबाई की होती हैं।
- दी गई दो असमान जीवाओं में से लंबी जीवा केंद्र के अधिक समीप होती है।
- किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दोगुना होता है।
- व्यास द्वारा वृत्त के किसी बिंदु पर अंतरित कोण 90° होता है।
- यदि वृत्त के दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उस रेखाखंड के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिंदुओं पर समान कोण अंतरित करे तो चारों बिंदु एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात बिंदु **संवृत्तीय** होते हैं)।
- किसी वृत्त के अंतर्गत चतुर्भुज, **चक्रीय चतुर्भुज** कहलाता है। चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योगफल 180° होगा। विलोमत: यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° हो तो यह एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।

© NCERT not to be republished

6 समष्टि मापन — परिमाप और क्षेत्रफल

0920CH06



चित्र 6.1— 4 × 100 मीटर रिले दौड़ के आरंभिक स्थान पर धावक

चित्र 6.1 में आप देख सकते हैं कि धावक 4 × 100 मीटर रिले दौड़ के आरंभिक स्थान पर एकत्रित हैं। दौड़-पथ (ट्रैक) बनाए जा चुके हैं और सभी धावक इन पथों पर दौड़ने के लिए तैयार हैं। क्या आपने ध्यान दिया कि सभी धावक समान आरंभिक रेखा पर नहीं हैं?

ऐसा लगता है कि बाह्य दौड़-पथों के धावक आंतरिक दौड़-पथों के धावकों से आगे से आरंभ कर रहे हैं जबकि समापन रेखा सबके लिए एक ही है। इसका क्या कारण हो सकता है? आसन्न दौड़-पथों की आंरभिक रेखाओं में अंतर को 'सांतरण' (स्टैगर) कहते हैं। ध्यान दीजिए कि सांतरण की प्रक्रिया बाह्यतम दौड़-पथ तक चलती रहती है। क्या आप विचार कर सकते हैं कि सांतरण किसी धावक (बाह्य दौड़-पथ या आंतरिक दौड़-पथ के धावकों को) को अनुचित लाभ देता है? ऐसा क्यों अथवा क्यों नहीं है? आयोजक किस आधार पर दौड़-पथों के मध्य सांतरण का माप तय कर सकते हैं?

सोचिए और विचार कीजिए

मेरे विद्यालय में खेल का मैदान 400 मीटर दौड़-पथ के लिए बहुत छोटा है इसलिए वहाँ 200 मीटर का दौड़-पथ बनाया गया। क्या इसका अर्थ यह है कि हमारे विद्यालय में समान 4 × 100 मीटर रिले दौड़ के लिए हमें छोटे सांतरण वाले (अर्थात ओलंपिक में उपयोग किए जाने वाले सांतरण से छोटे) दौड़-पथों की आवश्यकता है?

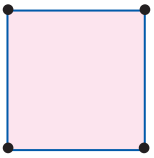
4 × 100 मीटर धावक दौड़-पथ के लिए आवश्यक दौड़-पथ सांतरण के संबंध में प्रश्न हल करने लिए हमें यह जानना होगा कि एक वृत्त के चारों ओर की लंबाई कैसे ज्ञात करें।

© NCERT not to be republished

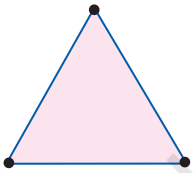
6.1 आकृति का परिमाप

किसी दी गई आकृति के लिए उसका **परिमाप** उसकी सभी सीमा-रेखाओं की कुल लंबाई होता है। कल्पना कीजिए कि एक छोटा कीड़ा इसके चारों ओर की सीमा-रेखा पर टहलने जा रहा है और वह तब तक नहीं मुड़ता जब तक कि वह पुन: अपने आरंभिक बिंदु पर नहीं आ जाता है। कीड़े के द्वारा इस प्रकार तय की गई दूरी को उस आकृति का परिमाप कहते हैं।

अत: a इकाई भुजा वाले वर्ग का परिमाप $4a$ इकाई होता है। a भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का परिमाप $3a$ इकाई होता है।

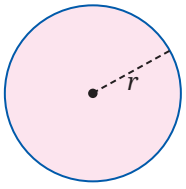


a इकाई
चित्र 6.2(क)



a इकाई
चित्र 6.2(ख)

a इकाई लंबाई और b इकाई चौड़ाई वाले आयत का परिमाप $2(a + b)$ इकाई होता है। ध्यान दीजिए कि वर्ग के परिमाप का सूत्र, $a = b$ वाले आयत के परिमाप के सूत्र की एक 'विशिष्ट स्थिति' है।



चित्र 6.3

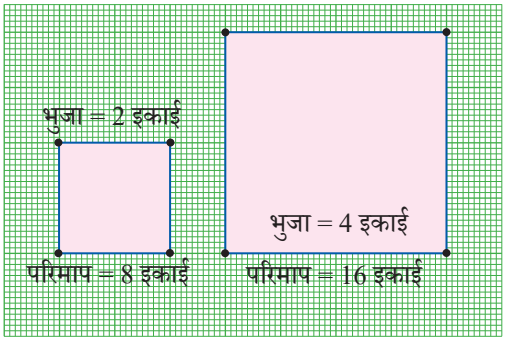
यहाँ हमें एक r इकाई त्रिज्या वाला एक वृत्त दिखाई दे रहा है। इसका परिमाप क्या है? हम इसे कैसे ज्ञात करते हैं?

सोचिए और विचार कीजिए

इस प्रश्न और 400 मीटर दौड़-पथ से संबंधित प्रश्न के मध्य क्या संबंध है?

वृत्त के परिमाप के संबंध में प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें चरणबद्ध रूप से आगे बढ़ना होगा।

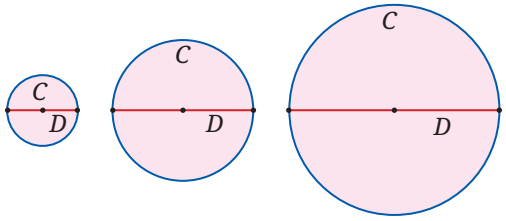
यदि हम किसी वर्ग की भुजाओं को दोगुना कर दें तो उसके परिमाप पर क्या प्रभाव पड़ेगा? परिणामस्वरूप, परिमाप भी दोगुना हो जाएगा। इसके परिमाप और भुजा का अनुपात 4:1 होता है और यह सभी वर्गों के लिए भी मान्य है। वर्ग की भुजा की लंबाई बढ़ने (या कम) होने पर भी, परिमाप और भुजा का अनुपात 4:1 पर स्थिर रहता है।



चित्र 6.4 — परिमाप और भुजा का अनुपात 4:1 है

© NCERT not to be republished

समबाहु त्रिभुज के लिए परिमाप और भुजा का अनुपात 3:1 होता है। समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई बढ़ने (या कम) होने पर भी, उसके परिमाप और भुजा का अनुपात 3:1 पर स्थिर रहता है।



चित्र — 6.5

वृत्त के संबंध में क्या कहेंगे? इसका परिमाप (सामान्यत: जिसे **परिधि** कहा जाता है) का व्यास से क्या संबंध होगा?

क्या सभी आकार के वृत्तों (चित्र 6.5) के लिए परिधि (C) और व्यास (D) का अनुपात समान होता है? आपका क्या विचार है?

6.2 वृत्त का परिमाप — C/D अनुपात

प्राचीन समय में लोगों को यह बोध हुआ कि भले ही यदि हम वृत्त के आकार में परिवर्तन कर दें, फिर भी वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात परिवर्तित नहीं होता है।

आइए, हम इस अनुपात को वृत्त का 'C/D अनुपात' कहते हैं।

C/D अनुपात का मान क्या है?

आप इस अनुपात का आकलन कैसे करेंगे?

मापन संबंधी गृहकार्य

आप C/D अनुपात का आकलन करने के लिए अपने घर पर एक सरल मापन कर सकते हैं। एक धागे की रील (कॉटन रील) लीजिए, जिस पर पतला धागा लिपटा हुआ हो। रील के व्यास D को यथासंभव सटीकता से माप लीजिए। पतले धागे को खोलिए और तत्पश्चात धागे को रील के चारों ओर 20 बार कसकर लपेटिए। इसे पुनः खोलिए और इसकी लंबाई L को मापिए तथा $\frac{L}{20D}$ की गणना कीजिए। यह वही अनुपात है जिसे हम ज्ञात करना चाहते हैं। सटीकता के लिए, धागा बहुत पतला होना चाहिए। कृपया यह प्रयोग कीजिए! क्या आपको 3 और 4 के मध्य का अनुपात प्राप्त होता है? क्या आपको 3.1 और 3.2 के मध्य का अनुपात प्राप्त होता है?

शुद्ध ज्यामिति का उपयोग करके भी C/D अनुपात का आकलन संभव है, अर्थात बिना किसी मापन के भी! क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि कैसे?

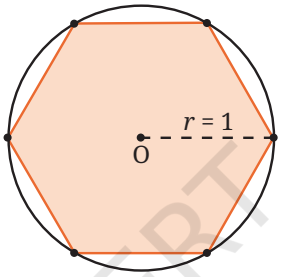
C/D की रोमांचक यात्रा — प्राचीन अनुमानों से लेकर माधव के सटीक सूत्र तक

समस्त भौगोलिक क्षेत्रों के गणितज्ञों की प्राचीन काल से ही वृत्तों और C/D अनुपात में रुचि रही है। इस अचर को, जिसे अब हम π (पाई) उच्चारित करते हैं, यह गणित की विभिन्न शाखाओं के मध्य एक

© NCERT not to be republished

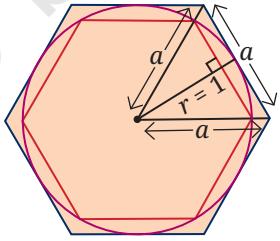
सेतु का कार्य करता है और सीधी-कोर वाले बहुभुजी संसार को प्रकृति के अनंत वक्रों से जोड़ता है। प्राचीन सभ्यताएँ जहाँ निर्माण और व्यापार के लिए व्यावहारिकता और 'पर्याप्तता' मानकों पर निर्भर थीं, अंततः इस अनुपात के अन्वेषण में गणितज्ञों की गहरी रुचि बन गई, जिसने गणित के सिद्धांतों की कृत्रिमता को नए मानदंड प्रदान किए।

मेसोपोटामिया (लगभग 1900 सामान्य संवत पूर्व) में गणितज्ञ अशोधित पूर्णांक मान 3 से आगे बढ़ गए थे। उन्हें बोध हुआ कि एक वृत्त की परिधि, उसके अंतर्गत बने षट्भुज के परिमाप से थोड़ी अधिक होती है। उन्होंने यह निष्कर्ष निकाला कि π का मान 3 से अधिक होना चाहिए और उन्होंने π का मान $3 + \frac{1}{8} = 3.125$ लिया।



चित्र 6.6 — मेसोपोटामियाई षट्भुज-वृत्त तुलना। क्या आप देख सकते हैं कि यह क्यों $\pi > 3$ दर्शाता है?

250 सामान्य संवत पूर्व तक, सिरैक्यूज के आर्किमिडीज ने इस प्रश्न को और आगे तक लेकर गए है। उन्होंने π के मान को वृत्त के अंतर्गत और परिगत रचित बहुभुजों के परिमाप के मध्य में 'समाविष्ट' कर दिया। 'अंतर्गत' और 'परिगत' षट्भुजों का उपयोग करके आर्किमिडीज ने दर्शाया कि π का मान 3 और $2\sqrt{3} \approx 3.46$ के मध्य है। इसी प्रकार, 96-भुजा वाले बहुभुज तक कार्य करते हुए आर्किमिडीज ने पाया कि $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ होता है।



चित्र 6.7 — आर्किमिडीज-विधि में 'अंतर्गत' और 'परिगत' बहुभुजों का उपयोग किया गया है। क्या आप देख सकते हैं कि अंतर्गत और परिगत षट्भुजों का यह चित्र हमें बताता है कि क्यों π का मान 3 और $2\sqrt{3}$ के मध्य है?

*(**संकेत** — बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कीजिए।)*

© NCERT not to be republished

लगभग 150 सामान्य संवत में एलेक्जेंड्रिया के टॉलेमी ने आर्किमिडीज के अभिकलन को अपनी खगोलीय सारणी में उपयोग करने के लिए परिष्कृत किया और π का मान $\frac{377}{120} \approx 3.14167$ दिया।

इसके कुछ ही समय पश्चात, चीन में **लियू हुई** (263 सामान्य संवत) के 'वृत्त-काटने की विधि' (सर्कल कटिंग मैथड) ने **जू चोंगजी** (480 सामान्य संवत) द्वारा इस संदर्भ में दी गई दो बड़ी सफलताओं का आधार तैयार किया। जू ने बहुभुज सन्निकटन विधि को 24,576 भुजाओं तक विस्तारित किया! उन्होंने इसका उपयोग π के लिए $\frac{22}{7} \approx 3.1428$ का 'यूएलू—yuelü' (सन्निकट अनुपात) और $\frac{355}{113} \approx 3.1415929$ का 'मियू—Miü' (निकटस्थ अनुपात) ज्ञात करने के लिए किया। परिमेय भिन्न $\frac{355}{113}$ का मान π के इतना निकट था कि यह 800 से अधिक वर्षों तक विश्व में π के लिए सबसे सटीक मान बना रहा। अब यह ज्ञात हुआ है कि 15,000 से कम 'हर' वाला कोई भी परिमेय भिन्न π के मान के इतना निकट नहीं हो सकता, जितना यह भिन्न है!

499 सामान्य संवत में आर्यभट ने π के लिए $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ का मान दिया। महत्त्वपूर्ण बात यह है कि उन्होंने इस मान को 'आसन्न' अर्थात 'समीप' या 'सन्निकट' बताया। इस पर अधिक ध्यान देने से ज्ञात होता है कि इस अनुपात को केवल एक सरल भिन्न के रूप में नहीं लिखा जा सकता। इस दौरान **ब्रह्मगुप्त** (628 सामान्य संवत) ने π के लिए $\sqrt{10} = 3.1622$ मान का उपयोग करने का सुझाव दिया। यद्यपि यह थोड़ा कम सटीक था, परंतु उन्होंने इसकी गणितीय सहजता और समीकरण में इसका सरलता से उपयोग किए जा सकने के कारण इसे चुना, π के मान के लिए $\sqrt{10}$ एक ऐसा चयन था, जो कई शताब्दियों पश्चात तक भी अरब जगत और मध्यकालीन यूरोप में इसका मुख्य सन्निकट मान बना रहा।

बाद के वर्षों में, कई महान गणितज्ञों ने π का अध्ययन किया, जिसमें इसके सन्निकटन भी सम्मिलित थे, परंतु कोई भी सन्निकटन जू के दिए मान $\frac{355}{113}$ जितना सटीक नहीं था अथवा बीजगणित सररलीकरण, $\frac{22}{7}$, 3.1416 और $\sqrt{10}$ जितना सरल नहीं था, जब तक कि संगमग्राम के माधव का कार्य नहीं आया, जिन्होंने इसे सदैव के लिए परिवर्तित कर दिया। माधव को अनुभव हुआ कि यह मात्र एक संख्या नहीं थी, जिसे भिन्न और दूसरे परिमित बीजगणितीय व्यंजकों से सन्निकटित किया जा सके, किंतु यह एक सीमा थी जिस तक पहुँचना था। इस प्रकार माधव ने π के लिए पहला सटीक सूत्र ढूँढ़ा—

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

क्या यह एक सुदर और आकर्षक सूत्र नहीं है? माधव का सूत्र जो 'अनंत श्रेणी' के रूप में दिया गया था, गणित के लिए एक क्रांतिकारी परिवर्तन था। वृत्त को ज्यामितीय रूप में काटने से लेकर संख्याओं के विश्लेषणात्मक योग की ओर बढ़ते हुए माधव ने गणित की उस शाखा को जन्म दिया,

© NCERT not to be republished

जिसे 'कलन' या 'कलनशास्त्र' के नाम से जाना जाता है। उनकी अनंत श्रेणी ने उन्हें π के मान की गणना 11 दशमलव स्थान (3.14159265358) तक कर पाने में मुख्य भूमिका निभाई और यह प्रमाणित किया कि किसी वृत्त की परिधि और उसके व्यास के मध्य का संबंध गणित के एक पूर्णतया नए क्षेत्र के लिए द्वार था।

समय के साथ कुशल और कुशल अनंत श्रेणियाँ विकसित हुईं, जिनसे π का मान और अधिक दशमलव स्थानों तक भी शीघ्रता से मिलने लगा। माधव के पश्चात इस प्रश्न पर मुख्य सफलताएँ नीलकंठ (लगभग 1500), माचिन (1706), रामानुजन (1914) और रामानुजन के विचार को कुशलतापूर्वक आगे बढ़ाने वाले चुडनोव्स्की बंधुओं (1988) को मिली। वर्तमान में उनकी कलन-विधि का उपयोग करके, हम π को नील (सैकड़ों ट्रिलियन) अंकों तक जानते हैं! हम आगे की कक्षाओं में कलनशास्त्र के क्षेत्र के संबंध में और अधिक जानेंगे।

1706 में वेल्श के गणितज्ञ विलियम जोन्स ने C/D अनुपात को दर्शाने के लिए ग्रीक अक्षर π का उपयोग किया क्योंकि π परिमाप के लिए उपयोग किए जाने वाले ग्रीक शब्द 'पेरिमिट्रोज' का पहला अक्षर है। इस प्रतीक चिह्न को स्विस-जर्मन गणितज्ञ लियोनहार्ड यूलर (उच्चारण 'ऑइलर') ने प्रसिद्धि दिलाई थी। हम तब से उसी चिह्न का उपयोग करते आ रहे हैं!

6.3 π अपरिमेय है

π के अंक बिना किसी दिखने वाले प्रतिरूप के निरंतर चलते रहते हैं। आप पहले से ही जानते हैं कि 'भिन्न' एक लयबद्ध प्रतिरूप के साथ दशमलव प्रसार को दर्शाते हैं, जैसे —

$$\frac{1}{3} = 0.33333..., \frac{1}{11} = 0.09090909..., \frac{1}{7} = 0.142857\ 142857...$$

परंतु π के लिए ऐसा कोई प्रतिरूप नहीं दिखता है! इससे यह बोध हुआ कि इसे दो पूर्णांकों के अनुपात के रूप में नहीं लिखा जा सकता। ऐसी संख्याओं को 'अपरिमेय' कहा जाता है। स्मरण रखिए कि एक परिमेय संख्या वह संख्या होती है जिसे किसी 'भिन्न' के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ a, b पूर्णांक हैं और b, 0 के समान नहीं है, जैसे — संख्याएँ $1\frac{2}{3}$, $\frac{-7}{11}$ और 1.4 हैं।

कक्षा 8 में आपने अध्ययन किया था कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। उनके लेखों से ऐसा अनुमान होता है कि आर्यभट और जू चोंगजी ने π को अपरिमेय माना था। शताब्दियों पश्चात (1761) गणितज्ञ लैम्बर्ट ने दर्शाया कि ऐसा ही है अर्थात π अपरिमेय है। परंतु इसे प्रमाणित करने के लिए उन्नत गणित की आवश्यकता होती है, जिसे हम बहुत बाद में सीखेंगे।

चूँकि π अपरिमेय है इसलिए π के लिए कोई 'सर्वोत्तम भिन्न' नहीं है। यदि π के निकट मान का कोई भिन्न विद्यमान है तो हम उससे निकटतम दूसरा भिन्न भी ढूँढ़ सकते हैं।

© NCERT not to be republished

प्रसिद्ध भिन्न $\frac{22}{7}$ अधिकतर व्यावहारिक उपयोग के लिए पर्याप्त है। परंतु यह ध्यान रखना आवश्यक है कि π, $\frac{22}{7}$ के समान नहीं है (ये 'निकट है किंतु समान नहीं है')। इसलिए हम $\pi \approx \frac{22}{7}$ तथा $\pi \neq \frac{22}{7}$ भी लिखते हैं। इसी प्रकार, हम $\sqrt{2} \approx 1.414$ तथा $\sqrt{2} \neq 1.414$ लिख सकते हैं।

जैसा कि आपने पूर्व में ध्यान दिया होगा कि π के लिए एक बहुत सटीक सन्निकटन $\frac{355}{113}$ है।



रोचक तथ्य

π के कुछ आरंभिक दशमलव अंक स्मरण रखने की एक रोचक विधि यहाँ दी गई है—

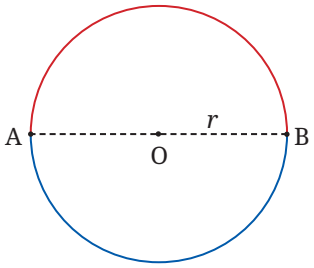
How I wish I could recollect pi.

उपरोक्त अंग्रेजी कथन के प्रत्येक शब्द में अक्षरों की संख्या गिनिए (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2) और आपको π के अंक प्राप्त हो जाएँगे! इसलिए $\pi \approx 3.141592...$ है।

चूँकि $\pi \approx 3.14$ और $\pi \approx \frac{22}{7}$ भी है इसलिए 14 मार्च (उत्तरी अमेरिका में '3-14' लिखा जाता है) को प्रत्येक वर्ष **पाई दिवस** के रूप में मनाया जाता है और 22 जुलाई (भारत में '22-7' लिखा जाता है) को प्रत्येक वर्ष **पाई सन्निकटन दिवस** के रूप में मनाया जाता है।

© NCERT not to be republished

6.4 वृत्त की चाप की लंबाई



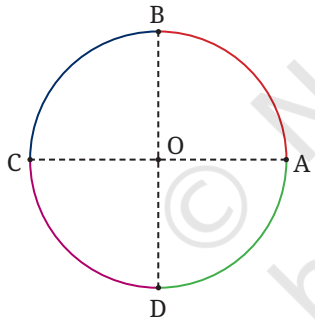
चित्र 6.8 — दो अर्द्धवृत्त मिलकर एक पूर्ण वृत्त बनाते हैं।

d व्यास वाले एक वृत्त की परिधि πd है। चूँकि व्यास, त्रिज्या का दोगुना है, इसलिए हम वृत्त की परिधि को $2\pi r$ भी लिख सकते हैं, जहाँ r त्रिज्या है।

समान त्रिज्या r वाले **अर्द्धवृत्त** की लंबाई क्या होगी (चित्र 6.8 देखिए)?

यदि हम वृत्त के व्यास AB के सापेक्ष प्रतिबिंबित करते हैं तो लाल अर्द्धवृत्त और नीला अर्द्धवृत्त अपना स्थान परिवर्तित कर लेते हैं। इससे स्पष्ट होता है कि उनके अर्द्धवृत्तीय चाप की लंबाई समान है, जो कि $2\pi r \div 2 = \pi r$ है।

आकृति को वृत्त के व्यास AB के सापेक्ष प्रतिबिंबित करने के स्थान पर हम संपूर्ण वृत्त को केंद्र O के चारों ओर 180° के कोण से घुमाने अर्थात वृत्त को आधा घुमाकर भी कल्पना कर सकते हैं। इसका प्रभाव भी वही रहता है और हमें अर्द्धवृत्तीय चाप की लंबाई के लिए समान सूत्र ही प्राप्त होता है।



चित्र 6.9 — चार चतुर्थांश वृत्त मिलकर एक पूर्ण वृत्त निर्मित करते हैं

समान त्रिज्या वाले **चतुर्थांश वृत्त** की लंबाई क्या होगी (चित्र 6.9)?

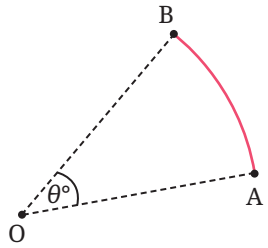
कल्पना कीजिए कि संपूर्ण आकृति को 90°, दक्षिणावर्त या वामावर्त घुमाया जाए। इस प्रकार, प्रत्येक चतुर्थांश वृत्त घूमता है और दूसरे चतुर्थांश वृत्त को ढक लेता है। इसलिए प्रत्येक चतुर्थांश वृत्त के चाप की लंबाई एक समान होती है और यह $2\pi r \div 4 = \frac{\pi r}{2}$ के समान होती है।

निम्नलिखित बिंदुओं पर ध्यान दीजिए —

- अर्द्धवृत्त की लंबाई का सूत्र $2\pi r \times \frac{180^\circ}{360^\circ}$ भी लिखा जा सकता है।
- एक चतुर्थांश वृत्त की लंबाई का सूत्र $2\pi r \times \frac{90^\circ}{360^\circ}$ भी लिखा जा सकता है।

© NCERT not to be republished

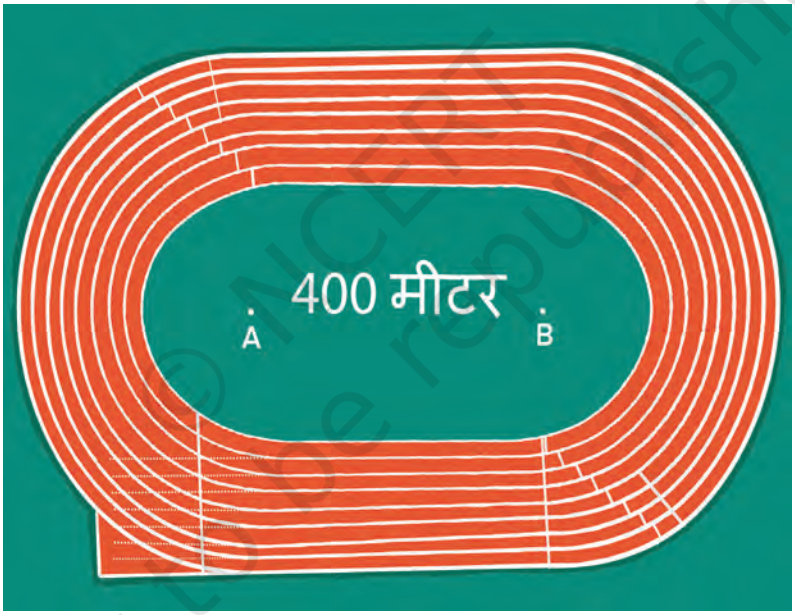
इनसे हम किसी वृत्त के चाप की लंबाई के सूत्र का अनुमान वृत्त के केंद्रबिंदु पर बनने वाले कोण (अर्थात वह कोण जो यह 'अंतरित' करता है) के पदों में भी लगा सकते हैं।



चित्र 6.10 — वृत्त के चाप की लंबाई

यदि चाप AB है तथा यह वृत्त के केंद्र O पर θ° का कोण अंतरित करती है तो चाप की लंबाई $2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ है।

400 मीटर दौड़-पथ पर विस्तृत दृष्टि



चित्र 6.11 — दौड़-पथ का योजनाबद्ध चित्र

चित्र 6.11 में 400 मीटर का दौड़-पथ दर्शाया गया है। आप यहाँ 84.39 मीटर के दो सीधे खंड और दो वक्रीय खंड देख सकते हैं जो उभयनिष्ठ केंद्र (बिंदु A और B) वाले अर्द्धवृत्त हैं; दोनों ओर बने सबसे आंतरिक अर्द्धवृत्त की त्रिज्या 36.5 मीटर है। प्रत्येक पथ की चौड़ाई 1.22 मीटर है।

© NCERT not to be republished

मान लीजिए कि एक धाविका किसी दौड़-पथ का एक संपूर्ण चक्कर लगाती है। वह कुल कितनी दूरी दौड़कर तय करती है?

- मान लीजिए कि वह आंतरिक सीमा-रेखा से 0.3 मीटर के अंतर पर दौड़ती है।
- वह 84.39 मीटर लंबाई के दो सीधे खंडों में दौड़ती है, जो कुल 168.78 मीटर हैं।
- वह (36.5 + 0.3) मीटर अर्थात 36.8 मीटर त्रिज्या के दो अर्द्धवृत्त पर भी दौड़ती है।
- दोनों समान अर्द्धवृत्त मिलकर एक पूर्ण वृत्त बनाते है।
- इसकी परिधि $2 \times \pi \times 36.8 = 2 \times 3.1416 \times 36.8 = 231.22$ मीटर है।
- अतः धाविका द्वारा दौड़ी गई कुल दूरी 168.78 + 231.22 = 400 मीटर है।

अब दो धाविकाओं के बारे में विचार कीजिए, एक सबसे आंतरिक दौड़-पथ में और दूसरी धाविका दूसरे दौड़-पथ पर दौड़ती है। सीधी रेखा वाले खंड पर दोनों धाविकाएँ एक समान दूरी दौड़ती हैं किंतु वक्रीय खंडों पर दूसरे दौड़-पथ की धाविका अधिक दूरी तक दौड़ती है क्योंकि उसके अर्द्धवृत्त की त्रिज्या बड़ी है। इसी को समान करने के लिए सांतरण की आवश्यकता होती है।

सोचिए और विचार कीजिए

पहले और दूसरे दौड़-पथ की त्रिज्या में क्या अंतर है? दूसरे दौड़-पथ में धावक के लिए कितने सांतरण की आवश्यकता है, यह ज्ञात करने के लिए चित्र 6.11 का उपयोग कीजिए। क्या दूसरे और तीसरे दौड़-पथ के मध्य भी समान सांतरण की आवश्यकता होगी?

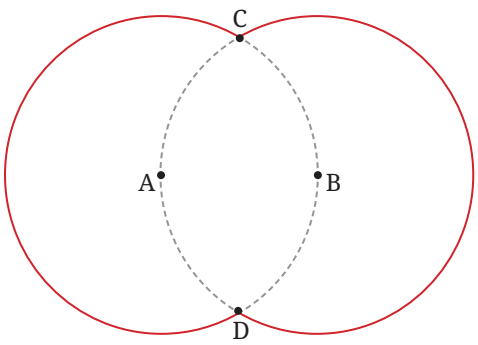
6.5 परिमाप पर आधारित प्रश्न, पहेलियाँ और विरोधाभास

हम इस भाग को परिमाप के संदर्भ से जुड़े कुछ रोचक प्रश्नों पर प्रकाश डालकर पूर्ण करेंगे।

उदाहरण 1 — समान त्रिज्या वाले दो वृत्त इस प्रकार स्थित किए गए हैं कि प्रत्येक वृत्त दूसरे वृत्त के केंद्र से होकर गुजरता है (चित्र 6.12)।

यह दिया गया है कि प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या r इकाई है, r इकाई की दृष्टि से दोनों वृत्तों से मिलकर बने आकार का परिमाप ज्ञात कीजिए। (वृत्तों के अंदर बने बिंदुगत वक्रों को छोड़ दीजिए।)

© NCERT not to be republished



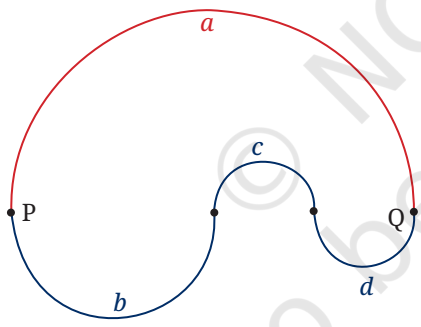
चित्र 6.12

यहाँ केंद्र A और B वाले दो सर्वांगसम वृत्त दिए गए हैं। प्रत्येक वृत्त दूसरे वृत्त के केंद्र से होकर गुजरता है। ये वृत्त बिंदु C और D पर प्रतिच्छेद करते हैं। हमें यहाँ दर्शाए गए दो लाल चापों की कुल लंबाई, त्रिज्या r इकाई के पदों में ज्ञात करनी है।

A, B, C शीर्ष वाले त्रिभुज पर विचार कीजिए। चूँकि AB = r, AC = r, BC = r और त्रिभुज समबाहु है इसलिए $\angle CAB = 60° = \angle CBA$ है।

इसी प्रकार, $\angle BAD = 60° = \angle ABD$ है, इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $\angle CAD = 120° = \angle CBD$ है।

इसलिए प्रत्येक बिंदुगत चाप उस वृत्त की परिधि का $\frac{1}{3}$ होती है जिस पर वह विद्यमान होती है। इसलिए दो लाल चापों की कुल लंबाई $2 \times \frac{2}{3} \times 2\pi r = \frac{8}{3}\pi r$ है।



चित्र 6.13

उदाहरण 2 — चित्र 6.13 में, हम बिंदु P और Q और उन्हें जोड़ने वाले दो पथ देखते हैं। प्रथम पथ अर्द्धवृत्त a से बना है। द्वितीय पथ तीन अर्द्धवृत्तों (b, c और d) से मिलकर बना है। कौन-सा पथ लंबा है? एक पथ का चयन कीजिए— (i) पथ a लंबा है। (ii) पथ $b + c + d$ लंबा है। (iii) दोनों पथों की लंबाई समान है। (आगे अध्ययन करने से पूर्व इसका उत्तर देने का प्रयास कीजिए।)

आइए, इस समस्या को बीजगणित की सहायता से हल करते हैं। मान लीजिए कि अर्द्धवृत्तों a, b, c, d की त्रिज्याएँ क्रमशः a', b', c' और d' हैं। इसलिए अर्द्धवृत्त a की लंबाई $\frac{1}{2}(2\pi)\, a' = \pi a'$ है। इसी प्रकार, अर्द्धवृत्तों b, c और d की लंबाइयाँ क्रमशः $\pi b'$, $\pi c'$ और $\pi d'$ हैं। अतः द्वितीय पथ की लंबाई $\pi(b' + c' + d')$ है और प्रथम पथ की लंबाई $\pi a'$ है।

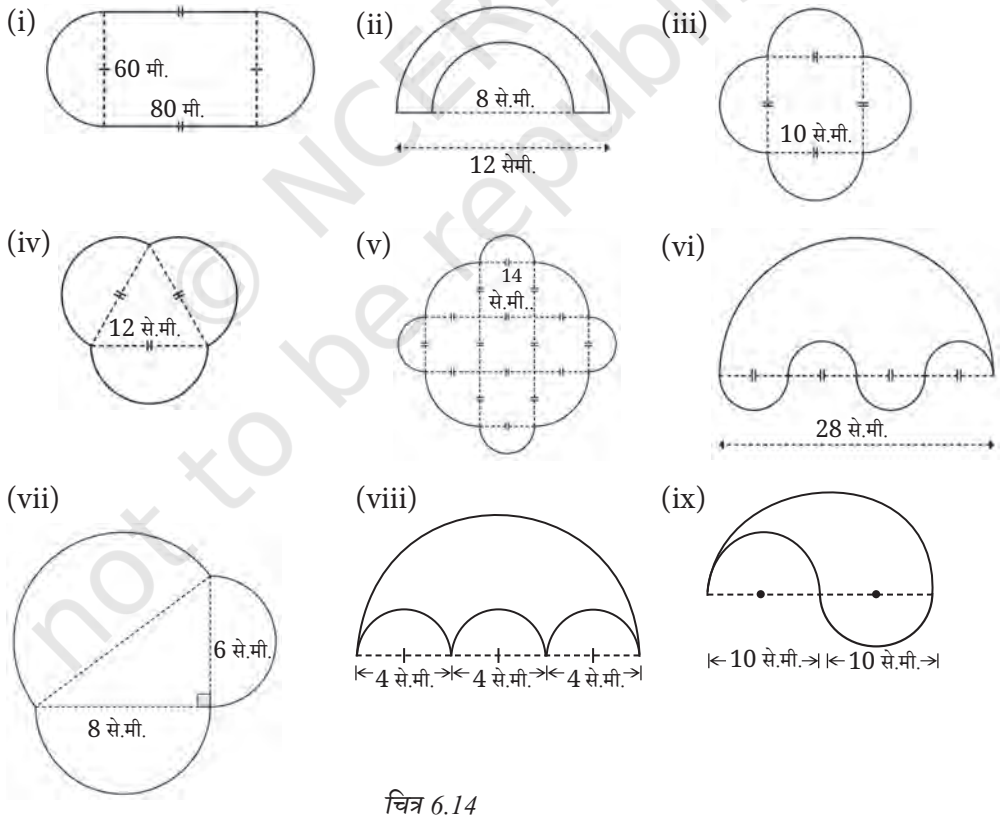
$b' + c' + d'$ अथवा a' में कौन-सा पथ लंबा है? क्या आप देख रहे हैं कि दोनों पथों में से कोई भी लंबा नहीं है? सभी पथ समान हैं! चूँकि PQ की लंबाई $2a'$ है और यह $2b' + 2c' + 2d'$ के समान भी है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि $a' = b' + c' + d'$ है, अतः दोनों पथों की लंबाई समान है!

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.1

किसी अन्य निर्देश की अनुपस्थिति में, सन्निकटन $\pi = \frac{22}{7}$ का उपयोग कीजिए।

1. एक वृत्त का परिमाप 44 सेंटीमीटर है। इसकी त्रिज्या क्या होगी?
2. निम्नलिखित वृत्तों की परिधि की गणना 3 दशमलव स्थानों तक कीजिए— (i) त्रिज्या 7 सेंटीमीटर (ii) त्रिज्या 10 सेंटीमीटर (iii) त्रिज्या 12 सेंटीमीटर
3. वृत्त की चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए यदि — (i) त्रिज्या 3.5 सेंटीमीटर है और केंद्र पर कोण 60° है तथा (ii) वृत्त की त्रिज्या 6.3 मीटर है और केंद्र पर कोण 120° है।
4. 14 सेंटीमीटर त्रिज्या और 75° त्रिज्यखंड कोण वाले वृत्त के त्रिज्यखंड (अर्थात एक वक्र भाग और दो सीधी रेखा वाले भाग) का परिमाप ज्ञात कीजिए।
5. निम्नलिखित आकृतियों का परिमाप (चापों को आवश्यकतानुसार वृत्त का एक-चौथाई, आधा या तीन-चौथाई मानकर) ज्ञात कीजिए (चित्र 6.14(i) से 6.14(ix)) —

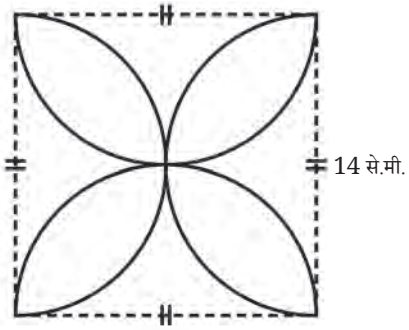


चित्र 6.14

© NCERT not to be republished

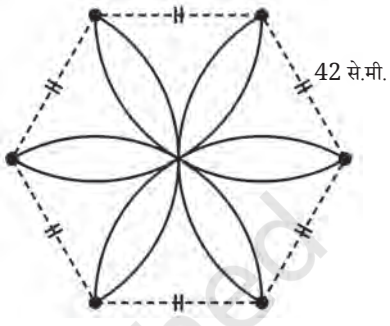
6. यदि कार के पहिए का व्यास 56 सेंटीमीटर है तो — (i) पहिए का एक चक्कर पूर्ण करने के लिए कार को कितनी दूरी तय करनी होगी? (ii) यदि कार 10 किलोमीटर की दूरी तय करती है तो पहिया कितने चक्कर लगाता है?
7. दिए गए प्रत्येक फूल की समस्त पंखुड़ियों का कुल परिमाप ज्ञात कीजिए —

(i)



चित्र 6.15(क) — चापों के केंद्र, वर्ग की भुजाओं के मध्यबिंदु हैं।

(ii)



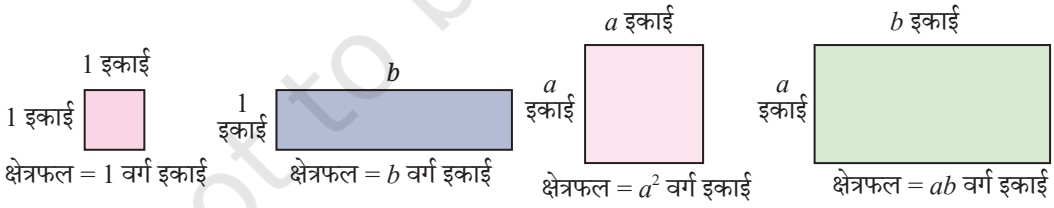
चित्र 6.15(ख) — चापों के केंद्र, षट्भुज के शीर्ष हैं।

8. दो वृत्तों के परिमाप का अनुपात 5:4 है। उनकी त्रिज्या का अनुपात क्या है?

6.6 आयत का क्षेत्रफल

अब हम परिमाप से क्षेत्रफल अर्थात किसी समतल सतह पर द्वि-विमीय क्षेत्र द्वारा घेरे गए 'स्थान के माप' की ओर बढ़ते हैं।

माप सदैव किसी के सापेक्ष होती है जिसे हम इकाई कहते हैं। क्षेत्रफल के लिए इकाई 1×1 वर्ग है; इसमें क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई लिया जाता है। कक्षा 8 से आप यह जानते हैं कि a इकाई और b इकाई भुजाओं वाले आयत का क्षेत्रफल ab वर्ग इकाई होता है (चित्र 6.16)।

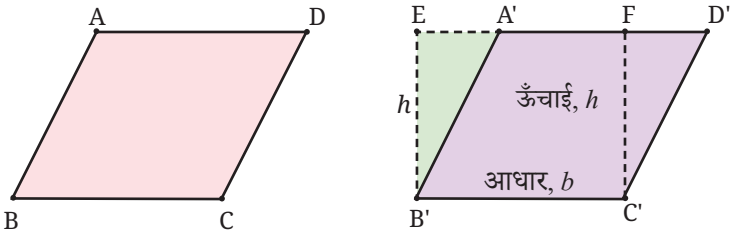


चित्र 6.16 — वर्ग और आयत का क्षेत्रफल

6.7 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

कक्षा 8 से आपको समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात है।

© NCERT not to be republished

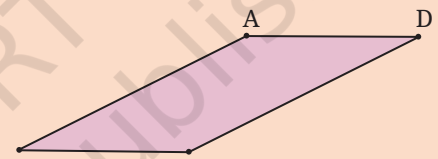


चित्र 6.17 — समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल। यहाँ A'B'C'D', ABCD की प्रतिकृति है।

चित्र 6.17 में प्रदर्शित किया गया है कि समांतर चतुर्भुज ABCD को समान आधार b और समान ऊँचाई h वाले आयत EB'C'F (दाईं ओर; यहाँ समांतर चतुर्भुज A'B'C'D' ABCD की प्रतिकृति है) में कैसे रूपांतरित किया जा सकता है। यद्यपि दोनों आकृतियाँ भिन्न हैं, फिर भी उनका क्षेत्रफल समान है। अतः समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, आधार × ऊँचाई = bh के समान होता है।

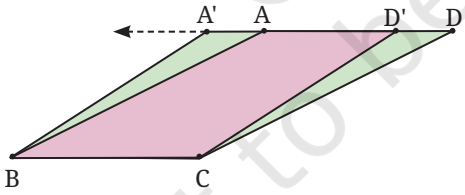
सोचिए और विचार कीजिए

यदि समांतर चतुर्भुज संकरा हो (चित्र 6.18) और C से AD पर डाले गए लंब का पाद भुजा AD पर न हो तो क्या होगा? तब यह चतुर्भुज रचना क्षेत्रफल ज्ञात करने के कार्य को नहीं साधती है। रचना में इस 'अंतराल' को हम कैसे दूर करेंगे?



चित्र 6.18

यहाँ 'संकरे समांतर चतुर्भुज' के प्रश्न को हल करने के लिए एक संकेत दिया गया है।



चित्र 6.19 — संकरा समांतर चतुर्भुज

भुजा DA पर D के निकट एक बिंदु D' चुनें और DA को विस्तारित करते हुए एक बिंदु A' का चयन करें, जहाँ A'A = D'D हो (चित्र 6.19)। तब A'BCD' एक समांतर चतुर्भुज है और चूँकि $\Delta CDD' \cong \Delta BAA'$, इसलिए इसका क्षेत्रफल ABCD के क्षेत्रफल के समान ही है। इस चरण को आवश्यकतानुसार कई बार दोहराइए।

सोचिए और विचार कीजिए

किसी आयत का क्षेत्रफल उसकी भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर ज्ञात किया जा सकता है। क्या समांतर चतुर्भुज के लिए भी यही सत्य है? अर्थात क्या भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने पर समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

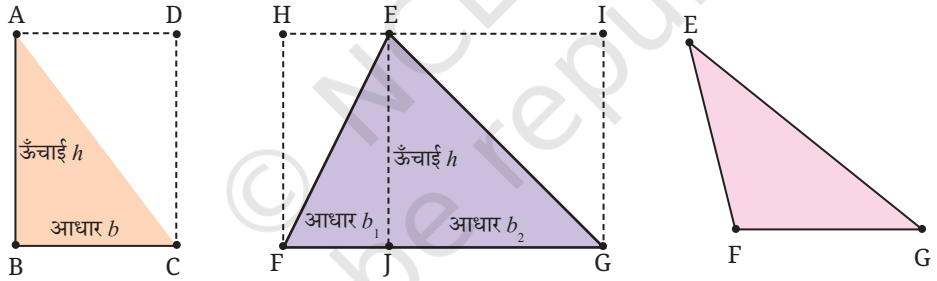
© NCERT not to be republished

(**संकेत** — यदि हम समांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं की लंबाई स्थिर रखते हुए उनके मध्य के कोण को घटाते या बढ़ाते हैं तो समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ता है?)

6.8 त्रिभुज का क्षेत्रफल

अब हम त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करेंगे। (आपने यह सूत्र कक्षा 8 में देखा होगा, परंतु हम इसे संक्षेप में पुनः समझ लेंगे।) सूत्र ज्ञात करने के लिए एक विधि यह है कि सर्वप्रथम समकोण त्रिभुज के लिए तथा उसके पश्चात अन्य त्रिभुजों पर विचार कीजिए। दोनों ही स्थितियों में हम त्रिभुज को एक आयत के अंतर्गत रखते हैं, तत्पश्चात हम आयत के क्षेत्रफल के सूत्र का उपयोग करते हैं। (चित्र 6.20(क) देखिए। ध्यान दीजिए कि FG = FJ + JG, अतः $b = b_1 + b_2$ है।) परिणामस्वरूप, हमें ज्ञात होता है कि b इकाई आधार और h इकाई ऊँचाई वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल b इकाई आधार और h इकाई ऊँचाई वाले आयत के क्षेत्रफल का आधा होता है अर्थात क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ bh वर्ग इकाई के समान होता है।

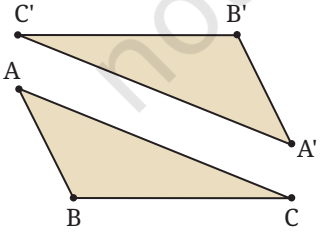
पूर्व के समान आप सोच रहे होंगे कि क्या हमारे तर्क में कुछ कमी है? यदि कोण EFG अधिकोण हो और त्रिभुज का आकार चित्र 6.20(ख) में प्रदर्शित त्रिभुज EFG जैसा हो तब हम क्या करेंगे? इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात कीजिए।



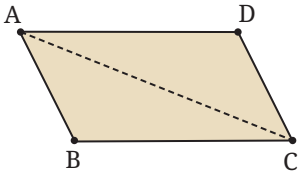
चित्र 6.20(क) — त्रिभुज का क्षेत्रफल

चित्र 6.20 (ख)

त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करने की एक उत्तम विधि यह देखना है कि त्रिभुज की दो सर्वांगसम प्रतियों को एक साथ संयोजित करके एक समांतर चतुर्भुज बनाया जा सकता है।



चित्र 6.21(क)



चित्र 6.21(ख)

चित्र 6.21(क) में त्रिभुज ABC और A'B'C' सर्वांगसम हैं। इन्हें चित्र 6.21(ख) में दर्शाए अनुसार संयोजित करने पर एक समांतर चतुर्भुज निर्मित होता है।

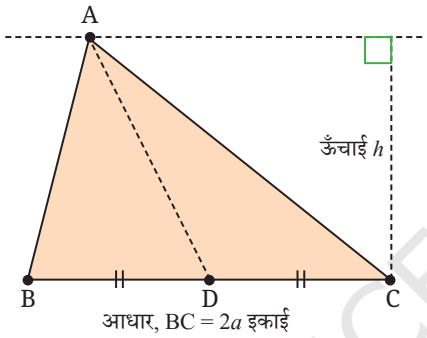
© NCERT not to be republished

क्या आपने देखा कि क्यों दो त्रिभुजों को एक साथ रखकर समांतर चतुर्भुज बनाया गया है? (यदि आप आकृतियों में कोणों का अध्ययन करेंगे (जैसे ∠B'C'A' और ∠BCA) तो आप देखेंगे कि ऐसा क्यों होता है। वह प्रक्रिया स्मरण रखिए, जिससे हम यह ज्ञात करते हैं कि कौन-सी दो रेखाएँ समांतर हैं।

जैसा कि हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = bh है।

इसलिए त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र $\frac{1}{2}$ × (आधार × ऊँचाई) = $\frac{1}{2}$ bh है।

त्रिभुज की माध्यिका की अवधारणा — उपरोक्त सूत्र के आधार पर हम त्रिभुज की माध्यिका के विषय में एक बहुत ही सुंदर और सरल निष्कर्ष पर पहुँच जाते हैं।



चित्र 6.22

चित्र 6.22 में AD, त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है अर्थात माध्यिका त्रिभुज के शीर्ष के विपरीत रेखाखंड के शीर्ष बिंदुओं के मध्यबिंदु को मिलाने वाली रेखाखंड होती है।

मान लीजिए कि ΔABD और ΔACD के आधार समान हैं (BD = DC) और उनकी ऊँचाई (h) समान है। त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का उपयोग करते हुए देखते हैं कि उनके क्षेत्रफल समान हैं अर्थात $\frac{ah}{2}$ वर्ग इकाई!

हम इसे एक प्रमेय के रूप में देख सकते हैं।

प्रमेय — *एक त्रिभुज की माध्यिका त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों में विभाजित करती है।*

क्या यह आश्चर्यजनक है? अवश्य ही होना चाहिए। अंततः ΔABD और ΔACD (सामान्यतः) विभिन्न आकार के हैं (अर्थात आपस में सर्वांगसम भी नहीं है), परंतु हमने अभी सिद्ध किया है कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

ΔABD और ΔACD समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज हैं, आप आश्चर्यचकित होंगे कि एक सरल रेखा से ΔABD को ऐसे दो या अधिक टुकड़ों में विभाजित कर सकते हैं जो ΔACD को संपूर्णतया ढक ले? आपके विचार में क्या यह संभव है?

यह संभव है, ऐसा कहकर हम आपको अचंभित होने से रोक सकते हैं परंतु हम आपको यह नहीं बताएँगे कि त्रिभुज के कम-से-कम कितने टुकड़ों की आवश्यकता होगी। यह पता लगाने का प्रयास स्वयं कीजिए!

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

मान लीजिए कि दो समान क्षेत्रफलों वाले बहुभुज P और Q दिए गए हैं। क्या उनमें से एक को सीधी रेखा से दो या अधिक भागों में इस प्रकार बाँटना संभव है और फिर उन कटे हुए भागों को इस प्रकार से व्यवस्थित करना संभव है कि वे सभी भाग मिलकर दूसरे बहुभुज को भी पूरा ढक लें? अपने चारों ओर की आकृतियों के उदाहरण सोचिए—

1. समान क्षेत्रफल वाले वर्ग और गैर-वर्गाकार आयत,
2. भिन्न-भिन्न आकृति वाले दो त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल समान है।
3. समान क्षेत्रफल वाला एक त्रिभुज और एक वर्ग इसे आप अपनी कल्पना से तैयार कीजिए। आप इसके विषय में अपनी परिकल्पना तैयार कीजिए।

40 इकाई परिमाप वाले विभिन्न आयतों के विषय में विचार कीजिए (भुजाओं का पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है)।

1. इस प्रकार के कितने आयत हो सकते हैं?
2. इनमें से कोई ऐसा है जिसका क्षेत्रफल सबसे अधिक हो? इसकी विमाएँ क्या होंगी?
3. क्या इन सभी आयतों में से ऐसा कोई एक आयत है जिसका क्षेत्रफल सबसे कम है? उसकी विमाएँ क्या होंगी? क्या इस प्रकार का कोई भी उत्तर आपको आश्चर्यचकित करता है?

6.8.1 हीरोन का सूत्र

आप त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई से भली-भाँति परिचित हैं। क्या त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालने का कोई और भी सूत्र है? हाँ, अन्य प्रकार से भी क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। अब हम हीरोन के सूत्र पर चर्चा करेंगे, जिसको यूनान देश के गणितज्ञ और आविष्कारक हीरोन ने ज्ञात किया था। उन्होंने इसे प्राचीन में मिस्र देश के नील नदी के किनारे स्थित शहर अलेक्जेंड्रिया के संग्रहालय में पढ़ा था।

इस सूत्र के अनुसार, यदि ΔABC की भुजाओं की लंबाई $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ है तो इसका क्षेत्रफल इस प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है। सर्वप्रथम हम इसका अर्द्ध-परिमाप ज्ञात करेंगे, जो कि इसके परिमाप का आधा होगा अर्थात $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, तत्पश्चात त्रिभुज (ΔABC) का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ द्वारा ज्ञात करते हैं।

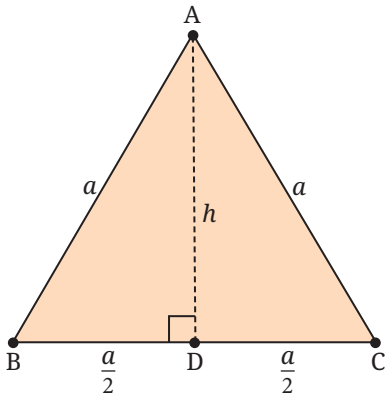
अब मुझे पूर्ण विश्वास है कि आपको भी यह सूत्र बहुत ही आश्चर्यजनक और विचित्र लगेगा। आइए, अब कुछ ज्ञात उदाहरणों की सहायता से इसकी जाँच करते हैं।

उदाहरण 3 — एक समबाहु त्रिभुज की भुजा a इकाई है।

© NCERT not to be republished

सभी तीनों भुजाओं की लंबाई a इकाई है तो इसका अर्द्ध-परिमाप $s = \frac{1}{2}(a+a+a) = \frac{3}{2}a$ इकाई है।

अब हीरोन के सूत्र का उपयोग करके त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}a\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग इकाई होगा।



चित्र 6.23

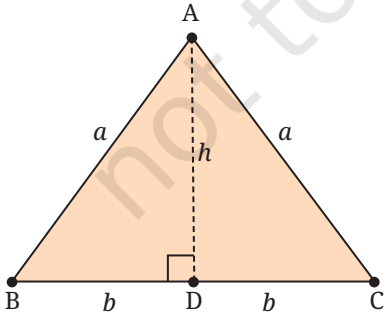
अब इसका $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई सूत्र द्वारा परीक्षण करते हैं। मान लीजिए, त्रिभुज की ऊँचाई h इकाई है तब बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$a^2 - h^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \therefore h^2 = \frac{3a^2}{4}, \quad \therefore h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

इसलिए क्षेत्रफल $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग इकाई एक समान सूत्र है।

ध्यान दीजिए— '$\therefore$' प्रतीक पर ध्यान दीजिए। यह प्रतीक प्राय: गणितज्ञों द्वारा उपयोग में लाया जाता है तथा इस प्रतीक ($\therefore$) का तात्पर्य 'इसलिए' है।

उदाहरण 4 — एक समद्विबाहु त्रिभुज की प्रत्येक समान भुजा a इकाई और आधार $2b$ इकाई है। इसका अर्द्ध-परिमाप $s = \frac{1}{2}(a+a+2b) = a+b$ इकाई है। हीरोन सूत्र के अनुसार, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(a+b)(a+b-a)(a+b-a)(a+b-2b)} = b\sqrt{a^2-b^2}$ वर्ग इकाई है।



चित्र 6.24

अब इसका $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई सूत्र द्वारा परीक्षण करते हैं। मान लीजिए, त्रिभुज की ऊँचाई h इकाई है तब बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$a^2 - h^2 = b^2, \quad \therefore h^2 = a^2 - b^2, h = \sqrt{a^2-b^2}$$

इसलिए त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{a^2-b^2} \times 2b = b\sqrt{a^2-b^2}$$

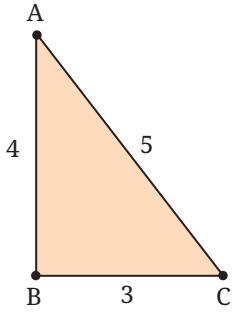
वर्ग इकाई पूर्व के समान है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 5 — एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 इकाई, 4 इकाई और 5 इकाई हैं।

अर्द्ध-परिमाप $s = \frac{1}{2}(3+4+5) = 6$ इकाई है। हीरोन के सूत्र का उपयोग करके त्रिभुज का क्षेत्रफल है —

$= \sqrt{6\times(6-3)\times(6-4)\times(6-5)} = \sqrt{6\times3\times2} = 6$ वर्ग इकाई



चित्र 6.25

अब इसका $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई सूत्र द्वारा परीक्षण करते हैं। चित्र 6.25 देखिए कि $3^2 + 4^2 = 5^2$ है। अत: बौधायन-पाइथागोरस कर्ण प्रमेय के विलोम के अनुसार ΔABC, B पर समकोण है।

आधार = 3 इकाई, ऊँचाई = 4 इकाई

अत: पहले की भाँति क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) = $\frac{1}{2}(3\times4) = 6$ वर्ग इकाई होगा।

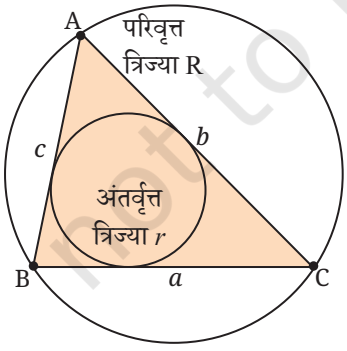
प्रत्येक स्थिति में हम एक समान सही परिणाम पाते हैं।

अब आप सोच रहे होंगे कि हीरोन का सूत्र कैसे सिद्ध होगा। इसके कई प्रमाण ज्ञात हुए हैं। उनमें से एक बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय और 'दो वर्गों के अंतर' का सूत्र $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ बारंबार उपयोग हुआ है। हम कक्षा 10 में भी इसमें से कुछ प्रमाणों का अध्ययन करेंगे।

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ऐसे अन्य दो और सूत्र भी हैं। दोनों का संबंध वृत्तों से है। आइए, चित्र 6.26 देखते हैं।

किसी भी त्रिभुज ABC के तीनों शीर्षों से होकर गुजरने वाला केवल एक ही वृत्त होता है, जिसे ΔABC का **परिवृत्त** कहते हैं।

इसी प्रकार, ΔABC में एक वृत्त ऐसा भी है जो त्रिभुज के ठीक मध्य में स्थित है और त्रिभुज की तीनों भुजाओं को भी स्पर्श करता है। इसे ΔABC का **अंतर्वृत्त** कहते हैं।



चित्र 6.26

माना कि ΔABC की भुजाएँ a, b और c हैं। परिवृत्त की त्रिज्या R है और अंतर्वृत्त की त्रिज्या r है तब क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित दो सूत्र प्राप्त होते हैं —

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{abc}{4R}$

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{r(a+b+c)}{2}$

© NCERT not to be republished

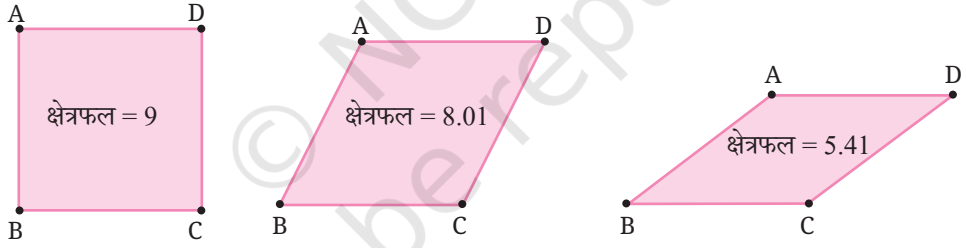
दोनों सूत्रों में एक आकर्षक समरूपता है। दूसरे सूत्र के प्रमाण के लिए एक ऐसे परिणाम की आवश्यकता है जिसका अध्ययन आप कक्षा 10 में करेंगे।

चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिए ब्रह्मगुप्त का सूत्र

हमने देखा कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई दी गई है तो उसका क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे। अब स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि चतुर्भुज की चार भुजाओं की लंबाई दिए जाने पर उसका क्षेत्रफल कैसे निकालेंगे?

पूर्व में हमने पूछा था कि क्या हम समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं जब केवल भुजाओं की लंबाई ज्ञात हो? उत्तर है— नहीं। इसी प्रकार, क्या हम चार भुजा वाली आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते है जब हमें एक भुजा की लंबाई ज्ञात है। नीचे दी गई आकृतियाँ इस प्रश्न का उत्तर प्रदान करती हैं।

चित्र 6.27 में प्रश्न यह है कि किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी भुजाएँ 3, 3, 3, 3 (यह एक समचतुर्भज है) हैं। जैसा कि आप देख सकते हैं कि तीनों आकृतियों का क्षेत्रफल भिन्न है। (हमने इन आकृतियों को 'जियोजेब्रा' की सहायता से निर्मित किया है और इनका क्षेत्रफल 'एरिया टूल' की सहायता से ज्ञात किया है। कृपया इस अभ्यास को स्वयं करने का प्रयास कीजिए या चार छड़ों को उनके सिरों से जोड़कर आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए।)



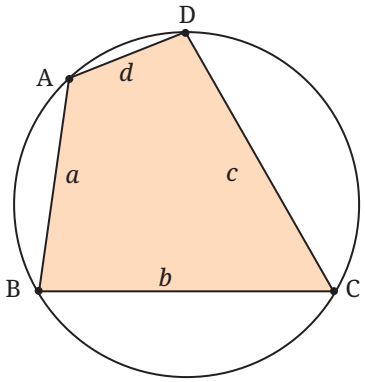
चित्र 6.27— किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल केवल उसकी भुजाओं की लंबाई ज्ञात होने से नहीं निकला जा सकता है।

अत: केवल चार भुजाओं की लंबाई से चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात नहीं कर सकते। इसके लिए हमें और अधिक जानकारी की आवश्यकता होती है, जैसे— चतुर्भुज के त्रिभुज का एक कोण, एक विकर्ण की लंबाई अथवा वह कोण जहाँ विकर्णों द्वारा एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित किया जाता है।

अथवा आकृति का एक प्रमुख ज्यामितीय गुण भी हो सकता है।

ऐसा ही एक गुणधर्म यह है कि जब चतुर्भुज, चक्रीय चतुर्भुज होता है। 628 सामान्य संवत में भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त (598–668 सामान्य संवत) ने **चक्रीय चतुर्भुज** के लिए एक अद्भुत सूत्र का अन्वेषण किया।

© NCERT not to be republished



चित्र 6.28 — चक्रीय चतुर्भुज

सूत्रानुसार यदि एक चक्रीय चतुर्भुज की चारों भुजाओं की लंबाई a, b, c, d और अर्द्ध-परिमाप $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ है तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ होगा।

यह एक अद्भुत और आकर्षक सूत्र है।
क्या यह सूत्र हमें त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए हीरोन सूत्र का स्मरण नहीं करवाता है?

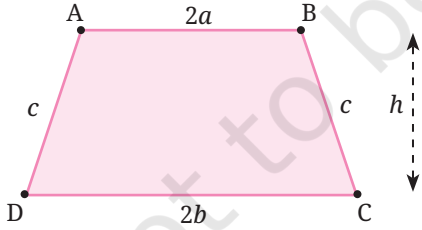
हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि यह सूत्र विभिन्न विशेष विषयों में सही ढंग से कार्य करता है।

उदाहरण 6 — आयत के विषय में ब्रह्मगुप्त के सूत्र को सत्यापित कीजिए। सभी आयत चक्रीय होते हैं, अत: ब्रह्मगुप्त का सूत्र लागू होना चाहिए।

मान लीजिए कि आयत की भुजाएँ a और b हैं तब सूत्र $s = \frac{1}{2}(2a+2b) = a+b$ होगा, अत: सूत्रानुसार —

क्षेत्रफल $= \sqrt{(a+b-a)(a+b-b)(a+b-a)(a+b-b)} = \sqrt{ab \cdot ab} = ab$, जो कि सत्य है। अन्य विशेष स्थितियों में इस सूत्र का उपयोग करके देखिए।

उदाहरण 7 — समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज के विषय में ब्रह्मगुप्त के सूत्र का सत्यापन कीजिए।



चित्र 6.29 समद्विबाहु समलंब

सभी समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज चक्रीय होते हैं, अत: ब्रह्मगुप्त सूत्र लागू होना चाहिए। आकृति का परिमाप $2a + 2b + 2c$ है तो $s = a + b + c$ है। अत: सूत्र के अनुसार क्षेत्रफल $\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-c)(s-c)}$ होना चाहिए।

चूँकि $s - 2a = c + b - a$,

$s - 2b = c + a - 2b$, $s - c = a + b$ है,

उपरोक्त सूत्र सरल होकर

$(a+b)\sqrt{(c+b-a)(c+a-b)} = (a+b)\sqrt{c^2-(b-a)^2}$ होता है।

© NCERT not to be republished

यदि हम आधार CD पर B से एक लंब बनाने की कल्पना करें तो उसकी लंबाई (बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय को स्मरण करते हुए) $\sqrt{c^2-(b-a)^2}$ होती है। अत: क्षेत्रफल $(a+b)h$ होता है। ठीक यही सूत्र हमें तब भी प्राप्त होता है जब हम स्मरण करते हैं कि समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल समांतर भुजाओं के योग का आधा और उनके मध्य की दूरी के गुणनफल के समान होता है।

गणित में विशेष स्थितियाँ और व्यापकीकरण

'विशेष स्थिति' की अवधारणा प्राय: उच्च गणित में देखने को मिलती है। एक विशेष स्थिति तब उत्पन्न होती है जब हम कोई अतिरिक्त शर्त को सम्मिलित करने पर व्यापक परिणाम प्राप्त होता है। हम यहाँ कुछ उदाहरण प्रस्तुत कर रहे हैं।

व्यापक परिणाम को विशेष स्थिति का **व्यापकीकरण** भी कहा जाता है। व्यापकीकरण की प्रक्रिया गणित का एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण भाग होती है।

उदाहरण — वर्ग, आयत का एक विशेष रूप (गुण) होता है।

अत: वर्ग के क्षेत्रफल का सूत्र ($A = a^2$), आयत के क्षेत्रफल के सूत्र ($A = ab$) की विशेष स्थिति होती है, यदि $b = a$ है।

इसी प्रकार, वर्ग के परिमाप का सूत्र, आयत के परिमाप के सूत्र का एक विशेष गुण अर्थात स्थिति है।

उदाहरण — एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज की भी विशेष स्थिति है।

अत: सभी समकोण त्रिभुजों से संबधित किसी भी प्रमेय से हम एक विशेष स्थिति निकाल सकते हैं, जो समद्विबाहु समकोण त्रिभुज पर लागू होती है।

एक समकोण त्रिभुज ABC लीजिए, जिसमें $\angle C = 90°$ है। अब हमारे पास $a^2 + b^2 = c^2$ होगा (यह बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय है)। आइए, इसका एक विशेष उदाहरण लें, जिसमें $a = b$ हो (यह त्रिभुज के समद्विबाहु होने के अनुरूप है)। इस प्रकार, हमें $a^2 + b^2 = c^2$ अर्थात $c^2 = 2a^2$, फलत: $c = a\sqrt{2}$ प्राप्त होगा। व्यापक प्रमेय ($a^2 + b^2 = c^2$) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज ($a = b$ के साथ) के लिए इस विशेष स्थिति ($c = a\sqrt{2}$) में परिवर्तित हो जाती है।

यहाँ पर एक अन्य उदाहरण दिया गया है। बीजगणित से निम्नलिखित सर्वसमिकाओं की तुलना कीजिए —

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

क्या आपने ध्यान दिया कि पहली सर्वसमिका, दूसरी सर्वसमिका की विशेष स्थिति है (दूसरी सर्वसमिका में $c = 0$ रखें) और दूसरी सर्वसमिका, पहली सर्वसमिका का एक व्यापकीकरण है।

आगामी वर्षों में आपको विशेष स्थितियों और व्यापकीकरण के कई अन्य उदाहरण देखने को मिलेंगे।

© NCERT not to be republished

ब्रह्मगुप्त का सूत्र हीरोन के सूत्र का व्यापकीकरण

हीरोन और ब्रह्मगुप्त के सूत्र में दिखने वाली समानता मात्र कोई संयोग नहीं है। कैसे? ब्रह्मगुप्त का सूत्र, हीरोन के सूत्र का व्यापकीकरण है अर्थात हम हीरोन के सूत्र को ब्रह्मगुप्त के सूत्र का एक विशेष रूप मान सकते हैं।

भुजा a, b और c वाले त्रिभुज को चतुर्भुज ABCD की विशेष स्थिति माना जा सकता है। इसमें चौथी भुजा की लंबाई शून्य ($d = 0$) है। अत: AB = a, BC = b, CD = c है। इसका अर्थ है कि शीर्ष A और D सम्पाती हैं।

(यदि शीर्ष ग्रह का प्रतिनिधित्व करते हैं तो यह दो ग्रहों के आपस में टकराने और एक विशाल ग्रह के निर्माण की स्थिति होगी। वास्तव में सौरमंडल के प्रारंभिक इतिहास में ऐसा घटित हुआ था।)

चूँकि कोई भी त्रिभुज चक्रीय होता है (यदि कोई भी तीन बिंदु एक सीधी रेखा में नहीं हैं तो हम उनके द्वारा एक वृत्त की रचना कर सकते हैं), यह चतुर्भुज भी चक्रीय है। अत: ब्रह्मगुप्त का सूत्र इस चतुर्भुज पर भी लागू होना चाहिए।

आइए, देखते हैं कि इससे क्या परिणाम निकलता है। सर्वप्रथम हम चतुर्भुज पर एक अर्द्ध-परिमाप ज्ञात करते हैं (ध्यान रहे कि $d = 0$ है) —

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c+0) = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

हम देखते हैं कि s दिए गए त्रिभुज के अर्द्ध-परिमाप के समान है। अब ब्रह्मगुप्त सूत्र के अनुसार,

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ चूँकि d = 0 है।

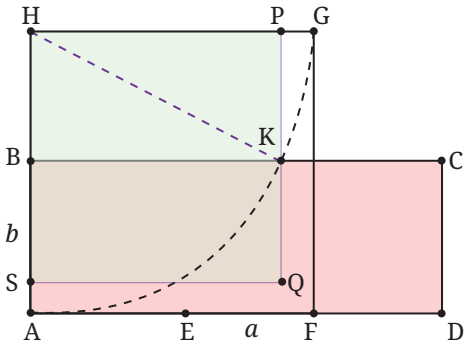
यही है हीरोन सूत्र!

इस प्रकार, हीरोन के सूत्र को ब्रह्मगुप्त के सूत्र की एक विशेष स्थिति माना जा सकता है।

6.9 आयत को वर्ग बनाना

प्राचीन काल में 'किसी आकृति को वर्ग' करने का अर्थ था, उस 'आकृति के क्षेत्रफल में समान क्षेत्रफल वाली एक वर्गाकार आकृति बनाना'। आकृति आयत, त्रिभुज या वृत्त हो सकती थी। हम यहाँ पर देखते हैं कि कैसे प्रारंभिक भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने एक आयत को वर्गाकार बनाया। उनके *शुल्बसूत्र* (800 सामान्य संवतपूर्व) से प्राप्त यह रचना दर्शाती है कि a इकाई और b इकाई भुजाओं वाले आयत को वर्गाकार कैसे बनाया जाए जबकि ($a > b$) है। इसका अर्थ है कि हमें एक वर्गाकार आकृति बनानी होगी, जिसका क्षेत्रफल ab वर्ग इकाई होगा। यहाँ बौधायन की रचना का एक सरलीकृत रूप दिया गया है (चित्र 6.30) —

© NCERT not to be republished



चित्र 6.30— आयत ABCD जिसकी भुजाएँ AD = a, AB = b हैं

- दिया गया है कि एक आयत ABCD जिसमें AD = a, AB = b जहाँ पर $a > b$ है।
- AD पर बिंदु E इस प्रकार निर्धारित कीजिए कि AE = AB हो।
- ED के मध्यबिंदु AF का पता लगाइए।
- वर्ग AFGH खींचिए, जिसकी भुजा AF हो और शीर्ष H, AB को आगे बढ़ाने पर प्राप्त हो।
- H को केंद्र मानकर चाप AG खींचिए। मान लीजिए कि चाप AG भुजा BC को K पर काटती है।
- K से होकर AH के समांतर एक रेखा खींचिए। मान लीजिए कि यह रेखा GH को P पर काटती हो।
- HP को भुजा मानकर वर्ग HPQS बनाइए तब वर्ग HPQS का क्षेत्रफल आयत ABCD के क्षेत्रफल के समान होगा।

यह समझने का प्रयत्न कीजिए कि यह विधि कैसे काम करती है। इससे आपको ज्ञात होगा कि यह सूत्र $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ है।

*यह विधि लाभदायक क्यों है?

आइए, चित्र 6.30 का संदर्भ लेते हैं। AE = b से हमें $AF = \frac{AE + AD}{2} = \frac{a+b}{2}$ प्राप्त होता है।

अत: $HG = \frac{a+b}{2} = HK$, क्योंकि HK वृत्त की त्रिज्या है।

दूसरा, $BH = AH - AB = AF - AB = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$ है।

अब हम समकोण त्रिभुज HKP पर विचार करते हैं। बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके हमें यह प्राप्त होता है कि —

$$HP^2 = HK^2 - BH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab \text{ है।}$$

इसलिए वर्ग HPQS और आयत ABCD दोनों के क्षेत्रफल समान हैं।

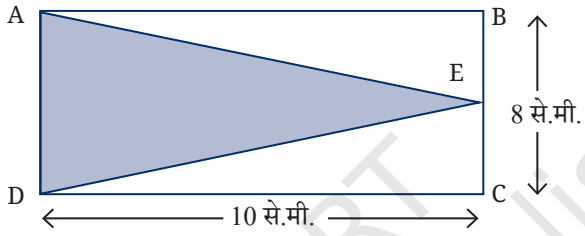
© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

किसी दिए गए त्रिभुज से वर्ग बनाने के लिए आप किस प्रक्रिया का उपयोग करेंगे? यहाँ पर आपको एक ऐसा वर्ग बनाना है जिसका क्षेत्रफल किसी दिए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान हो। ध्यानपूर्वक विचार कीजिए कि आप इसे कैसे करेंगे।

प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.31 में त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—

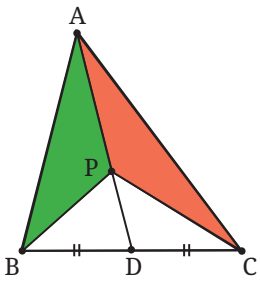


चित्र 6.31

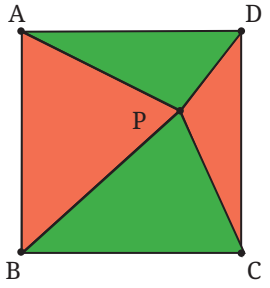
2. एक समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाएँ 40 सेंटीमीटर और 20 सेंटीमीटर हैं। यदि इसकी दोनों असमांतर भुजाएँ समान हों और प्रत्येक 26 सेंटीमीटर हो तो समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाओं की लंबाई 8 सेंटीमीटर और 11 सेंटीमीटर है तथा उसका परिमाप 32 सेंटीमीटर है।
4. एक त्रिभुजाकार भूखंड की भुजाओं का अनुपात 3:5:7 है और इसका परिमाप 300 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक समचतुर्भुज के एक विकर्ण की लंबाई दूसरे विकर्ण की लंबाई से दोगुनी है। यदि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 128 वर्ग सेंटीमीटर है तो इसके छोटे विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। P और Q भुजा AB पर स्थित कोई दो बिंदु हैं तो ΔPCD और ΔQCD के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. समांतर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर स्थित कोई O बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि PSO और PQO त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हैं।
8. यदि एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्यबिंदु को क्रम से जोड़ा जाए तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दिए गए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होगा। (आप सोच रहे होंगे कि क्या इस प्रकार बना चतुर्भुज हमेशा समांतर चतुर्भुज ही होता है। यदि हाँ, तो क्यों? इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर चतुर्भुज वाले अध्याय में मिलेंगे।)

© NCERT not to be republished

9. ΔABC में BC का मध्यबिंदु D है (चित्र 6.32)। माध्यिका AD खींची गई है। बिंदु P बिंदु रेखाखंड AD पर स्थित कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि ΔABP का क्षेत्रफल ΔACP के क्षेत्रफल के समान है।



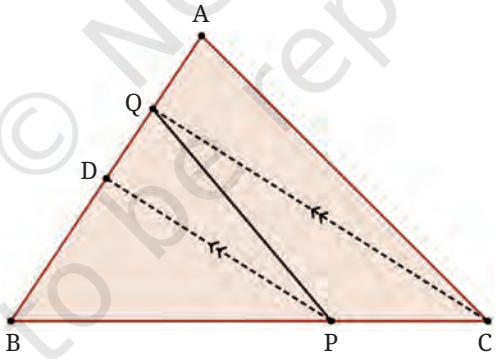
चित्र 6.32



चित्र 6.33

10. एक वर्ग ABCD दिया गया है, माना कि P इसके अंदर एक बिंदु है। PA, PB, PC और PD को मिलाइए (चित्र 6.33)। लाल रंग के क्षेत्र (ΔPAB और ΔPCD) तथा हरे रंग के क्षेत्र (ΔPBC और ΔPDA) के क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

11. ΔABC में D भुजा AB का मध्यबिंदु है। P भुजा BC पर स्थित कोई बिंदु है और Q भुजा AB पर स्थित एक बिंदु है, जहाँ CQ || PD है। PQ को मिलाया गया है (चित्र 6.34)। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल (ΔBPQ) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC) है।



चित्र 6.34

6.10 वृत्त का क्षेत्रफल

वृत्त एक अत्यंत सरल आकृति है। यदि हमारे घर एक रस्सी है और उसे बाँधने के एक खूँटी दी गई है तो इसे बनाना सरल है। मनुष्य सहस्त्रों वर्षों से अपनी बस्तियों, इमारतों और औजारों में वृत्ताकार आकृति का उपयोग करते आ रहे हैं।

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

मनुष्य वृत्ताकार आकृतियों का इतना अधिक उपयोग क्यों करते थे? क्या यह केवल व्यावहारिक कारणों से था अथवा इसके पीछे अन्य कारण भी हो सकते थे? मनुष्य ने वृत्ताकार आकृतियों के लिए किस प्रकार की वस्तुएँ अन्वेषित की हैं?

आरंभिक काल में मनुष्यों के समक्ष वृत्त द्वारा घेरे गए क्षेत्रफल A को जानने की चुनौती थी। उदाहरण के लिए, उन्हें यह पता लगाने की आवश्यकता रही होगी कि एक बेलनाकार मीनार (जिसके अनुप्रस्थ काट वृत्ताकार हो) में कितना अनाज रखा जा सकता है अथवा एक वृत्ताकार बगीचा अथवा वृत्ताकार भवन कितना क्षेत्रफल घेरता है। उन्हें इस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता अपने शहरों को बनाने की योजना बनाने, कर प्रबंधन आदि के लिए होती थी।

प्रारंभिक समाजों में यह बात भली-भाँति समझ में आती थी कि क्षेत्रफल A परिधि C के **वर्ग** के समानुपाती होता है। आइए, देखते हैं कि ऐसा क्यों होता है।

- मान लीजिए कि हमें एक वर्ग दिया गया है। इसकी भुजा a है और इसका परिमाप $P = 4a$ है तथा क्षेत्रफल $A = a^2$ है, अत: अनुपात $P^2 : A = (4a^2) : a^2 = 16a^2 : a^2 = 16 : 1$ है। इसलिए सभी वर्गों के लिए अनुपात $P^2 : A = 16 : 1$ है। यह अनुपात वर्ग के आकार पर निर्भर नहीं करता है — यह सभी वर्गों के लिए समान है।
- एक समबाहु त्रिभुज पर चर्चा कीजिए, जिसकी भुजा a है। इसका परिमाप $P = 3a$ और इसका क्षेत्रफल $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ है। अत: $P^2 : A = (3a)^2 : \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9a^2 : \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 36 : \sqrt{3}$ होगा।

अत: सभी समबाहु त्रिभुजों के लिए $P^2 : A$ का अनुपात $36 : \sqrt{3}$ है। यह अनुपात समबाहु त्रिभुज के आकार पर निर्भर नहीं करता, अपितु यह सभी समबाहु त्रिभुजों के लिए समान है।

- इसी प्रकार, जैसे हम विभिन्न आकृतियों के लिए पैमाना बदलते हैं, अनुपात $P^2 : A$ स्थिर रहता है। अनुपात का मान केवल आकृति पर निर्भर करता है, उसके पैमाने पर नहीं करता है।

इस तर्क के आधार पर हम कह सकते है कि वृत्त के लिए भी C = परिधि और A = क्षेत्रफल है तो $C^2 : A$ का अनुपात कोई अचर होना चाहिए। परंतु क्या यह अचर अथवा स्थिरांक है?

1500 सामान्य संवत पूर्व से भी बहुत पहले ही बेबीलोनियों ने वास्तविक माप के माध्यम से यह ज्ञात कर लिया था कि C^2 स्थिरांक 12 के लगभग समान है अर्थात $C^2 : A \approx 12 : 1$ है। अत: वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र $A \approx \frac{C^2}{12}$ था।

© NCERT not to be republished

लगभग 1500 सामान्य संवत पूर्व प्राचीन मिस्रवासियों ने एक और ऐसा सूत्र तैयार किया, जो उपर्युक्त वर्णित सूत्र से मेल खाता है परंतु अधिक उपयुक्त क्षेत्रफल $A \approx \left(\frac{8d}{9}\right)^2$ है, जहाँ पर d वृत्त का व्यास है।

चूँकि $d = 2r$ है, इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$A \approx \left(\frac{64}{81}\right)4r^2$ अर्थात क्षेत्रफल $A \approx \left(\frac{256}{81}\right)r^2$

रोचक तथ्य यह है कि यही सूत्र बौधायन *शुल्बसूत्र* (800 सामान्य संवत पूर्व) में एक वर्ग के निर्माण की ज्यामितीय विधि के माध्यम से प्रकट होता है, जिसका क्षेत्रफल लगभग एक वृत्त के समान है।

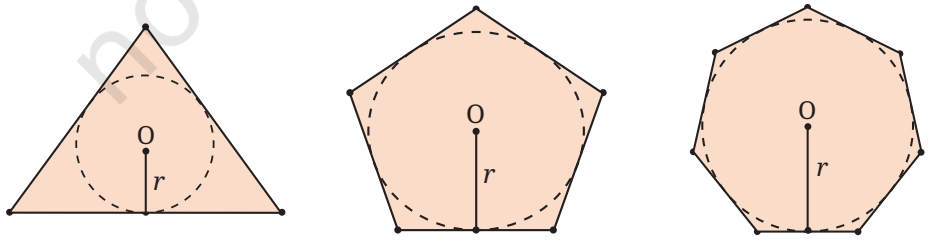
वर्तमान में उपयोग में होने वाला परिचित सूत्र

प्राचीन यूनानी यह भी जानते थे कि $\frac{A}{r^2}$ एक अचर अर्थात स्थिरांक है किंतु वे यह नहीं जानते थे कि अचर क्या होता है। दो अलग-अलग सभ्यताओं ने इस अचर का मान लगभग $\frac{256}{81}$ माना।

अंतत: 250 सामान्य संवत पूर्व में आर्किमिडीज ने दर्शाया कि स्थिरांक π है। (अर्थात वही अचर जो वृत्त के परिमाप के सूत्र में आता है), अत: $A = \pi r^2$ है। उन्होंने सूत्र को इस प्रकार व्यक्त किया कि "वृत्त का क्षेत्रफल एक समकोण त्रिभुज के क्षेत्रफल के समान होता है, जिसकी भुजाएँ वृत्त की त्रिज्या और परिधि के समान होती हैं।"

वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ परिधि $\times$ त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

आर्किमिडीज द्वारा यह प्रमाण बहुत ही बुद्धिमत्तापूर्ण ढंग से दिया गया है। यह सभी नियमित बहुभुजों के एक साझा गुण पर आधारित है — एक नियमित बहुभुज द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल बहुभुज के भीतर ठीक से बैठ जाने वाले वृत्त की परिधि के आधे और त्रिज्या के गुणनफल के समान होता है (चित्र 6.36)। (इस सूत्र का प्रमाण त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र के प्रमाण का विस्तार है, जिसे उसके अंतर्वृत्त की त्रिज्या के संदर्भ में व्यक्त किया जाता है।)

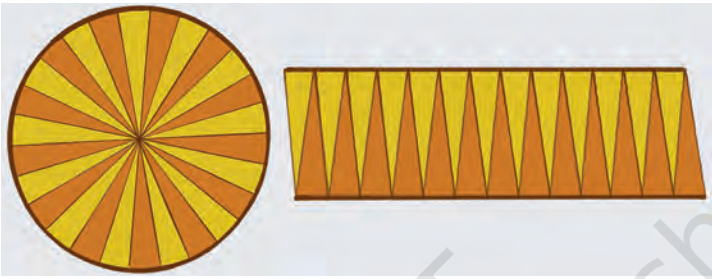


चित्र 6.36 — नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ *बहुभुज का परिमाप* $\times$ *त्रिज्या*

© NCERT not to be republished

आर्किमिडीज ने एक 'विचार प्रयोग' किया, उन्होंने स्वयं से पूछा कि यदि नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या बढ़ती जाती है तो क्या होता है? उन्होंने विभिन्न विवरणों पर कार्य किया और इस परिणाम पर पहुँचे कि $A = \pi r^2$ है।

यह संभवत: सबसे दृश्यमान और सरलता से समझ में आने वाला विवरण है कि क्यों त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है। वृत्त के क्षेत्रफल का यह सुंदर दृश्यांकन सर्वप्रथम 'नीलकंठ सोमयाजी' (लगभग 1500) द्वारा *आर्यभटीय* पर की गई अपनी टिप्पणी में किया गया है।



(क) (ख)

चित्र 6.37 — टुकड़ों को पुनर्व्यवस्थित करके एक समांतर चतुर्भुज जैसी रचना निर्मित की जा सकती है

जैसे-जैसे टुकड़े छोटे होते जाते हैं (चित्र 6.37(ख) में), चाप एक रेखा के और पास होती जाती हैं। इस प्रकार, आगे चलकर यह आकृति एक समांतर चतुर्भुज के आकार की बन जाती है, जिसमें —

आधार = परिधि का आधा (क्यों?) = πr,

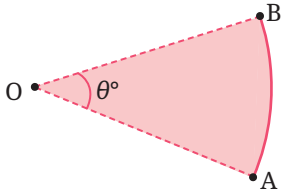
ऊँचाई = त्रिज्या r है।

इससे यह तर्क देने में सहायता मिलती है कि वृत्त का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के समान होता है।

वृत्त का क्षेत्रफल = समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = πr^2

6.10.1 वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

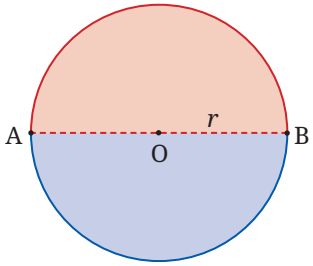
वृत्त का त्रिज्यखंड वह क्षेत्र होता है जो एक चाप और उसके शीर्षबिंदुओं को जोड़ने वाली दोनों त्रिज्याओं से मिलकर बनता है।



चित्र 6.38 — एक वृत्त का त्रिज्यखंड

वृत्त के त्रिज्यखंड के भीतर का क्षेत्रफल उसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है जिस प्रकार हमने वृत्ताकार चाप की लंबाई ज्ञात की थी। चित्र 6.39 और 6.40 का अवलोकन कीजिए।

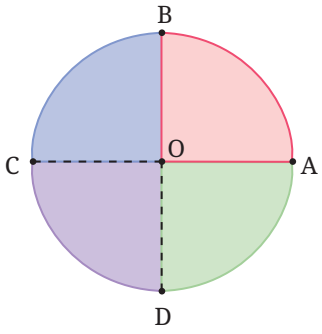
© NCERT not to be republished



चित्र 6.39 — अर्द्धवृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल

समरूपता से हम देखते हैं कि अर्द्धवृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल $\left(\frac{180}{360}\right)^{\text{th}} = \frac{1}{2}$ वृत्त का क्षेत्रफल अर्थात $\frac{1}{2}\pi r^2$ है।

इस परिणाम को समझने के लिए हम वृत्त की परावर्तन समरूपता का उपयोग कर सकते हैं।



चित्र 6.40 — चतुर्थांश वृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल

समरूपता से हम देखते हैं कि एक-चौथाई अर्थात चतुर्थांश वृत्ताकार चक्रिका (डिस्क) का क्षेत्रफल $\left(\frac{90}{360}\right)^{\text{th}} = \frac{1}{4}$ वृत्त का क्षेत्रफल अर्थात $\frac{1}{4}\pi r^2$ है।

हम परिणाम को समझने के लिए वृत्त की चौथाई समरूपता का भी उपयोग कर सकते हैं।

उपरोक्त का विश्लेषण करने पर हमें व्यापक त्रिज्यखंड के लिए त्वरित वांछित सूत्र प्राप्त हो जाता है।

चक्रिका के त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल का सूत्र उसके द्वारा वृत्त के केंद्र पर बनाए गए कोण के संदर्भ में —

यदि चाप AB है और यह वृत्त के केंद्र O पर θ° का कोण बनाती है तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल होगा —

$$\pi r^2 \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

ध्यान दीजिए कि हमने इन सूत्रों को प्राप्त करने के लिए वृत्त की घूर्णन सममिति का उपयोग कैसे किया है।

त्रिज्यखंड से संबंधित, वृत्ताकार क्षेत्र का एक भाग होता है, जिसे **खंड** कहते हैं। वृत्त का खंड वह क्षेत्र होता है जो एक चाप और उसके शीर्षबिंदुओं को मिलाने वाली जीवा से मिलकर बनता है।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 6.3

किसी अन्य निर्देश की अनुपस्थिति में, सन्निकटन $\pi = \frac{22}{7}$ का उपयोग कीजिए।

1. यदि त्रिज्यखंड का कोण 60° है तो 7 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. उस वृत्त के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 44 सेंटीमीटर है।
3. एक घड़ी की मिनट की सूई की लंबाई 7 सेंटीमीटर है। 10 मिनट में सूई द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।
4. 10 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा केंद्र पर 90° का कोण बनाती है। संगत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए— (i) लघु त्रिज्यखंड (जो मध्यबिंदु पर 90° का कोण बनाता है) (ii) दीर्घ त्रिज्यखंड (जो मध्यबिंदु पर 270° का कोण बनाता है)। ($\pi \approx 3.14$ का उपयोग कीजिए।)
5. 15 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले एक वृत्त की एक जीवा वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण बनाती है। वृत्त के संगत लघु एवं दीर्घ खंडों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक कार में दो वाइपर लगे हैं जो एक-दूसरे को आपस में आच्छादित नहीं करते हैं। प्रत्येक वाइपर के ब्लेड की लंबाई 28 सेंटीमीटर है और यह 120° के कोण पर घूमता है। ब्लेड के प्रत्येक चक्र में साफ किए गए कुल क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।

*7. त्रिज्या r वाले एक वृत्त की एक जीवा वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण बनाती है। दर्शाइए कि वृत्त के संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल $r^2\left(\frac{\neq}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ के समान है।

*8. एक समबाहु त्रिभुज r त्रिज्या वाले एक वृत्त में अंतर्निहित है। दर्शाइए कि त्रिभुज के क्षेत्रफल और वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.413$ के समान है।

*9. एक वर्ग r त्रिज्या वाले एक वृत्त में अंतर्निहित है। दर्शाइए कि वर्ग के क्षेत्रफल और वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात $\frac{2}{\pi} \approx 0.637$ के समान है।

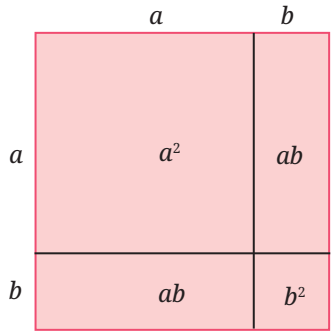
*10. एक r त्रिज्या वाले वृत्त में एक षट्भुज अंतर्निहित है। दर्शाइए कि षट्भुज के क्षेत्रफल और वृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = 0.827$ के समान है। क्या आप समझ सकते हैं कि इसका उत्तर, प्रश्न 8 के उत्तर के ठीक दोगुना क्यों है?

© NCERT not to be republished

अंतिम प्रश्नावली

नीचे दिए गए प्रश्नों में किसी अन्य निर्देश की अनुपस्थिति में, π का सन्निकट मान $\frac{22}{7}$ उपयोग कीजिए।

1. बीजगणित में सर्वसमिकाओं को कभी-कभी क्षेत्रफल के संबंधों के रूप में दर्शाया जा सकता है। उदाहरण के लिए—



चित्र 6.41 — एक सर्वसमिका के क्षेत्रफल का प्रतिदर्श

प्रदर्शित चित्र सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ के अनुरूप है। क्या आप बता सकते हैं, कैसे?

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ और $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ सर्वसमिकाओं के अनुरूप आकृतियाँ बनाइए।

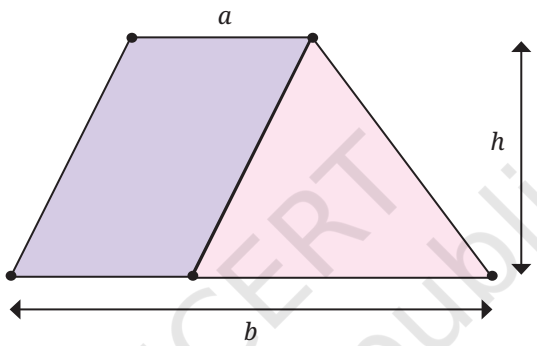
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 40 सेंटीमीटर है। इसकी समान भुजाएँ 15 सेंटीमीटर लंबी हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का आधार 10 सेंटीमीटर है और इसका क्षेत्रफल 60 वर्ग सेंटीमीटर है। समान भुजाओं की लंबाई क्या होगी?
4. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 54 वर्ग सेंटीमीटर है। इसकी एक भुजा की लंबाई 12 सेंटीमीटर है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 2:3:4 है और इसका परिमाप 45 सेंटीमीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई 7 सेंटीमीटर, 24 सेंटीमीटर और 25 सेंटीमीटर है। त्रिभुज का क्षेत्रफल दो भिन्न-भिन्न विधियों से ज्ञात कीजिए।
7. यदि किसी साइकिल के पहिए का व्यास 60 सेंटीमीटर है तो पहिए के 100 बार घूर्णन के पश्चात साइकिल चालक कितनी दूरी तय करेगा?
8. उस वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 66 सेंटीमीटर है।

© NCERT not to be republished

9. एक कार के पहिए की बाहरी त्रिज्या 28 सेंटीमीटर है। पहिए के एक पूर्ण घूर्णन के पश्चात कार कितनी दूरी तय करती है और एक किलोमीटर की यात्रा के दौरान पहिया कितनी बार घूमता है, इसकी गणना कीजिए।

*10. दो आयतों का क्षेत्रफल और परिमाप समान है। क्या इसका अर्थ यह है कि वे दोनों एक-दूसरे के सर्वांगसम हैं।

11. आप जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आधार × ऊँचाई होता है। इस सूत्र और आकृति का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल समांतर भुजाओं के योग का आधा और ऊँचाई का गुणनफल, अर्थात $\frac{1}{2}(a + b)h$ होता है।



चित्र 6.42 — समलंब चतुर्भुज — भुजाएँ a और b, ऊँचाई h

12. एक समलंब चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभाजित करके दर्शाइए कि इसका क्षेत्रफल समांतर भुजाओं के योग का आधा और ऊँचाई का गुणनफल होता है (जैसा कि सूत्र में ऊपर दिया गया है)।

13. दर्शाइए कि समलंब चतुर्भुज की दो समान प्रतियों का उपयोग करके समांतर चतुर्भुज कैसे निर्मित कर सकते हैं। इससे हमें समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र कैसे प्राप्त होगा?

14. दर्शाइए कि पतंग का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है। इन दोनों तरह से दर्शाइए— (i) बीजगणित का उपयोग करके (ii) ज्यामिति का उपयोग करके

15. सर्वांगसम आकृतियों को आपस में जोड़ने से संबंधित तीन प्रश्न दिए गए हैं—

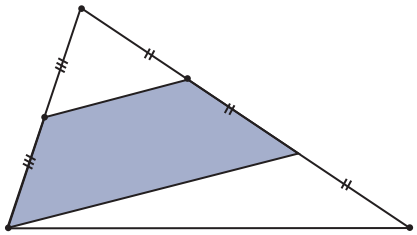
    (i) आयत ABCD की भुजाएँ a और b हैं और आयत PQRS की भुजाएँ $2a$ और $2b$ हैं। दर्शाइए कि PQRS का क्षेत्रफल ABCD के क्षेत्रफल का चार गुना है। क्या इसका अर्थ यह है कि आयत ABCD की चार प्रतिआकृतियाँ आयत PQRS में समाहित हो सकती हैं? परीक्षण करके देखिए!

© NCERT not to be republished

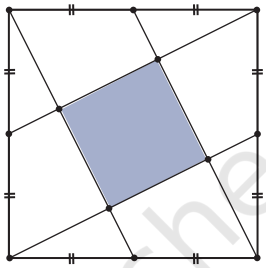
(ii) ΔABC की भुजाएँ a, b, c हैं और ΔPQR की भुजाएँ $2a$, $2b$, $2c$ हैं। दर्शाइए कि ΔPQR का क्षेत्रफल ΔABC के क्षेत्रफल का चार गुना है। क्या इसका यह अर्थ है कि ΔPQR में ΔABC की 4 प्रतिआकृतियाँ समाहित हो सकती हैं? परीक्षण करके देखिए!

(iii) ΔABC की भुजाएँ a, b, c हैं और ΔPQR की भुजाएँ $3a$, $3b$, $3c$ हैं। दर्शाइए कि ΔPQR का क्षेत्रफल ΔABC के क्षेत्रफल का नौ गुना है। क्या इसका यह अर्थ है कि ΔPQR में ΔABC की नौ प्रतिआकृतियाँ समाहित हो सकती हैं? परीक्षण करके देखिए!

*16.

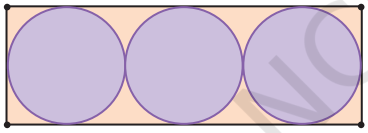


चित्र 6.43 — त्रिभुज का कितना भाग छायांकित है?

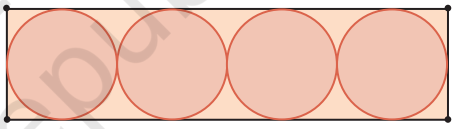


चित्र 6.44 — वर्ग का कितना भाग छायांकित है?

17.



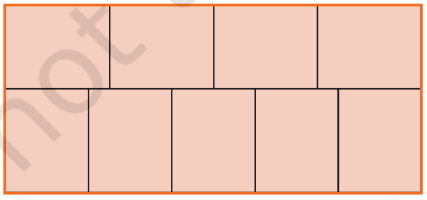
चित्र 6.45 — आयत का कितना भाग वृत्तों द्वारा आच्छादित है?



चित्र 6.46 — आयत का कितना भाग वृत्तों द्वारा आच्छादित है?

18. उपरोक्त दी गई सूचनाओं का उपयोग करते हुए दर्शाई गई विधि से आप वृत्तों द्वारा घेरे गए क्षेत्रफल के विषय में अनुमान लगाइए। आप अपने अनुमान का विशिष्ट स्थितियों के लिए परीक्षण कीजिए— 10 वृत्त, 20 वृत्त, 50 वृत्त। आप अपने अनुमान को सिद्ध कीजिए।

*19.

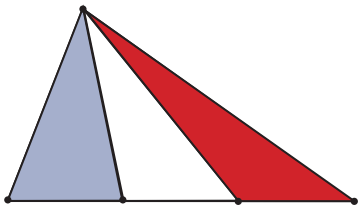


चित्र 6.47 — नौ एक समान आयत एक साथ रखे हुए हैं

चित्र में नौ एक समान आयतों को जोड़कर एक बड़ा आयत निर्मित किया गया है, जिसका क्षेत्रफल 72 वर्ग सेंटीमीटर है। प्रत्येक छोटे आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

*20.

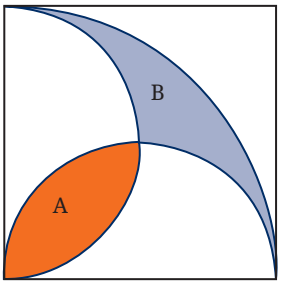


चित्र 6.48 — एक शीर्ष से विपरीत भुजा के विभाजन बिंदुओं तक जाने वाली रेखाएँ

दर्शाइए कि छायांकित नीले त्रिभुज और छायांकित लाल त्रिभुज का क्षेत्रफल समान है।

नीले त्रिभुज को कुछ टुकड़ों (भागों) में काटने और उन भागों को इस प्रकार से व्यवस्थित करने की विधि ढूँढ़िए, जिससे लाल त्रिभुज आच्छादित हो जाए।

*21.

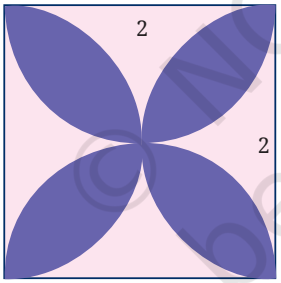


चित्र 6.49 — एक चतुर्थांश वृत्त और दो अर्द्धवृत्त

चित्र में एक वर्ग के भीतर एक चतुर्थांश वृत्त दर्शाया गया है। इसका केंद्र एक शीर्ष पर है और यह दो आसन्न शीर्षों से होकर गुजरता है। दो आसन्न भुजाओं पर व्यास के रूप में दो अर्द्धवृत्त हैं। ये छायांकित क्षेत्र A और B बनाते हैं।

दर्शाइए कि A और B के पास समान क्षेत्र है।

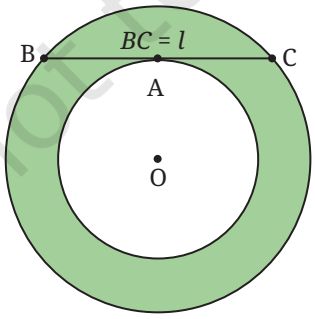
*22.



चित्र 6.50

चित्र 6.50 में 2 इकाई भुजा वाले वर्ग के भीतर चार अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं। इन अर्द्धवृत्तों के केंद्र, भुजाओं के मध्यबिंदु हैं। ये चार पंखुड़ियों वाला एक पुष्प बनाते हैं (जिन्हें नीले रंग से दर्शाया गया है)। इस पुष्प का परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

*23.

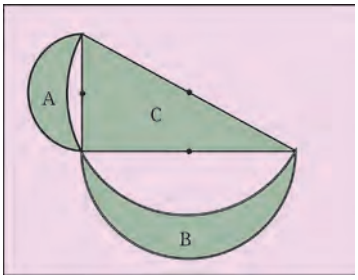


चित्र 6.51

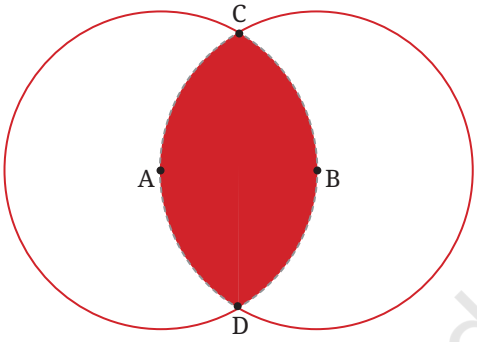
चित्र 6.51 में हम दो सकेंद्रिय वृत्तों में देखते हैं कि उनका एक ही केंद्र O है। बड़े वृत्त की एक जीवा BC खींची गई है जो छोटे वृत्त को बिंदु A पर स्पर्श करती है। BC की लंबाई l है। दर्शाइए कि दोनों वृत्तों के मध्य स्थित हरे भाग का क्षेत्रफल $\frac{1}{4}\pi l^2$ है।

© NCERT not to be republished

*24. चित्र 6.52 में समकोण त्रिभुज की भुजाओं पर अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं, जैसा आकृति में दर्शाया गया है। दर्शाइए कि क्षेत्रफल (A) + क्षेत्रफल (B) = क्षेत्रफल (C) है।



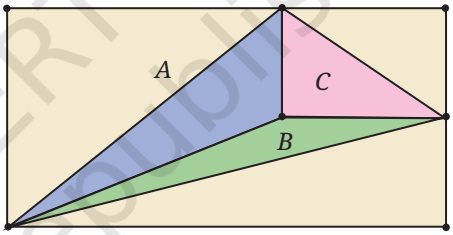
चित्र 6.52



चित्र 6.53—त्रिज्या r के दो सर्वांगसम वृत्त

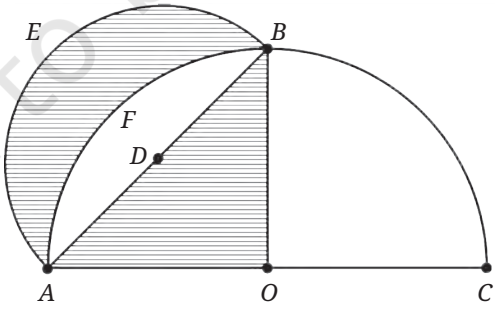
*25. चित्र 6.53 में दो वृत्त दर्शाए गए हैं जो एक-दूसरे के केंद्रों से होकर गुजरते हैं। दोनों वृत्तों द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल उभयनिष्ठ त्रिज्या r के पदों में ज्ञात कीजिए।

*26. चित्र 6.54 में हम एक आयत के भीतर तीन त्रिभुज देख रहे हैं। दर्शाइए कि इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल $\frac{2(A+C)(B+C)}{C}$ है।



चित्र 6.54

*27. चित्र में हम एक-चौथाई वृत्त, एक अर्द्धवृत्त और एक त्रिभुज द्वारा निर्मित दो छायांकित क्षेत्र देखते हैं—



चित्र 6.55

दर्शाइए कि दोनों छायांकित क्षेत्रों का क्षेत्रफल समान है।

© NCERT not to be republished

सारांश

- π सभी वृत्तों के लिए परिधि और व्यास का स्थिर अनुपात है तथा यह $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 के समान होता है।
- वृत्त की परिधि $C = 2\pi r$ होती है जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।
- वृत्त की चाप की लंबाई $l = 2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ है, जहाँ θ केंद्रीय कोण है।
- त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई होता है।
- त्रिभुज के क्षेत्रफल को उसकी भुजाओं a, b, c के पदों में व्यक्त करने का हीरोन का सूत्र — क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, जहाँ $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ है।
- वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है।
- π का अनुमानित मान — आर्किमिडीज — $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$; चोंगजी — $\pi \approx \frac{355}{113}$; आर्यभट — $\pi = 3.1416$; माधव का सटीक सूत्र — $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$
- *π एक अपरिमेय संख्या है।*
- वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $\pi r^2 \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ होता है, जिसमें θ केंद्रीय कोण है।
- ब्रह्मगुप्त द्वारा चक्रीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र भुजाओं a, b, c, d के पदों में इस प्रकार है — क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, जहाँ $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ है।

© NCERT not to be republished

7 संभावनाओं का गणित — प्रायिकता का परिचय

0920CH07

7.1 प्रायिकता क्या है?

जिस प्रकार हम लंबाई, क्षेत्रफल अथवा आयतन जैसी राशियों को मापते हैं, उसी प्रकार **प्रायिकता** भी एक प्रकार का मापन है। यद्यपि भौतिक राशियों के स्थान पर प्रायिकता का उपयोग किसी **घटना** के घटित होने की संभावना के मापन में किया जाता है। विशेष रूप से यह किसी विशेष घटना के होने को लेकर हमारी निश्चितता अथवा आत्मविश्वास को व्यक्त करने में सहायता करती है। उदाहरण के लिए, आप अपने मित्र से पूछ सकते हैं—



- क्या आज वर्षा होने वाली है?
- क्या हमारा विद्यालय कल अंतर्विद्यालयी हॉकी प्रतियोगिता में विजयी होगा?
- क्या मैं विद्यालयी सभा में प्रस्तुति देने हेतु मासिक लकी ड्रॉ में चयनित किया जाऊँगा?

[विद्यालय के सभी विद्यार्थियों के नाम कागज की पर्चियों पर लिखे जाते हैं और एक पर्ची यादृच्छिक रूप से चयनित की जाती है।]

ये घटनाएँ **यादृच्छिक** घटनाओं के उदाहरण हैं। हम इनके संभावित परिणामों से अवगत होते हैं (या तो वर्षा होगी या नहीं होगी; हमारे विद्यालय का दल हॉकी प्रतियोगिता में या तो जीतेगा या हार जाएगा या बराबरी पर रहेगा, विद्यालय-सभा में प्रस्तुति हेतु कोई एक विद्यार्थी अवश्य चयनित होगा)। परंतु हमें यह पूर्व में ज्ञात नहीं होता कि कौन-सा परिणाम निश्चित रूप से प्राप्त होगा अर्थात हर बार ऐसी घटना के घटित होने के अवसर पर **संभावना** या **यादृच्छिकता** का एक तत्त्व उपस्थित रहता है।

क्या हम इन परिणामों को 100 प्रतिशत निश्चितता के साथ बता सकते हैं? कोई भी इन प्रश्नों के विषय में **असंभव** या **निश्चित** जैसे शब्दों का उपयोग कर सकता है अथवा **कम संभव**, **अधिक संभव** या **समान रूप से संभव** जैसे वक्तव्यों का उपयोग कर सकता है। यह निर्णय संग्रहित किए गए विभिन्न प्रकार के **प्रमाणों** पर आधारित होते हैं। उदाहरण के लिए, एक मित्र यह कह सकता है कि "सूर्य तेज चमक रहा है इसलिए आज वर्षा की संभावना नहीं है", जबकि अन्य मित्र अवलोकन के पश्चात कह सकता है कि "आज बहुत गरमी है तो मेरे विचार से बाद में वर्षा हो सकती है।" दोनों ही स्थितियों में वे अपनी वर्तमान मौसम की स्थिति को आकलित कर वर्षा का अनुमान लगा रहे हैं। यह आज की वर्षा की स्थिति के लिए **व्यक्तिनिष्ठ प्रायिकता** है।

© NCERT not to be republished

जैसा कि आप पिछले पृष्ठ पर दिए गए उदाहरण में देख सकते हैं कि प्रायिकता **अनिश्चितता** अथवा **संभावना** से संबंधित है। हमारे तेजी से जटिल होते समाज की एक प्रमुख विशेषता यह है कि हमें उन प्रश्नों को हल करना होता है जिनके उत्तर निश्चित नहीं हैं अपितु उन उत्तरों के एक या उससे अधिक संभावित विकल्प होते हैं। इस प्रकार जीवन के अनेक पहलुओं में घटनाओं की प्रायिकता के **वस्तुनिष्ठ** आकलन को समझना अत्यंत महत्त्वपूर्ण है।

इस अध्याय में हम यह अध्ययन करेंगे कि प्रायिकता का आकलन और अधिक वस्तुनिष्ठ विधि अर्थात **प्रमाणों के संग्रहण** की विधि से कैसे कर सकते हैं, जिनका उपयोग किसी घटना की संभावना का वस्तुनिष्ठ आकलन करने के लिए किया जा सके। परंतु सर्वप्रथम हमें यादृच्छिकता और प्रायिकता का पैमाना जैसे कुछ शब्दों और विचारों को समझना चाहिए।

7.1.1 यादृच्छिकता क्या है?

यादृच्छिकता एक ऐसी परिस्थिति या क्रिया (जैसे सिक्के को उछालना अथवा पासा फेंकना) से संबंधित है जहाँ आप यह अनुमान नहीं लगा सकते कि निश्चित रूप से आगे क्या होगा! यद्यपि आप सभी संभावित परिणामों से अवगत हो सकते हैं किंतु आप यह नहीं कह सकते कि कौन-से परिणाम सुनिश्चित हैं। उदाहरण के लिए—

- **एक सिक्के को उछालना—** आप जानते हैं कि परिणाम चित (हेड) या पट (टेल) ही आ सकता है परंतु किसी उछाल में दोनों में से कौन-सा परिणाम आने वाला है, आप निश्चित नहीं कह सकते।
- **पासा फेंकना—** आप जानते हैं कि संभावित परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 हैं परंतु आप यह नहीं जानते कि किसी विशिष्ट अवसर में पासा फेंकने पर कौन-सा अंक आएगा।

ये प्रेक्षण (सामान्यतया प्रायिकता में इन्हें **प्रयोग** अथवा **परीक्षण** कहते हैं) अपनी अनिश्चितता के कारण यादृच्छिक कहलाते हैं। पिछले पृष्ठ पर बताया गया लकी ड्रॉ का उदाहरण, यादृच्छिक प्रेक्षण या प्रयोग का एक उदाहरण है क्योंकि इसके परिणाम का पूर्वानुमान नहीं लगाया जा सकता और प्रत्येक विद्यार्थी के चयनित होने की संभावना समान है। कुल मिलाकर आप यह बता सकते हैं कि क्या हो सकता है, न कि क्या होगा।

यादृच्छिक प्रेक्षण (रेंडम ऑब्जर्वेशन)— एक यादृच्छिक प्रयोग ऐसी प्रक्रिया है जिसकी आप पुनरावृत्ति कर सकते हैं (जैसे एक सिक्का उछालना) जहाँ प्रत्येक बार परिणाम भिन्न हो सकता है और आप परिणाम पहले से नहीं जान सकते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

ऐसी अनिश्चितता कभी-कभी उपयोगी हो सकती है! उदाहरण के लिए, एक क्रिकेट प्रतियोगिता में खिलाड़ियों का कौन-सा दल पहले बल्लेबाजी करेगा, यह निर्णय करने के लिए सिक्का उछाला जाना एक न्यायसंगत विधि है। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

© NCERT not to be republished

प्रायिकता गणित की वह शाखा है जिसमें यादृच्छिकता और किसी यादृच्छिक परिस्थिति में एक विशिष्ट परिणाम होने की संभावनाओं का अध्ययन किया जाता है।

उदाहरण के लिए, जब आप सिक्का उछालते हैं तो चित आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ और पट आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होती है, क्योंकि दोनों **समप्रायिक** अर्थात समान संभावना वाले परिणाम हैं। एक यादृच्छिक प्रयोग में प्रत्येक परिणाम की संभावना होती है परंतु आप केवल संभावनाओं को ज्ञात कर सकते हैं, सटीक परिणाम को नहीं।

क्या आपने कभी सोचा है कि ऐसा क्या है जो वर्षा जैसी घटना को यादृच्छिक बनाता है? वर्षा जैसी घटना यादृच्छिक इसलिए मानी जाती है क्योंकि यह वायुमंडल में अनेक जटिल कारकों (जैसे— तापमान, आर्द्रता, वायु प्रणाली और दबाव) पर निर्भर करती है और यह इन कारकों के प्रति इतनी संवेदनशील होती है कि पूर्ण निश्चितता से इसका अनुमान लगाना असंभव है। अत: पूर्ण रूप से यह ज्ञात करना असंभव है कि किसी निर्धारित दिन में वर्षा होगी या नहीं। वर्षा में यादृच्छिकता से अभिप्राय है कि वर्षा होने के सटीक स्थान और समय का सही अनुमान नहीं लगाया जा सकता किंतु हम आँकड़ों से निष्कर्षित प्रतिरूप और प्रायिकता के आधार पर विभिन्न स्थानों में वर्षा की प्रायिकता अथवा संभावना का आकलन कर सकते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

आप ₹1 का सिक्का उछालिए और अपने मित्र से इसके परिणाम का अनुमान लगाने को कहिए। क्या आप देखते हैं कि आपका मित्र चित या पट का अनुमान लगा सकता है परंतु निश्चित रूप से परिणाम ज्ञात नहीं कर सकता है? यही यादृच्छिकता है! सभी संभावित परिणाम ज्ञात होते हैं परंतु प्रत्येक विशिष्ट या व्यक्तिगत प्रयास अप्रत्याशित होता है।

7.1.2 प्रायिकता का पैमाना

किसी घटना के घटित होने की संभावना को प्रकट करने के लिए प्रायिकता को 0 से 1 तक के पैमाने पर मापा जाता है। यदि आपके विद्यालय द्वारा हॉकी प्रतियोगिता में विजयी होने की प्रायिकता 0.75 है तो इसका आशय यह है कि 75 प्रतिशत संभावना है कि आपका विद्यालय विजयी होगा। इसका अभिप्राय यह है कि आपके विद्यालय के विजयी होने की **अधिक संभावना** है। यदि हॉकी प्रतियोगिता में आपके विद्यालय के विजयी होने की प्रायिकता 0.5 है तो इसका आशय यह है कि आपके विद्यालय के विजयी होनी की संभावना 50 प्रतिशत है। इसका अभिप्राय यह है कि आपके विद्यालय का विजयी होना या न होना **समप्रायिक** (समान संभावना) है। दूसरी ओर यदि प्रायिकता 0 है तो इसका अर्थ यह है कि विजयी होना **असंभव** है (जैसे बिना खेले विजयी होना) और यदि प्रायिकता 1 है तो इसका आशय यह है कि आपका विद्यालय निश्चित रूप से विजयी होगा। अधिकांश घटनाओं की प्रायिकता 0 और 1 के मध्य होती है जो यह व्यक्त करता है कि उनके घटित होने की कितनी संभावना है।

© NCERT not to be republished

ताश के छह पत्तों की एक गड्डी की परिकल्पना कीजिए, जहाँ बैंगनी और हरे पत्तों की संख्या अज्ञात है। गड्डी से बैंगनी रंग के एक पत्ते को निकालने की प्रायिकता असंभव (यदि कोई भी पत्ता बैंगनी रंग का नहीं हो) से निश्चित (यदि सभी पत्ते बैंगनी रंग के हों) तक हो सकती है (चित्र 7.1 देखिए)। जिस प्रकार बैंगनी रंग के पत्तों की संख्या बढ़ती जाती है, उसी प्रकार गड्डी से एक बैंगनी रंग के पत्ते को चुनने की संभावना **प्रायिकता पैमाने** पर कम संभावित, समान संभावित से और अधिक संभावित की ओर सहजता के साथ बढ़ती जाती है। यह पैमाना हमें विभिन्न घटनाओं के घटित होने की संभावना को समझने और तुलना करने में सहायता प्रदान करता है, बिल्कुल वैसे ही जैसे हम संख्यारेखा का उपयोग करते हैं!



चित्र 7.1 — प्रायिकता पैमाना पर गड्डी से एक बैंगनी रंग के पत्ते का चयन करने की प्रायिकता

यहाँ घटनाओं और उनके घटित होने कि प्रायिकताओं के कुछ उदाहरण दिए गए हैं। चित्र 7.1 में प्रायिकता पैमाने के सापेक्ष उदाहरणों को देखिए और समझिए कि प्रायिकता को एक पैमाने पर कैसे मापते हैं।

घटना	इसका आशय है
एक पासे पर 6 से बड़ी संख्या आना	**असंभव**— पासे में केवल 1 से 6 तक की संख्याएँ होती हैं।
एक मानक पासे पर 3 आना	**कम संभावित**— परंतु असंभव नहीं है क्योंकि पासे का एक फलक 3 है।

© NCERT not to be republished

एक सिक्का उछालने पर चित आना	**समप्रायिक संभावना**— चित या पट आने की संभावना समप्रायिक अर्थात समान है।
ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी से 2 से 10 तक की संख्या वाला कोई एक पत्ता निकालना	**अधिक संभावित**— ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी में 2 से 10 तक की संख्या वाले 36 पत्ते होते हैं।
सभी लाल मिठाइयों के थैले से 1 लाल मिठाई निकालना	**निश्चित**— सभी मिठाइयाँ लाल हैं।

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नलिखित घटनाओं को एक पैमाने पर 0 (असंभव) से लेकर 1 (निश्चित) तक क्रमबद्ध कीजिए। प्रत्येक घटना को असंभव, कम संभव, समप्रायिक, अधिक संभव और निश्चित में वर्गीकृत कीजिए। कारण बताइए कि आपने प्रत्येक घटना को इस वर्ग में क्यों रखा है।
   (i) आगामी सोमवार रविवार के पश्चात आएगा।
   (ii) मुंबई में जुलाई महीने में बर्फबारी होगी।
   (iii) आज आपकी कक्षा से एक हाथी गुजरेगा।
   (iv) कल आप अपने विद्यालय में कम-से-कम एक मित्र का अभिवादन करेंगे।

7.2 प्रायिकता का वस्तुनिष्ठ मापन

वस्तुनिष्ठता के दृष्टिकोण से किसी घटना की प्रायिकता मापने की दो प्रमुख विधियाँ हैं—

1. **अनुभव से प्राप्त प्रमाणों का उपयोग**— इसमें वे आँकड़े सम्मिलित किए जा सकते हैं जो या तो एक प्रयोग को बार-बार दोहराकर संग्रहित किए गए हों अथवा पूर्व के प्रेक्षणों से प्राप्त सांख्यकीय आँकड़ों का विश्लेषण करके संग्रहित किए गए हों। दोनों ही संदर्भों में संग्रहित प्रमाणों के आधार पर घटना की सापेक्षिक आवृत्ति की गणना करके प्रायिकता का आकलन किया जाता है। हम इसे **प्रायोगिक प्रायिकता** कहते हैं।
2. **सैद्धांतिक विधियों का उपयोग**— इस विधि में यह परिकल्पित है कि सभी **संभव परिणाम** समप्रायिक हैं (जहाँ ऐसा कोई विश्वसनीय कारण उपस्थित नहीं है जिससे किसी एक परिणाम के आने की संभावना दूसरे परिणाम से अधिक है)। तब संभव परिणामों की कुल संख्या के सापेक्ष अनुकूल परिणामों की संख्या के संदर्भ में तर्क देकर प्रायिकता का आकलन किया जाता है। हम इसे **सैद्धांतिक प्रायिकता** कहते हैं।

© NCERT not to be republished

7.2.1 प्रायोगिक प्रायिकता— प्रेक्षण अथवा प्रयोग करना

प्रयोग करना, प्रायिकता के वस्तुनिष्ठ आकलन के लिए एक अन्य विधि है। एक प्रयोग में, घटना प्रयोग का फल होती है और इसे **परिणाम** कहा जाता है। एक प्रयोग में सभी संभव परिणामों के समुच्चय को **प्रतिदर्श समष्टि** (सेंपल स्पेस) कहते हैं।

प्रतिदर्श समष्टि को कोष्ठकों में सूचीबद्ध किया जाता है और इसमें लिखे सभी परिणामों को नीचे दिए अनुसार अल्पविराम द्वारा पृथक किया जाता है।

उदाहरण 1— प्रयोग— एक सिक्का उछाला गया

संभावित परिणाम— चित (H) या पट (T) (चित्र 7.2 देखिए)

प्रतिदर्श समष्टि—{H, T}

प्रयोग— एक पासा फेंका गया

संभावित परिणाम— पासे के ऊपर वाला फलक 1, 2, 3, 4, 5 या 6 बिंदुओं को दर्शाता है (चित्र 7.3 देखिए)

प्रतिदर्श समष्टि— {1, 2, 3, 4, 5, 6}



चित्र 7.2 — एक सिक्के का चित और पट



चित्र 7.3 — षट्फलकीय पासा

$$\textbf{प्रायोगिक प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के घटित होने की संख्या}}{\text{परीक्षण की कुल संख्या}}$$

उदाहरण 2— मान लीजिए, आप एक पासा 50 बार फेंकते हैं और उसमें ठीक 8 बार 4 प्राप्त होता है।

पासे पर 4 प्राप्त होने की प्रायोगिक प्रायिकता $\frac{8}{50} = 0.16$ अथवा 16% है।

हम यह भी कह सकते हैं कि 4 की **सापेक्षिक आवृत्ति** $\frac{8}{50} = 0.16$ है।

सापेक्षिक आवृत्ति आपको सैद्धांतिक पूर्वानुमानों की अपेक्षा वास्तविक आँकड़ों पर आधारित प्रायिकता को समझने में सहायता प्रदान करती है। जब आप प्रेक्षित परिणामों के साथ कार्य कर रहे होते हैं तब यह विशेषत: सांख्यिकी और आँकड़ों के विश्लेषण में उपयोगी होती है।

© NCERT not to be republished

क्या आप जानते हैं? साँप-सीढ़ी के खेल का प्रारंभ प्राचीन भारत में हुआ है। यह **ज्ञान्-चौपड़** नामक पारंपरिक खेल से विकसित हुआ है जिसका उपयोग शैक्षणिक उपकरण के रूप में किया गया था। ज्ञान्-चौपड़ का उद्देश्य नैतिक शिक्षा देना था, इसमें प्रत्येक सीढ़ी एक गुण के प्रतीक को प्रस्तुत कर रही है और प्रत्येक साँप एक अवगुण का प्रतिनिधित्व कर रहा है। खेल के दौरान यह अच्छे और बुरे व्यवहार के परिणामों को दर्शाता है। ज्ञान्-चौपड़ के विभिन्न रूप भारत के भिन्न-भिन्न भागों में पाए गए हैं।



चित्र 7.4—कपड़े पर बना एक जैन ज्ञान्-चौपड़ खेल, राष्ट्रीय संग्रहालय (19वीं शताब्दी, भारत)

7.2.2 सैद्धांतिक प्रायिकता

सैद्धांतिक प्रायिकता में किसी घटना के घटित होने की संभावना का अध्ययन, सभी संभावित परिणामों के **समप्रायिक** होने के आधार पर किया जाता है। ऐसी अपेक्षा हम एक आदर्श और **पूर्णतया न्यायसंगत स्थिति** में करते हैं। इस स्थिति में किसी प्रकार के आँकड़े या प्रयोग की आवश्यकता नहीं होती है। सामान्यतया सैद्धांतिक प्रायिकता को P (घटना) अथवा P (परिणाम) के रूप में निरूपित किया जाता है।

$$\textbf{सैद्धांतिक प्रायिकता (P)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$

उदाहरण 3— यदि आप एक आदर्श षट्फलकीय पासे को फेंकते हैं तो पासे पर 4 प्राप्त होने की सैद्धांतिक प्रायिकता क्या है?

हल—

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1 (केवल संख्या 4)

सभी संभावित परिणामों की संख्या = 6 (1 से लेकर 6 तक की संख्याएँ)

$$P(\text{पासे पर 4 प्राप्त होना}) = \frac{1}{6} = 0.1666... \approx 0.167 \text{ अथवा } 16.7\%$$

उदाहरण 4— 'PROBABILITY' शब्द से एक अक्षर का यादृच्छिक रूप से चयन किया जाता है। 'B' अक्षर के चयनित होने की प्रायिकता क्या है?

© NCERT not to be republished

हल—

अनुकूल परिणामों की संख्या = 2 ('PROBABILITY' शब्द में दो 'B' हैं)

सभी संभावित परिणामों की संख्या = 11 ('PROBABILITY' शब्द में 11 अक्षर हैं)

$$P \text{ (अक्षर 'B' को चुनना)} = \frac{2}{11} = 0.1818... \approx 0.182 \text{ अथवा } 18.2\%$$

7.2.3 प्रायिकता के माध्यम से सांख्यिकीय आँकड़ों का विश्लेषण

सांख्यिकीय आँकड़ों के माध्यम से प्रमाण संग्रह की विधि का उपयोग व्यापार जगत में विपणन, बिक्री का पूर्वानुमान लगाने, बीमा और विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान अनुसंधान में व्यापक रूप से किया जाता है।

उदाहरण 5— मान लीजिए, आप अज्ञात रूप में अपनी कक्षा के 50 विद्यार्थियों के प्रिय फल की सूचना संग्रहीत करते हैं। आइए, कल्पना करें कि परिणाम इस प्रकार होंगे— 20 विद्यार्थी आम पसंद करते हैं, 15 विद्यार्थी सेब पसंद करते हैं, 10 विद्यार्थी केला पसंद करते हैं और 5 विद्यार्थी अंगूर पसंद करते हैं।

आइए, एक खेल खेलें! मान लीजिए, हम कक्षा से यादृच्छिक रूप से एक विद्यार्थी का चयन करते हैं और उसके प्रिय फल का अनुमान लगाने का प्रयास करते हैं। उसका प्रिय फल आम होने की प्रायिकता क्या है? सांख्यिकीय प्रायिकता संग्रहित आँकड़ों पर आधारित होती है। अतः चयनित विद्यार्थी का प्रिय फल आम होने का तार्किक आकलन होगा—

आम के प्रिय फल होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या जिनका प्रिय फल आम है}}{\text{विद्यार्थियों की कुल संख्या}} = \frac{20}{50} = 0.4.$$

अतः कक्षा में यादृच्छिक चयनित विद्यार्थी का प्रिय फल आम होने की संभावना 0.4 अथवा 40% है।

अब मान लीजिए, आप विद्यार्थियों के प्रिय फलों के आधार पर संपूर्ण विद्यालय के लिए फल विक्रय करना चाहते हैं। आपको प्रत्येक प्रकार के फल की मात्रा का अनुमान लगाने की आवश्यकता होगी, जिसे 1500 विद्यार्थियों के संपूर्ण विद्यालय के लिए क्रय करना है। सामान्यत: विद्यालय के सभी विद्यार्थियों अथवा समस्त **जनसंख्या** से आँकड़े एकत्रित करना अव्यावहारिक होगा। वास्तविक जीवन में सांख्यिकीय प्रायिकता का उपयोग सामान्यत: एक **प्रतिदर्श** (सैंपल) से एकत्रित आँकड़ों पर आधारित होता है। जनसंख्या अर्थात विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या 1500 है और हमने एक कक्षा से 50 विद्यार्थियों के प्रतिदर्श से प्रमाण संग्रहित किए थे। आम के प्रिय फल होने की प्रायिकता के आकलन की गणना 0.4 की गई थी। अतः इसका अभिप्राय यह होगा कि हमें लगभग 600 आमों

© NCERT not to be republished

(1500 का 40%) को क्रय करने की आवश्यकता होगी और शेष फल, सेब, केला और अंगूर होंगे। यदि हम अपने आकलन में और अधिक आश्वस्त होना चाहते हैं तो हमें अपेक्षाकृत और अधिक बड़ा प्रतिदर्श चुनना होगा, उदाहरण के लिए, 100 विद्यार्थियों से पूछना और सुनिश्चित करना कि यह आकलन अधिक प्रतिनिधिक हो, जैसे कि विभिन्न कक्षाओं और श्रेणियों के विद्यार्थियों को सम्मिलित करना। सांख्यिकी में इस प्रक्रिया को **प्रतिचयन** (सैंपलिंग) कहा जाता है।

प्रतिचयन के विषय में और अधिक जानिए

प्रतिचयन के विषय में आप और अधिक जानना चाहते हैं? अभी तक हमने जो सीखा है, वह केवल प्रारंभ है!

जब हम प्रतिदर्श से आँकड़े एकत्रित कर रहे होते हैं तो कुछ अन्य महत्त्वपूर्ण विषयों पर विचार करना होता है, जैसे— आपका प्रतिदर्श कितना बड़ा होना चाहिए और यह कैसे सुनिश्चित किया जाए कि आपका प्रतिदर्श समस्त जनसंख्या को वास्तविक रूप से प्रस्तुत करता है। प्रतिदर्श के आकार और इसकी निष्पक्षता से यह सुनिश्चित होता है कि वह न्यायसंगत है और पक्षपात से मुक्त है और यह अपेक्षाकृत अधिक सटीक परिणाम प्राप्त करने में सहायता प्रदान करता है।

यदि आप यह जानने में रुचि रखते हैं और इस संदर्भ में और अधिक अन्वेषण करना चाहते हैं कि सांख्यिकी में प्रतिदर्श का आकार और प्रस्तुतीकरण क्यों महत्त्वपूर्ण होता है तो आप मुद्रित अथवा डिजिटल संसाधनों में इसका अध्ययन कर सकते हैं।

सारांशतः यह कहा जा सकता है कि **प्रायोगिक प्रायिकता,** परीक्षणों से संग्रहित वास्तविक आँकड़ों पर आधारित होती है, न कि अनुमानों पर। **सैद्धांतिक प्रायिकता** परिणामों के समप्रायिक होने के अनुमान (एक पूर्णतया न्यायसंगत परिस्थिति) पर आधारित है और प्रायोगिक आँकड़ों का उपयोग नहीं करती है। यहाँ तक कि पूर्णतया न्यायसंगत परिस्थिति में भी प्रायोगिक प्रायिकता और सैद्धांतिक प्रायिकता में अंतर हो सकता है, विशेषकर उन स्थितियों में जब प्रयासों की संख्या कम हो। प्रयासों की संख्या में वृद्धि होने के साथ प्रायोगिक प्रायिकता का मान सैद्धांतिक प्रायिकता के समीप आता जाता है— यह **बृहत् संख्याओं का नियम** कहलाता है।

सोचिए और विचार कीजिए

यदि मैं 8 बार निरंतर पासा फेंकने पर सदैव 4 पाता हूँ तो अगली बार 4 आने की प्रायिकता अभी भी केवल ≈ 0.16 है (माना पासा निष्पक्ष है)। प्रायिकता आपको यह नहीं बताती कि आगे क्या होगा, अपितु दीर्घावधि में क्या होगा, इसका अनुमान लगाती है।

© NCERT not to be republished

द्यूतकार का भ्रम

अधिकतर लोग सोचते हैं कि यदि कोई घटना यादृच्छिक रूप से एक श्रृंखला में कई बार घटित होता है (जैसे कि सिक्का उछालने पर लगातार छह बार चित का आना) तो अगली बार उसके विपरीत परिणाम (पट) आने की अधिक संभावना हो जाती है। किंतु वास्तव में पहले जो परिणाम प्राप्त हुए थे, सिक्का उसका कोई हिसाब नहीं रखता। प्रत्येक बार जब भी आप सिक्का उछालते हैं तो चित और पट की संभावना पहली बार सिक्का उछालने के समान ही बनी रहती है। सिक्के की कोई स्मृति नहीं होती है, अतः पूर्व की उछालों से आने वाले परिणाम में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इसे **द्यूतकार (गेंबलर) का भ्रम** कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि आप एक मानक सिक्के को उछालते हैं। उस पर लगातार छह बार चित आता है। आप यह अनुभव कर सकते हैं कि अगली बार सिक्का उछालने पर पट आ सकता है, क्योंकि पट कुछ समय के लिए नहीं आया है। जबकि अगली उछाल में पट आने की प्रायिकता अब भी पूर्व के समान ही 50% अथवा $\frac{1}{2}$ है। सिक्के में पूर्व की उछालों की कोई स्मृति नहीं होती है।

उदाहरण 6— मान लीजिए, आप साँप-सीढ़ी खेल रहे हैं और आगे बढ़ने के लिए एक षट्फलकीय निष्पक्ष पासा फेंकते हैं।

आपने अभी निरंतर तीन बार पासा फेंकने पर तीनों बार 6 प्राप्त किया।

अब आप सोचते हैं कि— "मैं अभी तीन बार छह प्राप्त कर चुका हूँ तो इसकी कोई संभावना नहीं है कि मैं अगली बार भी 6 प्राप्त करूँगा!"

यह विचार ही द्यूतकार का भ्रम है क्योंकि प्रत्येक बार जब पासा फेंका जाता है तो वह एक स्वतंत्र घटना होती है। पासे पर 6 आने की प्रायिकता सदैव ही $\frac{1}{6} \approx 0.166$ अथवा 16.6% होती है।

इसमें पूर्व की घटना के आधार पर कोई भी परिवर्तन नहीं होता है।

मूल विचार— संभावनाओं के अनेक खेलों के समान ही, साँप-सीढ़ी के खेल में प्रत्येक बार पासा फेंकना स्वतंत्र घटना है। द्यूतकार का यही भ्रम लोगों को यह मानने के लिए अभिप्रेरित करता है कि यहाँ कोई प्रतिरूप है जबकि वास्तव में, इस प्रकार की यादृच्छिकता की कोई स्मृति नहीं होती है।

न्यायसंगत एवं निष्पक्ष

जब हम सिक्के के विषय में बात करते हैं तो हम उसे न्यायसंगत मानते हैं अर्थात यह सममितीय है जिसके पास ऐसा कोई कारण या गुण नहीं है कि वह एक ओर की तुलना में दूसरी ओर अधिक बार गिरे। हम सिक्के के इस गुण को **'निष्पक्ष होना'** कहते हैं। 'यादृच्छिक रूप से सिक्का उछालना' जैसे तथ्य से हमारा आशय सिक्के को बिना किसी पक्षपात या हस्तक्षेप के स्वतंत्रतापूर्वक उछाला जाना है।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 7.2

1. एक शिक्षक विभिन्न रंगों की मिठाइयों के एक बड़े थैले को आपस में मिलाती है और उसमें से यादृच्छिक रूप से 30 मिठाइयों के एक प्रतिदर्श का चयन करती है। वह प्रत्येक रंग की मिठाइयों की गिनती करती है, जिनकी संख्या इस प्रकार है—

   10 लाल मिठाइयाँ | 8 हरी मिठाइयाँ | 7 पीली मिठाइयाँ | 5 नीली मिठाइयाँ

   (i) प्रतिदर्श से यादृच्छिक रूप से हरी मिठाई निकालने की प्रायिकता की गणना कीजिए।

   (ii) यदि बड़े थैले में कुल 600 मिठाइयाँ हैं तो प्रतिदर्श के परिणामों के आधार पर आकलन कीजिए कि कितनी मिठाइयों के पीले रंग के होने की संभावना है?

2. एक विद्यालय में सर्वेक्षण कराया गया, जहाँ 40 विद्यार्थियों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श से उनका प्रिय क्लब पूछा गया। प्रतिक्रियाएँ इस प्रकार हैं—

   14 विद्यार्थी — विज्ञान क्लब | 11 विद्यार्थी — कला क्लब

   9 विद्यार्थी — खेल क्लब | 6 विद्यार्थी — वाद-विवाद क्लब

   मान लीजिए कि पूरे विद्यालय में 800 विद्यार्थी हैं।

   (i) प्रतिदर्श से यादृच्छिक चयनित विद्यार्थी की प्राथमिकता कला क्लब के होने की प्रायिकता क्या है?

   (ii) प्रतिदर्श के परिणामों का उपयोग करके आकलन कीजिए कि पूरे विद्यालय में कितने विद्यार्थी खेल क्लब को प्राथमिकता देंगे।

3. एक सिक्के को 20 बार उछालिए और प्रत्येक बार परिणाम को अंकित कीजिए (चित अथवा पट)।

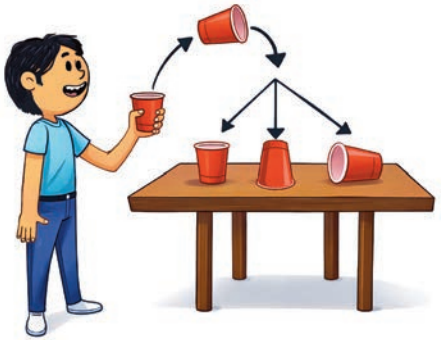
   (i) आपने कितनी बार चित प्राप्त किया?

   (ii) आपने कितनी बार पट प्राप्त किया?

   (iii) चित प्राप्त करने की प्रायोगिक प्रायिकता की गणना कीजिए।

   (iv) यदि आप सिक्के को एक और बार उछालते हैं तब चित प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

4. कागज से निर्मित एक प्याले को हवा में 100 बार उछालिए। प्रत्येक बार उछालने के पश्चात एक कागज पर यह लिखते जाइए कि प्याला अपने निचले तल पर गिरता है, उल्टा होकर ऊपरी भाग पर गिरता है अथवा अपने पार्श्व पर गिरता है (चित्र 7.5 देखिए)। प्रायोगिक प्रायिकता का उपयोग करके परिणामों की प्रायिकता की गणना कीजिए।



चित्र 7.5 — कागज से निर्मित प्याले के गिरने की स्थितियाँ (बाएँ से दाएँ) — तल, उल्टा होकर ऊपरी भाग और पार्श्व भाग

5. एक निष्पक्ष षट्फलकीय पासे को फेंकने पर एक सम संख्या को प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

© NCERT not to be republished

6. मान लीजिए, आप एक षट्फलकीय पासे को 12 बार फेंकते हैं और तीन बार अंक '3' प्राप्त करते हैं।
   (i) पासे पर '3' आने की प्रायोगिक प्रायिकता क्या है?
   (ii) पासे पर '3' आने की सैद्धांतिक प्रायिकता क्या है?
   (iii) इन प्रायिकताओं में भिन्नता क्यों हो सकती है? यदि आप पासे को 60, 600 या 6000 बार फेंकें तो क्या प्राप्त होने की अपेक्षा करेंगे?

7.3 प्रायिकता के तत्त्व — प्रतिदर्श समष्टि और घटनाएँ

7.3.1 प्रतिदर्श समष्टि (सेंपल स्पेस)

स्मरण कीजिए, 'S' से निरूपित प्रतिदर्श समष्टि सभी संभावित परिणामों का समुच्चय होता है। प्रत्येक संभावित परिणाम को प्रतिदर्श समष्टि का तत्त्व कहा जाता है।

- प्रतिदर्श समष्टि 'S' में **प्रत्येक संभावित परिणाम** अवश्य ही सम्मिलित होना चाहिए।
- किसी परिणाम को **एक बार से अधिक सूचीबद्ध** नहीं किया जाना चाहिए।
- प्रतिदर्श समष्टि में तत्त्वों की संख्या को **प्रतिदर्श आकार** कहा जाता है और इसे 'n(S)' से निरूपित किया जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि के उदाहरण

1. कल वर्षा होगी, इसके लिए प्रतिदर्श समष्टि S ={वर्षा होगी, वर्षा नहीं होगी} और प्रतिदर्श आकार n(S) = 2 हो सकता है।
2. एक प्रतियोगिता अर्थात एक प्रतियोगी दल के संभावित परिणाम के लिए प्रतिदर्श समष्टि S ={जीत, हार, ड्रॉ} और प्रतिदर्श आकार n(S) = 3 हो सकता है।
3. एक सिक्का उछालना—
   - प्रयोग— एक बार निष्पक्ष सिक्का उछालना।
   - प्रतिदर्श समष्टि— S = {चित (H), पट (T)}
   - प्रतिदर्श आकार = 2
4. एक पासा फेंकना—
   - प्रयोग— एक मानकीकृत षट्फलकीय पासा फेंकना।
   - प्रतिदर्श समष्टि— S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   - प्रतिदर्श आकार = 6
5. दो सिक्कों को उछालना—
   - प्रयोग— एक साथ दो सिक्कों को उछालना।
   - प्रतिदर्श समष्टि— S = {HH, HT, TH, TT}
   - प्रतिदर्श आकार = 4

सिक्का 1	सिक्का 2	परिणाम
H	H	HH
H	T	HT
T	H	TH
T	T	TT

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

उपरोक्त उदाहरण 1 में जब हमने प्रतिदर्श समष्टि {वर्षा होगी, वर्षा नहीं होगी} का उपयोग किया था तो हमने वर्षा होगी या नहीं होगी, केवल इसी विषय पर विचार किया था। यद्यपि यदि हम वर्षा की विभिन्न मात्राओं, जैसे— फुहार, हल्की वर्षा अथवा भारी वर्षा को सम्मिलित करना चाहते हैं तो हमें अपने प्रतिदर्श समष्टि को {वर्षा नहीं, बूँदा-बाँदी, हल्की वर्षा, भारी वर्षा} में विस्तारित करने की आवश्यकता होगी, जिससे यह प्रश्न के लिए आवश्यक विवरण के स्तर के अनुरूप मेल खाता हो। यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि प्रतिदर्श समष्टि, प्रस्तुत विशिष्ट प्रश्न के अध्ययन के लिए पर्याप्त रूप से विस्तृत हो।

7.3.2 घटनाएँ

कोई **घटना** एक संभावित परिणाम अथवा परिणामों का संयोजन होती है जो तब घटित हो सकती है जब आप कोई यादृच्छिक गतिविधि करते हैं। यह सभी संभावित परिणामों से विशेष परिणामों का चयन करने जैसा है। कोई घटना, एक प्रतिदर्श समष्टि का उपसमुच्चय (सबसेट) होती है।

प्रतिदर्श समष्टि और घटनाओं के उदाहरण

1. दो सिक्कों को उछालना
   - प्रतिदर्श समष्टि— सभी संभावित परिणाम, जैसे— चित-चित, चित-पट, पट-चित, पट-पट। S = प्रतिदर्श समष्टि = {HH, HT, TH, TT}
   - घटना— 'कम-से-कम एक सिक्का चित प्रदर्शित करता है।' E = {HH, HT, TH}
2. षट्फलकीय पासा फेंकना
   - प्रतिदर्श समष्टि—1 से 6 तक अंकित सभी फलक। S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   - घटना— 'पासे पर प्राप्त संख्या 4 से अधिक है।' E = {5, 6}
3. टोकरी से फल निकालना
   - प्रतिदर्श समष्टि— विभिन्न प्रकार के फल जो आप टोकरी से निकाल सकते हैं, जैसे— सेब, केला और संतरा। S = {सेब, केला, संतरा}
   - घटना— 'वह फल निकालना जो पीला हो।' E = {केला}

प्रश्नावली 7.3

1. जब एक षट्फलकीय पासा फेंका जाता है तो प्रतिदर्श समष्टि में संभावित परिणामों की कुल संख्या कितनी होगी?
2. निम्नलिखित प्रयोगों के लिए प्रतिदर्श समष्टि S लिखिए—
   (i) एक साथ एक पासा फेंकना और एक सिक्का उछालना।

© NCERT not to be republished

(ii) −5 और +5 के मध्य एक पूर्णांक का यादृच्छिक चयन करना।

(iii) एक बक्से में 5 हरी और 7 लाल गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली गई।

3. एक ग्रामीण मेले में 3 लोकप्रिय नाश्ते उपलब्ध हैं— समोसा, पकौड़ा और भाजी। पेय पदार्थों में ग्रामीण व्यक्ति चाय या लस्सी का चयन कर सकते हैं।

(i) नाश्ते और पेय के सभी संभव संयोजन जो एक व्यक्ति मेले में चयनित कर सकता है, के प्रतिदर्श समष्टि सूचीबद्ध कीजिए।

(ii) 'समोसे को नाश्ते के रूप में चयनित करने' की घटना को सूचीबद्ध कीजिए।

7.4 वृक्ष आरेख

वृक्ष आरेख एक दृश्यांकन है जिसका उपयोग **बहु-चरणीय प्रयोग** के सभी संभावित परिणामों को सूचीबद्ध करने के लिए किया जाता है। एक बहु-चरणीय प्रयोग में स्वतंत्र परीक्षणों की एक श्रृंखला समाहित होती है, जैसे— एक सिक्के को दो बार उछालना अथवा एक पासे को तीन बार फेंकना। वृक्ष की प्रत्येक शाखा एक संभावित परिणाम को दर्शाती है और इन शाखाओं का आगे विभाजन आगामी घटनाओं के विभिन्न पथों को दर्शाता है।

एक वृक्ष आरेख निम्नलिखित के लिए उपयोगी है—

- बहु-चरणीय प्रयोगों का दृश्यांकन जहाँ आरंभ से समापन तक प्रत्येक पथ, एक पूर्ण परिणाम को दर्शाता है।
- एक प्रतिदर्श समष्टि के सभी परिणामों को सूचीबद्ध करना।

इस अध्याय में अभी तक हमने एकल-चरणीय प्रयोगों को देखा है। आइए, हम बहु-चरणीय प्रयोग का एक उदाहरण देखते हैं।

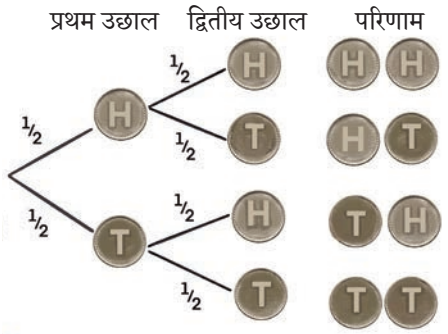
उदाहरण 7— प्रयोग— एक निष्पक्ष सिक्का दो बार उछालना।

वृक्ष आरेख (चित्र 7.6 देखिए)

एक बिंदु से प्रथम उछाल में प्राप्त प्रत्येक संभव परिणाम तक एक रेखा खींचिए। इनमें से प्रत्येक परिणाम से प्रत्येक संभव परिणाम तक दो रेखाएँ खींचिए। क्या आपने देखा कि वृक्ष आरेख 4 संभावित परिणामों को दर्शाता है?

अतः प्रतिदर्श समष्टि

S = {HH, HT, TH, TT}



चित्र 7.6 — एक निष्पक्ष सिक्का दो बार उछालने पर संभावित परिणाम दर्शाता वृक्ष आरेख

© NCERT not to be republished

इसके अतिरिक्त, प्रत्येक परिणाम की सैद्धांतिक प्रायिकता का उल्लेख परिणाम दर्शाने वाली शाखा पर किया गया है।

$$\text{सैद्धांतिक प्रायिकता (P)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$$

आइए, दो बार चित आने की घटना पर विचार करें। यह परिणाम HH द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

HH की प्रायिकता $= \frac{1}{4} = 0.25$ अथवा 25% है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप एक बार चित और एक बार पट आने की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं?

प्रश्नावली 7.4

1. A और B फलों की दो टोकरियाँ हैं। टोकरी A में एक सेब और दो संतरे हैं। टोकरी B में एक केला और एक आम है। आप यादृच्छिक रूप से प्रत्येक टोकरी से एक फल निकालते हैं—
   (i) फलों के सभी संभावित युग्मों को दर्शाता हुआ एक वृक्ष आरेख खींचिए।
   (ii) प्रतिदर्श समष्टि को सूचीबद्ध कीजिए।
   (iii) एक सेब और एक केला निकालने की प्रायिकता क्या होगी?
2. मान लीजिए, आपके पास एक बक्सा है जिसमें 3 लाल पेन, 4 काले पेन और 2 हरे पेन हैं। आपने बक्से में बिना देखे एक पेन निकाला और वापस उसी में रख दिया। अब आपका मित्र भी इसी कार्य को दोहराता है।
   (i) पेन के रंगों के संभावित परिणाम क्या हैं? क्या आप संभावित परिणामों को दर्शाता हुआ एक वृक्ष आरेख खींच सकते हैं?
   (ii) क्या आप वृक्ष आरेख का उपयोग कर अनुमान लगा सकते हैं कि आप और आपके मित्र द्वारा एक ही रंग के पेन निकालने की प्रायिकता क्या होगी?

अंतिम प्रश्नावली

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—
   (i) असंभव घटना की प्रायिकता _____ है।
   (ii) एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभव परिणामों के समुच्चय को _____ कहा जाता है।

© NCERT not to be republished

(iii) एक निश्चित ही घटित होने वाली घटना की प्रायिकता _____ है।

(iv) निष्पक्ष सिक्का उछालने पर चित आने की प्रायिकता _____ है।

2. 50 विद्यार्थियों के एक सर्वेक्षण में 15 विद्यार्थियों ने कहा कि उन्हें फुटबॉल पसंद है। फुटबॉल पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 15 है और _____ (आवृत्ति/सापेक्षिक आवृत्ति) _____ है (भिन्न अथवा दशमलव में पूर्ति कीजिए)।

3. निम्नलिखित में किस प्रयोग के समप्रायिक परिणाम हैं? व्याख्या कीजिए।

(i) एक चालक कार को चालू करने का प्रयास कर रहा है। कार चालू होती है या नहीं होती है।

(ii) निष्पक्ष सिक्का एक बार उछालना।

(iii) निष्पक्ष षट्फलकीय पासा फेंकना।

(iv) एक थैली से यादृच्छिक रूप से एक कंचा निकालना, जिसमें 3 लाल कंचे और 7 नीले कंचे हों।

(v) एक बच्चे का जन्म हुआ है। यह एक लड़का है या लड़की है।

4. दी गई सूचनाओं के आधार पर प्रतिदर्श समष्टि लिखिए और प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक ही समय पर दो सिक्कों को उछाला जाता है। कम-से-कम एक चित आने की प्रायिकता क्या है?

(ii) 10 सर्वसम पत्ते 1 से 10 तक संख्यांकित करके एक बक्से में रखे गए हैं। एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। एक सम संख्या वाले पत्ते के आने की प्रायिकता क्या है?

(iii) एक पासा एक बार फेंका जाता है। 4 से बड़ी संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

(iv) एक थैले में 3 लाल गेंदें, 2 नीली गेंदें और 1 हरी गेंद हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद लाल नहीं होगी?

(v) तीन सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। ठीक दो चित आने की प्रायिकता क्या है?

5. एक थैली में 3 टॉफियाँ हैं— स्ट्रॉबेरी, नींबू और पुदीना। एक टॉफी यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। स्ट्रॉबेरी टॉफी निकालने की प्रायिकता क्या है?

6. एक बच्चे के पास 2 कमीजें (एक लाल और एक नीला) और 3 प्रकार की पतलूनें (जींस, खाकी और शॉर्ट्स) हैं। एक कमीज और एक पतलून मिलकर बनने वाली पोषाक के सभी संभव संयोजनों को सूचीबद्ध कीजिए। अपने उत्तर को सारणी रूप में प्रस्तुत कीजिए।

© NCERT not to be republished

7. एक टायर कंपनी 1000 मामलों में प्रतिस्थापन (रिप्लेसमेंट) से पूर्व दूरियों को अभिलेखित करती है—

दूरी (किलोमीटर में)	4000 से कम	4001 से 9000	9001 से 14000	14000 से अधिक
मामलों की संख्या	20	210	325	445

यादृच्छिक चयनित टायर की आयु की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जब दूरी—

(i) 4000 किलोमीटर से कम हो।

(ii) 4000 से 14000 किलोमीटर के मध्य हो।

(iii) 14000 किलोमीटर से अधिक हो।

8. 'PEACE' शब्द के अक्षरों को पत्तों पर लिखा गया है। लीला बिना देखे एक पत्ता निकालती है—

(i) इसके P, E या C होने की प्रायिकता क्या है?

(ii) इसके E न होने की प्रायिकता क्या है?

P	E	A	C	E

*9. संयोग के एक खेल में एक तीर घूमता है (आकृति 7.7 देखिए), जो रुकने के पश्चात 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 में से किसी एक संख्या को इंगित करता है और ये सभी परिणाम समप्रायिक हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह तीर इंगित करेगा—

(i) 8?

(ii) एक विषम संख्या?

(iii) 2 से बड़ी संख्या?

(iv) 9 से छोटी संख्या?

(v) 3 का एक गुणज?



चित्र 7.7

*10. एक टोकरी में 4 लाल और 5 नीले रंग की गेंदें हैं। एक गेंद निकाली जाती है और अलग रख दी जाती है, इसके पश्चात दूसरी गेंद निकाली जाती है। संभावित परिणामों और प्रायिकता को दर्शाने के लिए एक वृक्ष आरेख खींचिए। वृक्ष आरेख का उपयोग करके निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

(i) एक लाल और उसके पश्चात एक नीले रंग की गेंद को निकालने की प्रायिकता क्या है?

(ii) 2 नीली गेंदें निकालने की प्रायिकता क्या है?

© NCERT not to be republished

*11. मैंने षट्फलकीय पासे के एक युग्म को फेंका। एक ऐसी घटना लिखिए, जिसकी प्रायिकता 0 हो और एक ऐसा परिणाम लिखिए, जिसकी प्रायिकता 1 हो।

*12. नीचे दी गई सूचना के आधार पर प्रतिदर्श समष्टि लिखिए और प्रायिकता की गणना कीजिए—

(i) दो पासे फेंके गए। इसकी क्या प्रायिकता है कि प्राप्त अंकों का योग 5 से बड़ी अभाज्य संख्या हो?

(ii) एक थैले में 4 लाल, 3 हरे और 2 नीले रंग की गेंदें हैं। दो गेंदों को बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों गेंदों के रंग भिन्न हैं?

(iii) तीन सिक्कों को उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि पहला सिक्का चित प्रदर्शित करता हो और कुल मिलाकर दो चित प्राप्त हों।

(iv) 1, 2, 3 और 4 संख्याओं को बिना पुनरावृत्ति के उपयोग करके एक 4-अंकीय संख्या बनाई गई है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह संख्या सम है?

(v) एक विद्यार्थी 3 प्रश्नों की एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में सम्मिलित होता है, जहाँ प्रत्येक प्रश्न के 4 विकल्प (A, B, C, D) हैं और उनमें से केवल एक विकल्प सही है। इसकी क्या प्रायिकता है कि विद्यार्थी अनुमान लगाकर 2 सही उत्तर प्राप्त करे?

*13. एक बक्से में 4 गेंदें हैं जिन पर 1 से 4 तक अंक लिखे हैं। निम्नलिखित प्रयोगों के लिए वृक्ष आरेख का उपयोग करते हुए एक प्रतिदर्श समष्टि लिखिए—

(i) एक गेंद निकाली जाती है और उस पर लिखित अंक को एक कागज पर लिख लिया जाता है। तत्पश्चात गेंद को वापस बक्से में रख दिया जाता है और एक दूसरी गेंद निकाली जाती है और उस पर लिखित अंक को लिख लिया जाता है।

(ii) एक गेंद निकाली जाती है और लिख ली जाती है। पहली गेंद के बिना प्रतिस्थापन के परीक्षक दूसरी गेंद निकालता है और उसे लिख लेता है।

(iii) इन दोनों प्रतिदर्श समष्टियों के आकार क्या हैं?

*14. एक सिक्का उछालने और 1 से 6 तक संख्यांकित ताश के 6 पत्तों के समूह से एक पत्ता निकालने का प्रयोग एक साथ करने के लिए एक प्रतिदर्श समष्टि के तत्त्वों को सूचीबद्ध कीजिए।

*15. तीन सिक्कों को उछाला जाता है और चित आने की संख्या को अंकित किया जाता है। निम्नलिखित में कौन-सा समुच्चय इस प्रयोग के लिए एक प्रतिदर्श समष्टि है? अन्य समुच्चय, प्रतिदर्श समष्टि के रूप में योग्य क्यों नहीं माने जाते हैं—

(i) {1, 2, 3}

(ii) {0, 1, 2}

(iii) {0, 1, 2, 3, 4}

(iv) {0, 1, 2, 3}

© NCERT not to be republished

*16. मान लीजिए, आप यादृच्छिक रूप से चित्र 7.8 में दर्शाए अनुसार आयताकार क्षेत्र में रंग की एक बूँद गिराते हैं। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि यह बूँद 1 मीटर व्यास वाले वृत्त में गिरेगी?



चित्र 7.8

सारांश

- प्रायिकता एक घटना की संभावना का मापन है।
- प्रायिकता को 0 (असंभावना की ओर संकेत है) से लेकर 1 (निश्चितता का संकेत है) के एक पैमाने पर व्यक्त किया जाता है जो किसी घटना के घटित होने की संभावना को प्रस्तुत करता है। एक घटना E की प्रायिकता का निरूपण P(E) के रूप में किया जाता है जहाँ $0 \leq P(E) \leq 1$ है।
- प्रायोगिक प्रायिकता का निर्धारण एक प्रयोग करके किया जाता है और उसकी गणना निम्नलिखित रूप में की जाती है—

  $$\text{प्रायोगिक प्रायिकता} = \frac{\text{घटना घटित होने की संख्या}}{\text{प्रयासों की कुल संख्या}}$$

- सैद्धांतिक प्रायिकता एक निष्पक्ष परिस्थिति में सभी संभावित एवं समप्रायिक परिणामों पर आधारित होती है।

  एक घटना A की सैद्धांतिक प्रायिकता—

  $$P(A) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित परिणामों की संख्या}}$$

- प्रतिदर्श समष्टि एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों का समुच्चय होता है। इसे समुच्चय S = {परिणाम$_1$, परिणाम$_2$, ..., परिणाम$_n$} के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।
- एक घटना, एक यादृच्छिक प्रयोग के किसी एक परिणाम अथवा संभावित परिणामों का समूह होती है। यह सभी संभावित परिणामों में से कुछ परिणामों को चुनने जैसा है।
- वृक्ष आरेख एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों को सूचीबद्ध और दृश्यांकित करने में सहायता प्रदान करता है। ये यादृच्छिक प्रयोगों से संबंधित घटनाओं की प्रायिकता की गणना करने में भी हमारी सहायता करते हैं।

© NCERT not to be republished

8 अगले पद का पूर्वानुमान — अनुक्रमों और श्रेढ़ियों का अन्वेषण

0920CH08

8.1 अनुक्रम से परिचय

हम अपने चारों ओर सभी स्थानों पर विभिन्न प्रकार के प्रतिरूप अर्थात पैटर्न देखते हैं, चाहे वह प्रकृति में हो, कला में हो, संगीत में हो, वित्त में हो अथवा दैनिक जीवन के कई अन्य संदर्भों में प्रतिरूप, विश्व को समझने में और आगे क्या आएगा, यह पूर्वानुमान लगाने में सहायता करते हैं। गणित में अनुक्रम, प्रतिरूपों के विशेष प्रकार हैं, जो संख्याओं या अन्य वस्तुओं को एक विशेष क्रम में व्यवस्थित करने पर बनते हैं। अनुक्रमों को समझकर हम उन रोचक विचारों का अन्वेषण कर सकते हैं, जो संख्याओं के आगे बढ़ने, कम होने या दोहराए जाने से संबंधित होते हैं, अपितु हम इन विचारों का उपयोग वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने में भी कर सकते हैं।

इस अध्याय में हम संख्याओं के अनुक्रमों में प्रतिरूपों का अन्वेषण करेंगे। तत्पश्चात हम उन नियमों का पता लगाएँगे, जो हमें अनुक्रम की आगामी संख्याओं का पूर्वानुमान लगाने में सहायता करते हैं। आइए, हम कुछ संख्याओं के अनुक्रम से प्रारंभ करते हैं, जिन्हें आप कक्षा 6, 7 और 8 में देख चुके हैं।

1, 2, 3, 4, 5, 6, …	(प्राकृत संख्याएँ)
1, 3, 5, 7, 9, 11, ...	(विषम संख्याएँ)
1, 3, 6, 10, 15, 21, ...	(त्रिभुजाकार संख्याएँ)
1, 4, 9, 16, 25, 36, ...	(वर्ग संख्याएँ)

तीन बिंदु ... यह दर्शाते हैं कि अनुक्रम अपरिमित रूप से चलता रहता है।

सोचिए और विचार कीजिए

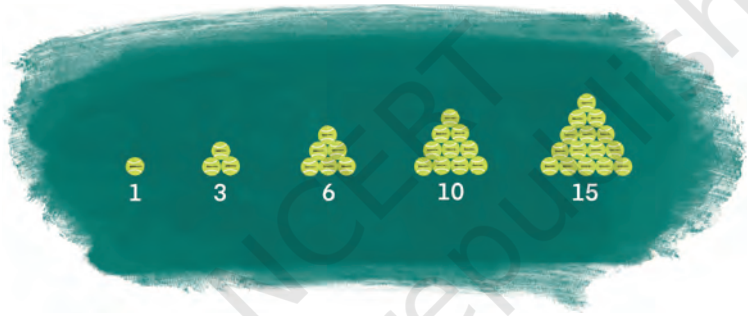
क्या आप ऊपर दिए गए अनुक्रमों में प्रत्येक अनुक्रम में प्रतिरूप की व्याख्या कर सकते हैं? क्या आप इन अनुक्रमों में अग्रिम कुछ संख्याओं का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

आइए, आगे बढ़ने से पहले **अनुक्रम** को संख्याओं की एक क्रमिक सूची के रूप में परिभाषित करते हैं, जहाँ प्रत्येक संख्या अनुक्रम का एक **पद** है। इस प्रकार वर्ग संखाओं के अनुक्रम में 1 पहला पद है, 4 दूसरा पद है, 25 पाँचवाँ पद है एवं इसी प्रकार आगे भी पद हैं। इसके अतिरिक्त, अनुक्रम परिमित या अपरिमित हो सकते हैं। ऊपर दिए गए अनुक्रम अपरिमित अनुक्रम हैं, किंतु अनुक्रम 6, 12,

© NCERT not to be republished

24, 48, 96 एक परिमित अनुक्रम हैं, जिसमें 5 पद हैं। क्या आप अन्य परिमित अनुक्रमों पर विचार कर सकते हैं, जिन्हें आप अपने दैनिक जीवन में देखते हैं?

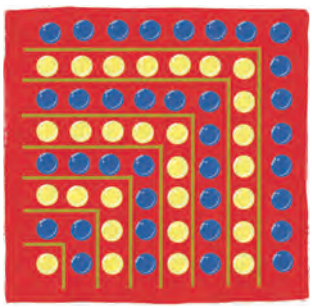
जैसा कि आप जानते हैं कि प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम में प्रत्येक संख्या (या पद) पिछली संख्या से एक अधिक है। विषम संख्याओं के अनुक्रम में दो क्रमागत पदों के मध्य 2 का अंतर है। त्रिभुजाकार संख्याओं के अनुक्रम में क्रमागत पदों (पहले 6 पदों में) के मध्य अंतर 2, 3, 4, 5 और 6 है। हम त्रिभुजाकार संख्याओं को प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिख सकते हैं, जैसे $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ और इसी प्रकार आगे भी इन्हें लिखा जा सकता है। इस प्रकार त्रिभुजाकार संख्याओं के अनुक्रम में प्रत्येक पद, उस पद-संख्या तक की सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल है। उदाहरण के लिए, 15 पाँचवीं त्रिभुजाकार संख्या है, जो $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ के समान है। इसे चित्र 8.1 में आरेख द्वारा प्रदर्शित किया गया है, जिसमें प्रत्येक त्रिभुजाकार संख्या को बिंदुओं की त्रिभुजाकार व्यवस्था द्वारा प्रदर्शित किया गया है। क्या आप इस अनुक्रम के आगामी दो पदों के लिए प्रतिरूप की रचना कर सकते हैं?



चित्र 8.1 — प्रथम पाँच त्रिभुजाकार संख्याएँ

आइए, अब हम वर्ग संख्याओं के अनुक्रम 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... पर ध्यान देते हैं। ध्यान दीजिए कि क्रमागत पदों (प्रथम छह पदों में) के मध्य अंतर 3, 5, 7, 9 और 11 हैं। साथ ही, $1 = 1$, $4 = 1 + 3$, $9 = 1 + 3 + 5$, $16 = 1 + 3 + 5 + 7$ है और इसी प्रकार संख्याएँ आगे भी हैं। वर्ग संख्याओं के अनुक्रम में प्रत्येक पद, उस पद-संख्या के बराबर क्रमिक विषम संख्याओं (1 से प्रारंभ करते हुए) का योगफल है।

विषम संख्याओं और वर्ग संख्याओं के मध्य इस रोचक संबंध को चित्र 8.2 में आरेख द्वारा प्रदर्शित किया गया है। क्या आप इस संबंध की व्याख्या कर सकते हैं? आप कक्षा 6 की पाठ्यपुस्तक के अध्याय 1 की सहायता से इनमें से कुछ विचारों का स्मरण कर सकते हैं।



चित्र 8.2 — वर्ग संख्याएँ और विषम संख्याएँ

© NCERT not to be republished

प्रश्न — अनुक्रम 1, 4, 7, 10, 13, ... पर विचार कीजिए। क्या आप आगामी चार पदों का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप इस अनुक्रम में दिए गए पद तक आने वाले सभी पदों का योग करने पर प्राप्त अनुक्रम के पहले 10 पद बता सकते हैं?

(**संकेत** — प्रथम पद 1 है। दूसरा पद 1 + 4 = 5 है, तीसरा पद 1 + 4 + 7 = 12 है और आगे भी इसी प्रकार पद प्राप्त किए जा सकते हैं।)

कुछ अनुक्रमों में (अब तक व्याख्या किए गए अनुक्रमों के समान) पद किसी निश्चित प्रतिरूप, सूत्र या क्रम का पालन करते हैं। इन नियमों की व्याख्या करने में कोई सरल संकेतक सहायक हो सकता है, जो अनुक्रम की व्याख्या करता हो। हम किसी अनुक्रम के पहले पद को प्रदर्शित करने के लिए t_1, दूसरे पद को प्रदर्शित करने के लिए t_2 और इसी प्रकार के संकेतक आगे भी उपयोग कर सकते हैं। इस संकेतक में अधोलिखित संख्या, पद-संख्या के अनुरूप होती है। इस प्रकार, विषम संख्याओं के अनुक्रम के लिए $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 5$, $t_4 = 7$ और इसी प्रकार पद चलते रहते हैं। यह संकेतक पद की स्थिति को वास्तविक पद से मिलाने में सहायता करता है। उदाहरण के लिए $t_4 = 7$ बताता है कि चौथी स्थिति पर पद 7 है। हमें एक ही समय पर एक से अधिक अनुक्रम के विषय में चर्चा करने की आवश्यकता हो सकती है। इसके लिए हम अंग्रेजी के विभिन्न वर्णों का उपयोग कर सकते हैं। इस प्रकार, अनुक्रम के लिए हम एक $t_1, t_2, t_3, \ldots$, आगामी अनुक्रम के लिए $s_1, s_2, s_3, \ldots$ और तीसरे अनुक्रम के लिए $u_1, u_2, u_3, \ldots$ और इसी प्रकार आगे भी संकेतकों का उपयोग कर सकते हैं।

प्रश्न — क्या आप त्रिभुजाकार संख्याओं के अनुक्रम हेतु t_5, t_6, t_7 और t_8 लिख सकते हैं?

अनुक्रम अनेक प्रकार के हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, पद भिन्न या ऋणात्मक पूर्णांक हो सकते हैं। अभी तक हमने जिन अनुक्रमों पर चर्चा की है, उनमें पद बढ़ते हुए क्रम में हैं, किंतु ऐसे अनुक्रम जैसे कि $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ भी हो सकते हैं, जहाँ $t_1 = 1$ है और आगे आने वाले पद इकाई भिन्न हैं, जो घटते क्रम में हैं। हम ऐसे अनुक्रम भी देख सकते हैं, जैसे कि $-7, -3, 1, 5, 9, \ldots$ जहाँ $S_1 = -7$ है और क्रमागत पदों के मध्य 4 का अंतर है। ध्यान दीजिए कि जब हम संकेतक t_n का उपयोग किसी पद को बताने के लिए करते हैं, तो n सदैव एक ऋणेतर पूर्णांक है किंतु पद, ऋणात्मक संख्या या वास्तव में कोई भी वास्तविक संख्या हो सकता है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप अन्य प्रकार के अनुक्रम के विषय में विचार कर सकते हैं? पाँच विभिन्न प्रकार के अनुक्रम की सूची बनाइए और अपने मित्रों के साथ अनुक्रम के गुणों पर चर्चा कीजिए।

8.2 अनुक्रम के लिए व्यापक सूत्र

संकेतक t_n (या s_n या u_n) का उपयोग करते हुए हम किसी अनुक्रम की nवीं स्थिति पर स्थित पद अर्थात nवें पद के लिए एक व्यापक सूत्र लिख सकते हैं। **व्यापक सूत्र** से पद का मान ज्ञात करने के लिए पद की स्थिति संख्या n का उपयोग किया जाता है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 1 — व्यंजक $u_n = 2n - 1$ पर विचार कीजिए। यह व्यंजक बताता है कि अनुक्रम का nवाँ पद $2n - 1$ सूत्र द्वारा दिया जाता है। जब हम व्यंजक $2n - 1$ में n को 1, 2, 3, ... से विस्थापित करते हैं, तो हमें $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$, $u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$, $u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$ आदि प्राप्त होते हैं।

इस प्रकार, $u_n = 2n - 1$ विषम संख्याओं के अनुक्रम के nवें पद के लिए व्यापक सूत्र है।

सोचिए और विचार कीजिए

किसी अनुक्रम के nवें पद हेतु व्यापक सूत्र होना क्यों उपयोगी है?

व्यापक सूत्र का उपयोग करते हुए, हम अनुक्रम के 20वें पद, 53वें पद, 300वें पद या अनुक्रम के किसी भी पद का मान, सूत्र में n के उचित मान को विस्थापित करके प्राप्त कर सकते हैं। यदि हमारे पास व्यापक सूत्र होता है तो हम अनुक्रम के किसी भी पद का मान, उस पद से पिछले पदों का मान ज्ञात किए बिना ही जान सकते हैं।

प्रश्न — सूत्र $u_n = 2n - 1$ का उपयोग करते हुए, विषम संख्या अनुक्रम के 53वें, 108वें तथा 1170वें पद को ज्ञात कीजिए?

व्यापक सूत्र अन्य प्रकार से भी उपयोगी है। हम इस सूत्र का उपयोग यह जाँचने के लिए कर सकते हैं कि क्या कोई विशेष संख्या अनुक्रम का पद है या नहीं और साथ ही उस पद की स्थिति भी ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, विषम संख्या 137 पर विचार कीजिए। यह ज्ञात करने के लिए कि विषम संख्या अनुक्रम में यह संख्या कौन-सी स्थिति पर है, हमें समीकरण $u_n = 137$ को हल करना होगा। इसका अर्थ — $2n - 1 = 137$ या $n = 69$ है। इस प्रकार, 137 विषम संख्या अनुक्रम का 69वाँ पद है।

उदाहरण 2 — एक अन्य उदाहरण में उस अनुक्रम पर विचार कीजिए, जो व्यापक सूत्र $s_n = 5n - 2$ के द्वारा बनाया जाता है। क्या आप इस अनुक्रम के प्रथम 6 पद लिख सकते हैं? इस अनुक्रम का 100वाँ पद क्या है? इस अनुक्रम का 1000वाँ पद क्या है?

आइए, जाँच करते हैं कि क्या संख्याएँ 308 और 473 इस अनुक्रम के पद हैं।

हम $s_n = 308$ को हल करते हैं, जो $5n - 2 = 308$ है। इससे $5n = 310$ या $n = 62$ प्राप्त होता है। इस प्रकार 308, इस अनुक्रम का 62वाँ पद है। इसी प्रकार, $5n - 2 = 471$ को हल करने पर $5n = 473$, $n = 94.6$ प्राप्त होता है। चूँकि 94.6 एक प्राकृत संख्या नहीं है, अत: हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 471 इस अनुक्रम का पद नहीं है। क्या आप बता सकते हैं कि n को प्राकृत संख्या क्यों होना चाहिए?

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप वर्ग संख्याओं के अनुक्रम के nवें पद को प्रदर्शित करने वाला सूत्र ज्ञात कर सकते हैं?

प्रारंभिक दस अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम — 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 है। क्या आप इस अनुक्रम में कोई प्रतिरूप देखते हैं? क्या आप किसी सूत्र पर विचार कर सकते हैं, जिससे अगली कुछ अभाज्य संख्याओं का पूर्वानुमान लगाया जा सके?

© NCERT not to be republished

प्रश्न — व्यंजक $t_n = 3n - 7$ पर विचार कीजिए।

(i) इस अनुक्रम का पहला, दूसरा, तीसरा, 12वाँ, 18वाँ और 50वाँ पद ज्ञात कीजिए।

(ii) अनुक्रम का कौन-सा पद 332 है?

(iii) क्या 557 इस अनुक्रम का कोई पद है? क्यों या क्यों नहीं?

8.3 अनुक्रम के लिए पुनरावर्ती सूत्र

अब तक हमने किसी अनुक्रम के nवें पद के लिए व्यापक सूत्र के रूप में n के पदों में एक सूत्र का उपयोग किया है। अनुक्रम के लिए सूत्र लिखने के अन्य प्रकार भी हैं। अनुक्रम 1, 4, 7, 10, 13, ... पर विचार कीजिए। इसका nवाँ पद $t_n = 3n - 2$ है। (इसे आप स्वयं ही जाँचिए।) ध्यान दीजिए कि प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से 3 अधिक है। $t_2 = t_1 + 3$, $t_3 = t_2 + 3$, $t_4 = t_3 + 3$ और इसी प्रकार पद आगे भी हैं। व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि $t_n = t_{n-1} + 3$, जहाँ $n \geq 2$ है अथवा हम अनुक्रम की व्याख्या $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + 3$ के रूप में भी कर सकते हैं, जहाँ n का मान 2, 3, 4, ... हो सकता है। इस प्रकार किसी अनुक्रम के पदों को उनसे पहले आए पदों से संबद्ध करते हुए अनुक्रम की व्याख्या करना **पुनरावर्ती सूत्र** कहलाता है। यदि आपको अनुक्रम के पूर्व पद ज्ञात हों तो इस सूत्र का उपयोग करके आप आगामी पद ज्ञात कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि पुनरावर्ती सूत्र का उपयोग करके अगले पद को ज्ञात करने के लिए हमें अनुक्रम के पूर्व पद ज्ञात होने चाहिए।

उदाहरण 3 — नीचे दिए गए अनुक्रम के प्रथम चार पद पुनरावर्ती सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए।

$u_1 = 1$, $u_n = 2u_{n-1} + 3$, जब $n \geq 2$ हो। क्या 133 इस अनुक्रम का कोई पद है?

हम उत्तरोत्तर रूप से n के मान 2, 3, 4 आदि विस्थापित करते जाएँगे और प्रत्येक पद के मान की गणना करेंगे।

$$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$$
$$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$$
$$u_4 = 2u_3 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 29$$

इस प्रकार, अनुक्रम के प्रथम चार पद 1, 5, 13, 29 हैं। अनुवर्ती पदों की गणना करते हुए, हम जाँच सकते हैं कि क्या 133 इस अनुक्रम का कोई पद है।

उदाहरण 4 — नीचे दिए गए अनुक्रम के प्रथम चार पद पुनरावर्ती सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए। $s_1 = 3$, $s_n = s_{n-1}(s_{n-1} - 1)$, जहाँ $n \geq 2$ है।

n को 2, 3, 4 आदि से विस्थापित कर एवं गणना करके प्रत्येक पद का मान निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात किया जाता है—

$$s_2 = s_1(s_1 - 1) = 3 \times (3 - 1) = 3 \times 2 = 6$$
$$s_3 = s_2(s_2 - 1) = 6 \times (6 - 1) = 6 \times 5 = 30$$
$$s_4 = s_3(s_3 - 1) = 30 \times (30 - 1) = 30 \times 29 = 870$$

इस प्रकार, अनुक्रम के प्रथम चार पद 3, 6, 30, 870 हैं।

© NCERT not to be republished

विरहांक-फिबोनाची अनुक्रम

किसी भी पुनरावर्ती सूत्र या नियम में केवल एक ही पूर्व पद सम्मिलित नहीं होता है, इसमें दो या दो से अधिक पूर्व पद सम्मिलित हो सकते हैं।

ऐसे अनुक्रम का सबसे प्रसिद्ध उदाहरण $V_1, V_2, V_3, \ldots$ है, जहाँ $V_1 = 1$, $V_2 = 2$ और $V_n = V_{n-1} + V_{n-2}$ है, जब $n \geq 3$ हो। गणना करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$V_3 = V_2 + V_1 = 2 + 1 = 3$$
$$V_4 = V_3 + V_2 = 3 + 2 = 5$$
$$V_5 = V_4 + V_3 = 5 + 3 = 8$$

अत: अनुक्रम प्राप्त होता है—

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

जिसमें प्रत्येक पद, पूर्व के दो पदों का योग करने पर प्राप्त होता है।

क्या आप इस अनुक्रम के आगामी दो पद लिख सकते हैं?

क्या आप विगत कक्षाओं में अध्ययन किए इस अनुक्रम को पहचानते हैं? बिल्कुल सही, यह विरहांक-फिबोनाची अनुक्रम है! इसे सर्वप्रथम आचार्य कवि विरहांक द्वारा सातवीं शताब्दी में अपनी कृति *वृत्तजातिसमुच्चय* में लिखा गया था। उन्होंने इसका अन्वेषण प्राकृत मीटर और कविता के संदर्भ में किया था। इसका विस्तृत अध्ययन भाषाविद-गणितज्ञ गोपाल (लगभग 1135 सामान्य संवत) और हेमचंद्र (लगभग 1150 सामान्य संवत) द्वारा किया गया। आगे चलकर इस अनुक्रम का अध्ययन इटली के गणितज्ञ फिबोनाची (लगभग 1200 सामान्य संवत) द्वारा भी किया गया।

विरहांक अनुक्रम संपूर्ण गणित एवं विज्ञान विषयों में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। हम आगामी कक्षाओं में पुन: इस अनुक्रम को कई बार देखेंगे।

प्रश्नावली 8.1

1. उस अनुक्रम के प्रथम पाँच पदों को ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद निम्नलिखित प्रकार से दिया गया है—

   (i) $t_n = 3n - 4$ (ii) $t_n = 2 - 5n$ (iii) $t_n = n^2 - 2n + 3$ जहाँ $n \geq 1$ हो।
2. अनुक्रम $t_n = 5n - 3$ हो, जबकि $n \geq 1$ के 10वें एवं 15वें पदों को ज्ञात कीजिए।
3. निर्धारित कीजिए कि क्या 97 और 172 अनुक्रम $t_n = 5n - 3$ के पद हैं, जबकि $n \geq 1$ है।
4. अनुक्रम $t_n = 5n - 3$ जहाँ $n \geq 1$ है, में कौन-सा पद 607 है?
5. एक अनुक्रम $t_1 = -5$, $t_{n+1} = t_n + 3$ पुनरावर्ती सूत्र द्वारा दर्शाया जाता है, जब $n \geq 1$ हो। अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए। क्या इस अनुक्रम का एक पद 52 है? यदि हाँ, तो यह अनुक्रम का कौन-सा पद है?

© NCERT not to be republished

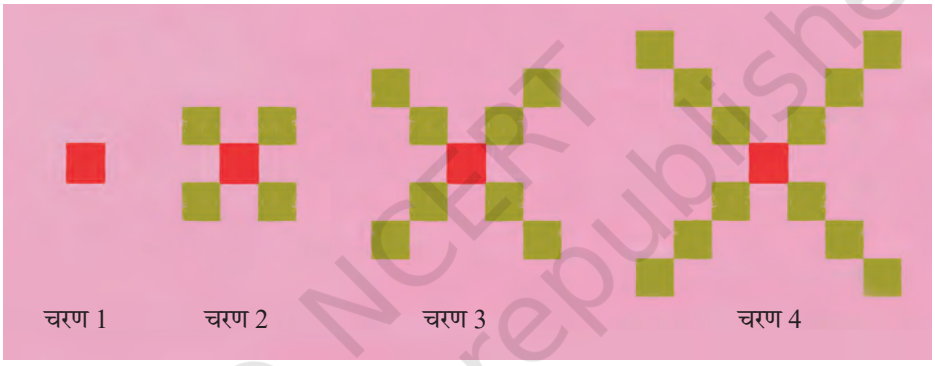
6. मान लीजिए, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 4$ और $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ हो, जबकि $n \geq 4$ है। T_4, T_5, T_6, T_7, और T_8 ज्ञात कीजिए।

8.4 समानांतर श्रेढ़ियाँ

अब तक हमने अध्ययन किया कि अनुक्रम, संख्याओं की ऐसी क्रमिक सूची है, जो किसी विशेष सूत्र का पालन करती है। यद्यपि, ऐसे अनुक्रम भी हो सकते हैं, जैसे कि अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम, जिसके सूत्र में कोई नियमितता (समरूपता) नहीं होती।

हम इस अनुभाग में, एक विशेष प्रकार के अनुक्रमों का अन्वेषण करेंगे, जो **समानांतर श्रेढ़ी** कहलाते हैं।

आइए, चित्र 8.3 में दिए गए वर्गों के बढ़ते हुए प्रतिरूप को देखते हैं। चित्र में प्रतिरूप के प्रथम चार चरणों को दर्शाया गया है।



चित्र 8.3 — वर्गों का बढ़ता हुआ प्रतिरूप

यदि हम प्रत्येक चरण में छोटे वर्गों की संख्या गिनते हैं तो हमें अनुक्रम 1, 5, 9, 13 प्राप्त होता है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप अनुक्रम के 5वें और 6वें चरण में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 10, 11 और 12 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 20 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप किसी भी चरण में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

हम देखते हैं कि प्रत्येक चरण में, पिछले चरण के प्रतिरूप के कोने के बिंदुओं से 4 वर्ग जुड़ जाते हैं। आगामी चरणों में वर्गों की संख्या को इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$1, 1 + 4, 1 + 4 + 4, 1 + 4 + 4 + 4, \ldots$$

© NCERT not to be republished

इसे पुन: इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$$1, 1 + 1 \times 4, 1 + 2 \times 4, 1 + 3 \times 4, \ldots$$

यदि हम इन व्यंजकों को किसी अनुक्रम के पदों की तरह मानते हैं, तो हमें प्राप्त होता है—

$$t_1 = 1, t_2 = 1 + 1 \times 4, t_3 = 1 + 2 \times 4, t_4 = 1 + 3 \times 4$$

और इसी प्रकार आगे भी पद चलते रहते हैं। अत: हम nवें पद को $t_n = 1 + (n - 1) \times 4$ के रूप में लिख सकते हैं, जिसे हल करने पर $t_n = 4n - 3$ प्राप्त होता है।

चित्र 8.3 में वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करने वाले अनुक्रम में प्रारंभिक छह पद 1, 5, 9, 13, 17, 21 हैं। हम देखते हैं कि दो क्रमिक पदों के बीच अंतर अचर मान 4 है। ऐसे अनुक्रम जिनमें दो क्रमिक पदों के बीच अंतर अचर हो समानांतर श्रेढ़ियाँ (APs) कहलाते हैं।

सोचिए और विचार कीजिए

इस अध्याय में अब तक हमने जिन अनुक्रमों पर चर्चा की है, उन पर विचार कीजिए। उनमें से कौन-सी समानांतर श्रेढ़ियाँ हैं और कौन-सी नही हैं? क्या आप अपने कथन को सिद्ध कर सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए अनुक्रम के nवें पद $t_n = 1 + (n - 1) \times 4$ में 1 अनुक्रम का प्रथम पद है और 4 'सार्व अंतर' है। इसी प्रकार, अनुक्रम 1, 4, 7, 10, ... का nवाँ पद $t_n = 1 + (n - 1) \times 3$ है, जिसमें 1 प्रथम पद है और 3 सार्व अंतर है। अनुक्रम 11, 7, 3, –1, –5, ... में संख्याओं में 4 की कमी होती जाती है। यह भी एक समानांतर श्रेढ़ी है, जिसमें प्रथम पद 11 है और सार्व अंतर – 4 है।

सामान्यत: किसी समानांतर श्रेढ़ी (AP) की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है—

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots, a + (n - 1) \times d$$

जहाँ 'a' **प्रथम पद** है और 'd' **सार्व अंतर** है। इस प्रकार, $t_n = a + (n - 1) \times d$, a और d के स्थिर मान के लिए समानांतर श्रेणी के nवें पद के लिए व्यंजक है।

8.4.1 समानांतर श्रेढ़ी का दृश्यांकन

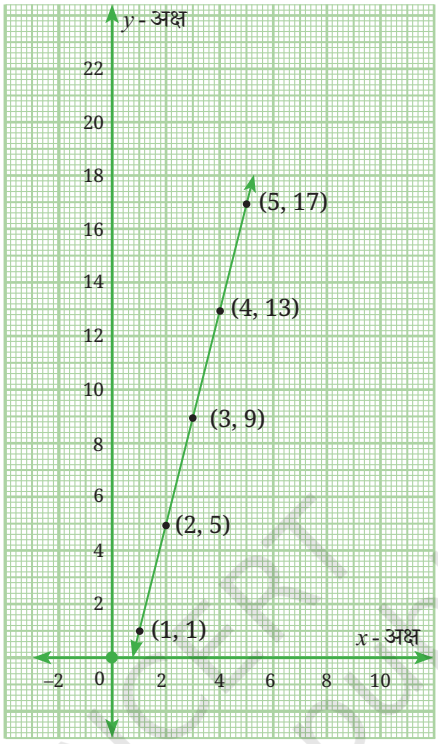
आइए, चित्र 8.3 में वर्गों के बढ़ते प्रतिरूप पर वापस चलते हैं और प्रत्येक चरण में छोटे वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करने वाली तालिका तैयार करते हैं।

चरण संख्या	1	2	3	4	5	…	n
वर्गों की संख्या	1	5	9	13	17	…	$4n - 3$

आइए, ऊपर दी गई तालिका में दी हुई जानकारी का उपयोग करते हुए क्रमिक युग्म (x, y) बनाते हैं, जिसमें x चरण संख्या को और y संगत वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करता है। जब हम तालिका से प्राप्त क्रमिक युग्मों (1, 1), (2, 5), (3, 9), (4, 13), (5, 17) को आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करते हैं

© NCERT not to be republished

तो हम देखते हैं कि वे एक सरल रेखा पर स्थित हैं। इसे चित्र 8.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.4 —रैखिक प्रतिरूप द्वारा प्रदर्शित वर्गों का बढ़ता प्रतिरूप

प्रश्न — सत्यापित कीजिए कि नीचे दिए गए अनुक्रम समानांतर श्रेढ़ियाँ हैं और उनके nवें पद लिखिए। इन अनुक्रमों से प्राप्त क्रमिक युग्मों को आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करने पर आप क्या अवलोकन करते हैं?

(i) 2, 5, 8, 11, … (ii) –5, –1, 3, 7, …

प्रश्न — सूत्र $t_n = a + (n - 1) \times d$ का उपयोग करते हुए नीचे दी गई समानांतर श्रेढ़ियों के nवें पद ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \ldots$ (ii) 1.5, 3.5, 5.5, 7.5, …

ध्यान दीजिए कि $t_n = a + (n - 1) \times d$, किसी समानांतर श्रेढ़ी के nवें पद को ज्ञात करने के लिए व्यापक सूत्र है। क्या हम पुनरावर्ती सूत्र को भी ज्ञात कर सकते हैं? हाँ, यह सूत्र $t_1 = a$, $t_n = t_{n-1} + d$ है जबकि $n \geq 2$ है।

© NCERT not to be republished

समानांतर श्रेढ़ी 1, 5, 9, 13, 17, ... पर पुन: विचार कीजिए। चूँकि प्रत्येक पद पूर्व पद से 4 अधिक है, तो इस अनुक्रम को लिखने की अन्य विधि है $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + 4$ जहाँ $n \geq 2$ है। आप स्वयं ही सत्यापित कीजिए कि इस पुनरावर्ती सूत्र से अनुक्रम के पद प्राप्त होते हैं।

प्रश्न — पूर्व के प्रश्नों में समानांतर श्रेढ़ियों के लिए पुनरावर्ती सूत्र ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5 — एक व्यक्ति शहर में घूमने के लिए एक टैक्सी किराए पर लेता है। टैक्सी कंपनी एक निश्चित आरक्षण शुल्क (बुकिंग) ₹200 लेती है और ₹40 प्रत्येक किलोमीटर (कि.मी.) यात्रा के लिए लेती है। आइए 1 कि.मी., 2 कि.मी., 3 कि.मी., आदि यात्रा के लिए कुल किराए को प्रदर्शित करने वाला अनुक्रम लिखते हैं। यदि वह व्यक्ति 10 कि.मी. लंबी यात्रा करता है तो कुल किराया कितना होगा?

चूँकि निर्धारित बुकिंग राशि ₹200 है, तो 1 कि.मी.की यात्रा के बाद किराया ₹200 + ₹40 = ₹240 होगा, 2 कि.मी.की यात्रा के बाद किराया ₹200 + ₹80 = ₹280 होगा और 3 कि.मी.की यात्रा के बाद किराया ₹200 + ₹120 = ₹320 होगा। अनुक्रम 240, 280, 320, ... एक समानांतर श्रेढ़ी है जिसमें प्रथम पद 240 है और सार्व अंतर 40 है। अनुक्रम का nवाँ पद $240 + (n - 1) \times 40$ $= 240 + 40n - 40 = 200 + 40n$ है, जहाँ n कि.मी.में तय की गई यात्रा को प्रदर्शित करता है।

8.5 आरंभिक n प्राकृत संख्याओं का योग

इस अनुभाग में, हम प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योग के लिए एक सरल किंतु महत्वपूर्ण सूत्र का निगमन करेंगे। इसे प्रारंभ करने के लिए, क्या आप प्रथम दस प्राकृत संख्याओं का योगफल उनका वास्तव में योग किए बिना ज्ञात कर सकते हैं।

आइए, एक विशिष्ट दृष्टिकोण से प्रयास करते हैं। मान लीजिए S प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के योगफल को प्रदर्शित करता है। इस प्रकार, $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ है। हम इसे $S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ भी लिख सकते हैं। यदि हम इन दोनों समीकरणों को एक के नीचे एक लिखते हैं तो हम कुछ रोचक देखते हैं।

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$
$$S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

दोनों समीकरणों में संगत संख्याओं के प्रत्येक युग्म, $1 + 10, 2 + 9, 3 + 8, ..., 10 + 1$ में योगफल 11 प्राप्त होता है।

इस प्रकार, S के दोनों समीकरणों का योग करने पर हमें प्राप्त होता है—

$2S = 11 + 11 + 11 + ... + 11$ (अर्थात, 11 का 10 बार योग)

इससे हमे $2S = 110$ या $S = 55$ प्राप्त होता है। प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का योगफल वास्तव में 55 है।

© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

क्या इसी विधि द्वारा $1 + 2 + 3 + ... + 100$ का योगफल ज्ञात किया जा सकता है?

इस विधि द्वारा संख्याओं को 1 से किसी संख्या तक योग के रूप में लिखना, फिर इस योग को व्युत्क्रम रूप (पीछे से आगे) में लिखना, फिर इन दोनों व्यंजकों का योग करना; इसके द्वारा n के किसी भी मान के लिए प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात करने का सूत्र निकाला (प्राप्त किया) जा सकता है।

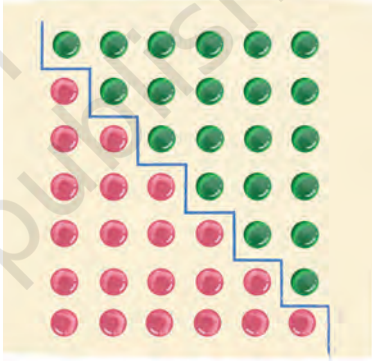
मान लीजिए, $S = 1 + 2 + ... + n$

तब $S = n + (n - 1) + ... + 1$

अत: $2S = n(n + 1)$ है। हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $S = \frac{n(n+1)}{2}$ है।

हम इस तर्क पर चित्रात्मक रूप से भी विचार कर सकते हैं।

चित्र 8.5 में आरेख $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ योग के लिए विधि को प्रदर्शित करता है। ध्यान दीजिए कि चित्र में घुमावदार विभाजन के ऊपर और नीचे वृत्तों के दो समूह सन्निहित हैं, जो योग $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ को प्रदर्शित करते हैं। कुल वृत्त 7×6 विमाओं वाली आयताकार व्यवस्था बनाते हैं।



$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7 \times 6$

चित्र 8.5

इस प्रकार, चित्र 8.5, $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7 \times 6$ तथ्य को दर्शाता है।

इसे भी योगफल ज्ञात करने के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

जो है, $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 10 \times 11$

सामान्य रूप में, $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) = n \times (n + 1)$

इस प्रकार, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

यदि हम प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योगफल को दर्शाने के लिए संकेतक S_n का उपयोग करते हैं, तब $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ है।

© NCERT not to be republished

इस परिणाम का प्रथम ज्ञात लिखित उल्लेख आर्यभट्ट के ग्रंथ *आर्यभटीयम* के अध्याय 2 के छंद 19 में देखा जा सकता है। यह छंद योग की गणना करने की दो विधियाँ बताता है जिसमें दूसरा भाग बताता है कि योग की गणना पहले और अंतिम पदों के योग को दो से विभाजित करके (औसत) और पदों की संख्या से गुणा करके की जा सकती है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप ऊपर दिए गए सूत्र का उपयोग S_{20}, S_{50} या S_{1000} ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं?

साथ ही, इस सूत्र का उपयोग क्रमागत संख्याओं का योगफल ज्ञात करने में किया जा सकता है जैसे कि $25 + 26 + 27 + ... + 58$ का योगफल ज्ञात करने में।

ध्यान दीजिए कि $25 + 26 + 27 + ... + 58 = (1 + 2 + 3 + ... + 58) - (1 + 2 + 3 + ... 24)$

$= S_{58} - S_{24} = \frac{58 \times 59}{2} - \frac{24 \times 25}{2} = 29 \times 59 - 12 \times 25 = 1711 - 300 = 1411.$

सोचिए और विचार कीजिए

आइए, त्रिभुजाकार संख्याओं 1, 3, 6, 10, 15, ... के अनुक्रम t_n पर पुन: विचार करते हैं, जिसे चित्र 8.1 में दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि इस अनुक्रम का nवाँ पद, प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग है।

इस प्रकार $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ है।

क्या आप इस सूत्र का उपयोग 10वीं, 17वीं और 80वीं त्रिभुजाकार संख्याएँ प्राप्त करने में कर सकते हैं?

प्रश्नावली 8.2

1. समानांतर श्रेढ़ी 3, 8, 13, 18, ... के 10वें और 26वें पद ज्ञात कीजिए।
2. समानांतर श्रेढ़ी 21, 18, 15, ... का कौन-सा पद – 81 है? साथ ही क्या 0 इस समानांतर श्रेढ़ी का एक पद है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. समानांतर श्रेढ़ी 11, 8, 5, 2, ... का nवाँ पद ज्ञात कीजिए। इस श्रेढ़ी के लिए पुनरावर्ती सूत्र लिखिए।
4. एक समानांतर श्रेढ़ी में 50 पद हैं यदि श्रेढ़ी का तीसरा पद 12 और अंतिम पद 106 है तो इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

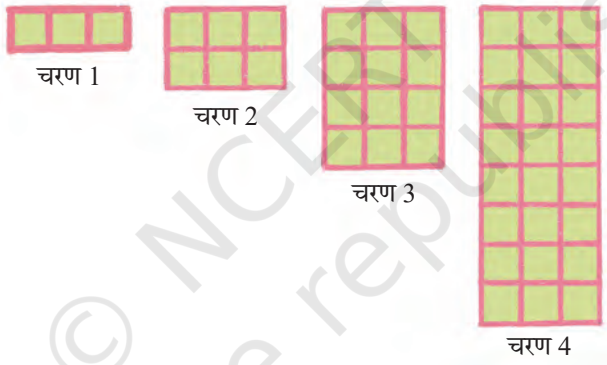
   (**संकेत** — यदि 'a' प्रथम पद हो तथा 'd' सार्व अंतर हो, तब हमें दो समीकरण $a + 2d = 12$ और $a + 49d = 106$ प्राप्त होता है। रैखिक समीकरणों के इस युग्म को 'a' तथा 'd' के लिए हल कीजिए)।

© NCERT not to be republished

5. कितनी 2-अंकीय संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं? इन सभी 2-अंकीय संख्याओं का योगफल क्या है?
6. हरीश ने कोई कार्य (नौकरी) ₹5,00,000 वार्षिक आय से प्रारंभ की और प्रतिवर्ष ₹20,000 वेतन-वृद्धि के रूप में प्राप्त किए। कितने वर्षों के बाद उसकी आमदनी ₹7,00,000 हुई होगी?
7. एक बच्चा कंचों को पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करता है कि पहली पंक्ति में 1 कंचा है, दूसरी पंक्ति में 2 कंचे हैं, तीसरी पंक्ति में 3 कंचे हैं तथा इसी प्रकार से 25वीं पंक्ति तक कंचे रखे गए हैं। बच्चा इनमे में कुल कितने कंचों का उपयोग करता है?

8.6 गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ

इस अनुभाग में, हम एक अन्य विशेष प्रकार के अनुक्रम का अन्वेषण करेंगे, जो **गुणोत्तर श्रेढ़ी** कहलाता है। चित्र 8.6 में प्रदर्शित वर्गों के बढ़ते प्रतिरूप पर विचार कीजिए। चित्र में प्रतिरूप के प्रथम चार चरण प्रदर्शित किए गए हैं।



चित्र 8.6—वर्गों का बढ़ता हुआ प्रतिरूप

यदि हम प्रतिरूप के चार चरणों में हरे वर्गों की कुल संख्या गिनते हैं, तो हमें अनुक्रम 3, 6, 12, 24 प्राप्त होता है।

सोचिए और विचार कीजिए

क्या आप प्रतिरूप के चरण 5 और 6 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 10, 11 और 12 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? क्या आप चरण 20 में वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? ऊपर दिया गया प्रतिरूप चित्र 8.3 के बढ़ते प्रतिरूप से किस प्रकार भिन्न है?

हम देखते हैं कि प्रत्येक चरण में, वर्गों की संख्या पिछले चरण में वर्गों की संख्या की दोगुनी है। आगामी चरणों में वर्गों की संख्या 3, 3 + 3 = 6, 6 + 6 = 12, 12 + 12 = 24, ... है।

© NCERT not to be republished

इसे पुन: इस प्रकार लिखा जा सकता है—

$3, 3 \times 2, 3 \times 4, 3 \times 8, \ldots$ या $3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, \ldots$

यदि हम इन व्यंजकों को एक अनुक्रम के पदों के रूप में मानते हैं तो हमें प्राप्त होता है—

$$t_1 = 3, t_2 = 3 \times 2, t_3 = 3 \times 2^2, t_4 = 3 \times 2^3$$

एवं इसी प्रकार आगे भी पद हैं। हम nवें पद को $t_n = 3 \times 2^{(n-1)}$ के रूप में लिख सकते हैं। पुनरावर्ती सूत्र के रूप में हम $t_1 = 3$ और $t_n = 2t_{n-1}$, जहाँ $n \geq 2$ हो, लिख सकते हैं।

अनुक्रम के प्रथम छ: पद 3, 6, 12, 24, 48, 96 हैं। अनुक्रम का प्रत्येक पद, पिछले पद को 2 गुणा करने पर प्राप्त होता है। यह **अचर गुणक** अनुक्रम का **सार्व अनुपात** भी कहलाता है। हम देखते हैं कि पदों के क्रमागत युग्मों का अनुपात सभी में समान है।

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = 2$$

सार्व अनुपात के साथ ऐसा अनुक्रम **गुणोत्तर श्रेढ़ी** कहलाता है। व्यापक रूप में **गुणोत्तर श्रेढ़ी** की व्याख्या अनुक्रम $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$ के रूप में की जा सकती है जहाँ 'a' **प्रथम पद** है, 'r' **सार्व अनुपात** है और $t_n = ar^{n-1}$, ***n*वाँ पद** है।

उदाहरण 6 — क्या $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो सार्व अनुपात क्या है?

उदाहरण 7 — क्या $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो सार्व अनुपात क्या है?

उदाहरण 8 — क्या $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है? यदि हाँ, तो सार्व अनुपात क्या है?

उदाहरण 9 — जाँच कीजिए कि क्या अनुक्रम $5, \frac{15}{4}, \frac{45}{16}, \frac{135}{64}, \ldots$ एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है। इसका nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

दिए गए अनुक्रम में $t_1 = 5, t_2 = \frac{15}{4}, t_3 = \frac{45}{16}, t_4 = \frac{135}{64}$

आइए, पदों के क्रमागत युग्मों के अनुपात की गणना करते हैं।

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{15}{4} \div 5 = \frac{15}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{45}{16} \div \frac{15}{4} = \frac{45}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{135}{64} \div \frac{45}{16} = \frac{135}{64} \times \frac{16}{45} = \frac{3}{4}$$

पदों के क्रमागत युग्मों का अनुपात अचर $\frac{3}{4}$ है। अत: दिया गया अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसमें $a = 5$ और $r = \frac{3}{4}$ है। nवाँ पद $= a \times r^{(n-1)} = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ है। इस व्यंजक में n को $1, 2, 3, \ldots$ से विस्थापित कीजिए और जाँचिए कि क्या आपको दिए गए अनुक्रम के पद प्राप्त होते हैं।

© NCERT not to be republished

प्रश्न — जाँचिए कि क्या नीचे दिए गए अनुक्रम गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ हैं और उनके nवें पद ज्ञात कीजिए।

(i) 2, 10, 50, 250, …

(ii) $4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \ldots$

(iii) $3, \frac{-3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{8}, \ldots$

प्रश्न — क्या आप सूत्र $t_n = 3 \times 10^{n-1}$ के लिए पुनरावर्ती सूत्र का पता लगा सकते हैं, जिससे गुणोत्तर श्रेढ़ी 3, 30, 300, 3000, ... बनती है?

8.6.1 फ्रैक्टल्स के साथ आनंद

कक्षा 8 की गणित की पाठ्यपुस्तक से अन्य रोचक प्रतिरूप का स्मरण कीजिए जैसा कि चित्र 8.7 में दर्शाया गया है। चरण 0, समबाहु त्रिभुज के आकार में काटे गए एक कागज के टुकड़े को प्रदर्शित करता है। आइए, त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाते हैं, जिससे चार छोटे समबाहु त्रिभुज प्राप्त होते हैं। अब मध्य में स्थित त्रिभुज को हटा दीजिए। आपको चरण 1 में दर्शाया गया चित्र प्राप्त होगा जिसके मध्य में त्रिभुजाकार रिक्त होगी। इसी प्रक्रिया को चरण 1 में सभी तीन काले त्रिभुजों पर दोहराइए। इससे आपको चरण 2 में प्रदर्शित चित्र प्राप्त होगा। इसी विधि से हम चरण 2 से चरण 3 तक पहुँचते हैं। इस प्रक्रिया को निरंतर जारी रखा जा सकता है। इस आकर्षक प्रतिरूप को **सिएरपिंस्की त्रिभुज** कहा जाता है। वास्तव में, यह एक फ्रैक्टल है। फ्रैक्टल के विषय में और अधिक अध्ययन हम आगामी कक्षाओं में करेंगे।



चरण 0 चरण 1 चरण 2 चरण 3

चित्र 8.7

वाक्लाव सिएरपिंस्की (1882–1969) एक पोलिश गणितज्ञ थे, जिन्हें गणित में उनके अनेक योगदानों के लिए जाना जाता हैं, जिसमें सिएरपिंस्की गास्केट भी सम्मिलित है, जो फ्रैक्टल्स के सबसे प्रारंभिक और सबसे प्रसिद्ध उदाहरणों में से एक है।



© NCERT not to be republished

सोचिए और विचार कीजिए

सिएरपिंस्की त्रिभुज का अवलोकन कीजिए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास कीजिए।

(क) चित्र 8.7 में चरण 0 से चरण 3 तक कितने काले त्रिभुज हैं?

(ख) क्या आप चरण 4 और चरण 5 में काले त्रिभुजों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

(ग) क्या आप nवें चरण में काले त्रिभुजों की संख्या के लिए सूत्र ज्ञात कर सकते हैं?

(घ) मान लीजिए चरण 0 में त्रिभुज का क्षेत्रफल (जो काला क्षेत्र है) 1 वर्ग इकाई है। चरण 1, 2 और 3 में काले क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या है? चरण 4 और 5 में काले क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा? nवें चरण में काले क्षेत्र के क्षेत्रफल के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए। चरणों की संख्या n के बढ़ने के साथ इस क्षेत्रफल में क्या अंतर आता है?

हम देखते हैं कि चरण 0, 1, 2 और 3 में काले त्रिभुजों की संख्या क्रमश: 1, 3, 9 और 27 है। वास्तव में, प्रत्येक चरण में प्रत्येक काला त्रिभुज अगले चरण में तीन छोटे त्रिभुजों से विस्थापित कर दिया जाता है। इस प्रकार, प्रत्येक चरण में काले त्रिभुजों की संख्या, पिछले चरण में त्रिभुजों की संख्या से तीन गुना है।

चरण 4 और 5 में काले त्रिभुजों की संख्या 81 और 243 होगी।

ध्यान दीजिए कि अनुक्रम 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है, क्योंकि अनुक्रम का प्रत्येक आगामी पद पिछले पद को 3 से गुणा करने पर प्राप्त किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, उस अनुक्रम के सभी पद 3 की घातें है — $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$ और इसी प्रकार आगे भी पद हैं। इसी प्रक्रिया को जारी रखते हुए हम देखते हैं कि 3 की घात, चरण संख्या के बराबर है जैसा कि तालिका 1 में दर्शाया गया है। इस प्रकार सिएरपिंस्की त्रिभुज अनुक्रम के nवें चरण में काले त्रिभुजों की संख्या 3^n से दी जाती है। चरण संख्या बढ़ने के साथ काले त्रिभुजों की संख्या अत्यंत तीव्रता से बढ़ती है। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

काले क्षेत्र के क्षेत्रफल के विषय में क्या कहा जा सकता है? चरण 1 में, चरण 0 का समबाहु त्रिभुज 4 समान भागों में बाँटा जाता है और मध्य भाग को हटा दिया जाता है। इसका अर्थ है कि यदि चरण 0 में काला क्षेत्र 1 वर्ग इकाई है तो चरण 1 में काला क्षेत्र $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई होगा। यह प्रक्रिया चरण 1 से चरण 2 प्राप्त करने के लिए दोहराई जाती है।

अत: चरण 2 में काला क्षेत्र, चरण 1 में काले क्षेत्र का $\frac{3}{4}$ भाग होगा जो $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$ के समान है। क्या आप व्याख्या कर सकते हैं कि क्यों चरण n में काला क्षेत्र $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ होगा?

© NCERT not to be republished

प्रत्येक चरण में काले क्षेत्र के क्षेत्रफल से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है, जिसमें अनुक्रम का प्रत्येक उत्तरोत्तर पद, पिछले पद को $\frac{3}{4}$ से गुणा करने पर प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार काले त्रिभुजों की संख्या तीव्रता से बढ़ने के साथ त्रिभुजों का कुल क्षेत्रफल घटता है।

तालिका 1

चरण (n)	0	1	2	3	4	5	…	n
काले त्रिभुजों की संख्या (t_n)	$1 = 3^0$	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	$243 = 3^5$	…	3^n
छायांकित क्षेत्रफल (s_n)	1	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	…	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$

किसी भी चरण में काले त्रिभुजों की संख्या और काले क्षेत्र के क्षेत्रफल के लिए व्यापक सूत्र क्रमशः $t_n = 3^n$ और $s_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ द्वारा दिया जाता है। इन दोनों के लिए पुनरावर्ती सूत्र हैं—

$t_1 = 1, t_n = 3 \times t_{n-1}$ जहाँ $n \geq 2$ और $s_1 = 1, s_n = \frac{3}{4} \times s_{n-1}$ जहाँ $n \geq 2$ है।

फ्रैक्टल्स वे आकृतियाँ या प्रतिरूप हैं, जिनका वही रूप विभिन्न स्तरों पर बार-बार दिखाई देता है। इसका अर्थ है कि यदि आप फ्रेक्टल के किसी छोटे से भाग को विस्तारित करके देखते हैं, तो यह संपूर्ण आकृति या प्रतिरूप के समान दिखाई देता है! फ्रैक्टल्स प्रकृति में सभी जगह पाए जाते हैं, जैसे कि वृक्षों की शाखाओं में, सब्जियों जैसे फूलगोभी या ब्रोकली में, हिमकण (स्नोफ्लेक्स) की आकृति में या तटीय रेखाओं के प्रतिरूप में, वे सरल नियमों के उपयोग द्वारा बनाए (रचित किए) जा सकते हैं, किंतु बहुत ही जटिल और सुंदर अभिकल्पनाएँ (डिजाइन) बना सकते हैं। फ्रैक्टल्स हमें प्रकृति में प्रतिरूपों को समझने में सहायता करते हैं और साथ ही हमें गणित में महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं की ओर ले जाते हैं।



चित्र 8.8

8.6.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी का दृश्यांकन

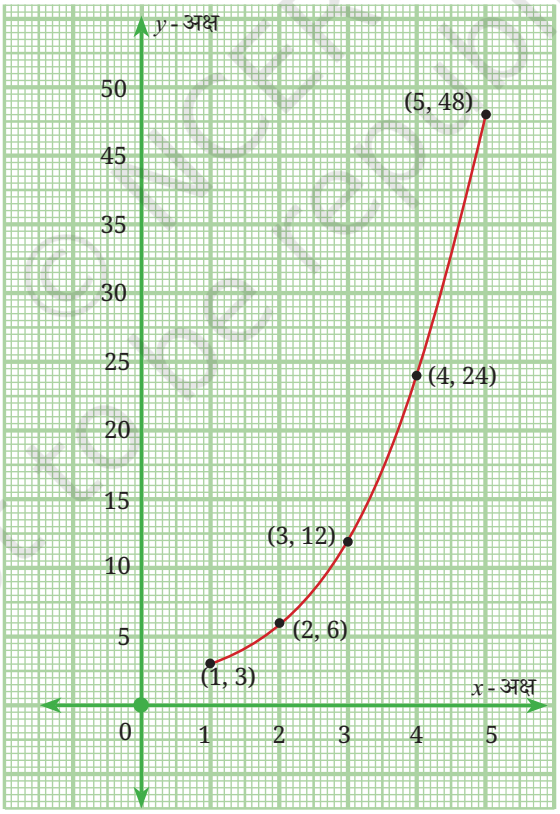
आइए, चित्र 8.6 में वर्गों के बढ़ते हुए प्रतिरूप को पुनः देखते हैं और प्रत्येक चरण में हरे वर्गों की संख्या प्रदर्शित करने वाली तालिका बनाते हैं।

© NCERT not to be republished

चरण संख्या	1	2	3	4	5	…	n
वर्गों की संख्या	3	6	12	24	48	…	$3 \times 2^{n-1}$

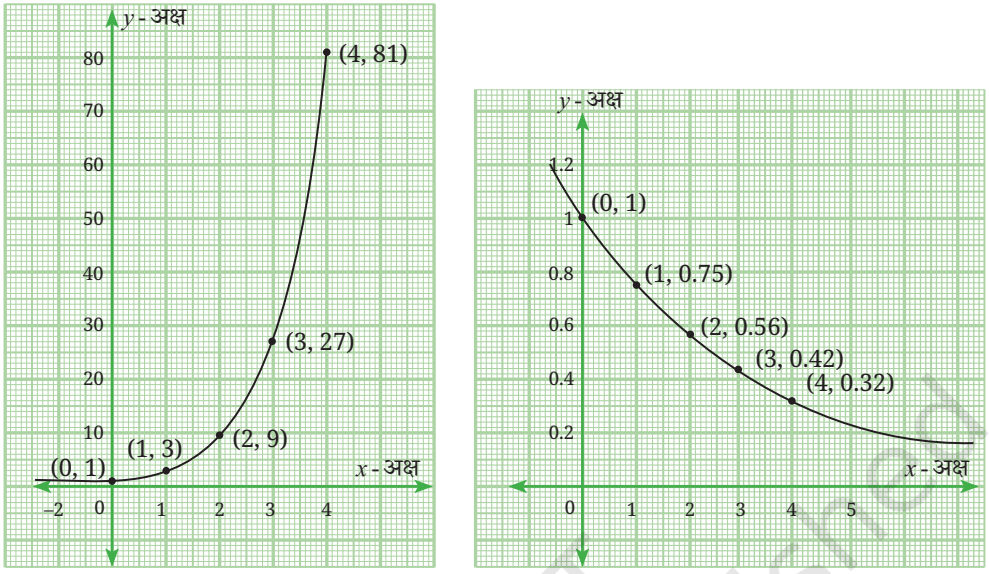
आइए, संख्याओं के युग्म (x, y) पर विचार करते हैं जहाँ x, चरण संख्या को प्रदर्शित करता है और y संगत वर्गों की संख्या को प्रदर्शित करता है। जब हम ऊपर दी गई तालिका से प्राप्त क्रमिक युग्मों के आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करते हैं अर्थात युग्मों (1, 3), (2, 6), (3, 12), (4, 24), (5, 48) को प्रदर्शित करते हैं तो हम देखते हैं कि वे एक सरल रेखा पर स्थित नहीं हैं। इसे चित्र 8.9 में दर्शाया गया है।

इसी प्रकार, जब हम संख्याओं के युग्मों (x, y) को आलेख पत्रक पर प्रदर्शित करते हैं जहाँ x चरण संख्या को प्रदर्शित करता है और y सिएरपिंस्की त्रिभुज में काले त्रिभुजों की संख्या को प्रदर्शित करता है, तो हमें चित्र 8.10 (क) में दिया गया आलेख प्राप्त होता है। चित्र 8.10 (ख) उस आलेख को दर्शाता है, जिसमें चरण संख्याओं को x - अक्ष पर और उन चरणों में काले क्षेत्र के क्षेत्रफल को y - अक्ष पर प्रदर्शित किया गया है। आलेख से हमें पता चलता है कि चरण संख्याओं के बढ़ने के साथ छायांकित त्रिभुजों की संख्या बहुत तीव्रता से बढ़ती है, जबकि काले क्षेत्र का क्षेत्रफल कम होता जाता है और 0 के निकटतम होता जाता है।



चित्र 8.9 — गुणोत्तर श्रेढ़ी से प्राप्त बिंदु एक सरल रेखा पर स्थित नहीं हैं

© NCERT not to be republished



चित्र 8.10 — सिएरपिंस्की त्रिभुज के चरणों से प्राप्त होने वाले बिंदु गुणोत्तर श्रेढ़ी का निर्माण करते हैं

यहाँ एक अन्य उदाहरण दिया गया है, जिसमें एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है।

उदाहरण 10 — एक गेंद भूमि से 24 फुट की ऊँचाई से गिराई जाती है। प्रत्येक बार गेंद भूमि से टकराकर इसकी पिछली ऊँचाई के $\left(\frac{3}{4}\right)$वाँ भाग ऊँचाई तक ऊपर जाती है।

(क) क्या आप गेंद के (भूमि से टकराकर वापस जाने की पाँच क्रमिक घटनाओं) पाँच उछालों में गेंद को प्राप्त ऊँचाइयों की संख्याओं का अनुक्रम लिख सकते हैं?

(ख) प्रारंभ में गेंद को गिराए जाने की ऊँचाई के $\frac{1}{6}$ वें भाग से कम ऊँचाई तक गेंद के पहुँचने के लिए गेंद को गिराए जाने के कितने प्रयासों (उछालों) की आवश्यकता है?

गेंद के प्रत्येक उछाल (भूमि से टकराकर वापस ऊपर जाने की प्रत्येक घटना) में गेंद को प्राप्त अधिकतम ऊँचाइयों का अनुक्रम है —

प्रथम उछाल – $24 \times 0.75 = 18$ फुट

दूसरी उछाल – $18 \times 0.75 = 13.5$ फुट

तीसरी उछाल – $13.5 \times 0.75 = 10.125$ फुट

चौथी उछाल – $10.125 \times 0.75 = 7.59375$ फुट

पाँचवी उछाल – $7.59357 \times 0.75 = 5.695$ फुट

छठी उछाल – $5.695 \times 0.75 = 4.27125$ फुट

सातवीं उछाल – $4.27125 \times 0.75 = 3.2034375$ फुट



चित्र 8.11

ऊँचाइयों के अनुक्रम से एक गुणोत्तर श्रेढ़ी प्राप्त होती है, जिसमें $a = 18$ और $r = 0.75$ (या $\frac{3}{4}$) है। गुणोत्तर श्रेढ़ी 18, 13.5, 10.125, 7.594, 4.27125, 3.2034375, ... है। हम देखते हैं कि सातवीं उछाल के बाद गेंद अपनी प्रारंभिक ऊँचाई के $\frac{1}{6}$ गुने से कम ऊँचाई तक जाती है।

प्रश्नावली 8.3

1. उस गुणोत्तर श्रेढ़ी का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका सार्व अनुपात 2 है और 8वाँ पद 192 है।
2. गुणोत्तर श्रेढ़ी 5, 25, 125, ... का 10वाँ पद तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।
*3. एक अनुक्रम का पुनरावर्ती सूत्र $t_1 = 2$, $t_{n+1} = 3t_n - 2$, जबकि $n \geq 1$ है। इस अनुक्रम का कौन-सा पद 730 है?
4. गुणोत्तर श्रेढ़ी 2, 6, 18, ... का कौन-सा पद 4374 है? इस श्रेढ़ी के nवें पद के लिए मानक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी लिखिए।
5. एक गेंद को 80 मीटर की ऊँचाई से गिराया जाता है। भूमि से टकराने के बाद गेंद अपनी प्रारंभिक ऊँचाई के 60 प्रतिशत तक भूमि के ऊपर जाती है। इसी प्रकार से गेंद की उछाल जारी रहती है अर्थात प्रत्येक बार गेंद भूमि से टकराकर अपनी पिछली ऊँचाई के 60 प्रतिशत तक ऊपर जाती है।
   (i) 5 उछालों के बाद गेंद कितनी ऊँचाई तक जाती है?
   (ii) गेंद द्वारा भूमि से छठी बार टकराने तक तय की गई कुल लंबवत दूरी कितनी है?

© NCERT not to be republished

6. अनुक्रम $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ का कौन-सा पद 128 है?

7. चित्र 8.12 में सिएरपिंस्की वर्ग कारपेट के चरण 0 से चरण 3 तक प्रदर्शित हैं। इस फ्रैक्टल का चरण 0 कागज का एक वर्गाकार पत्रक है। चरण 1 की रचना करने के लिए वर्ग की प्रत्येक भुजा को तीन समान भागों में बाँटा गया है और सम्मुख भुजाओं के त्रिविभाजक बिंदुओं को मिलाने पर नौ छोटे वर्ग प्राप्त होते हैं। तत्पश्चात मध्य में स्थित वर्ग को हटा दिया जाता है और 8 छोटे वर्गों के मध्य एक वर्गाकार रिक्ति शेष रह जाती है। यही प्रक्रिया आठ छोटे छायांकित वर्गों पर दोहराई जाती है, जिससे चरण 2 प्राप्त होता है और आगे भी यही प्रक्रिया जारी रहती है।



चित्र 8.12 — सिएरपिंस्की वर्ग कारपेट के चरण 0, 1, 2 और 3

चित्र 8.12 को देखिए और नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास कीजिए।

(i) चरण 0 से 3 तक कितने लाल वर्ग हैं?

(ii) क्या आप चरण 4 से 5 में लाल वर्गों की संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं?

(iii) क्या आप nवें चरण में लाल वर्गों की संख्या के लिए सूत्र ज्ञात कर सकते हैं? किसी भी चरण में लाल वर्गों की संख्या के लिए एक व्यापक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी लिखिए।

(iv) मान लीजिए चरण 0 में वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है। चरण 1, 2 और 3 में लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या है? चरण 4 और 5 में लाल क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना होगा? nवें चरण में लाल क्षेत्र के क्षेत्रफल के लिए व्यापक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी ज्ञात कीजिए। चरण संख्या n बढ़ने के साथ इस क्षेत्रफल में क्या अंतर आता है?

अंतिम प्रश्नावली

1. उस समानांतर श्रेढ़ी का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

2. उस समानांतर श्रेढ़ी का निर्धारण (की रचना) कीजिए, जिसका तीसरा पद 16 है और जिसका 7वाँ पद, 5वें पद से 12 अधिक है।

*3. कितनी 3-अंकीय संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

(**संकेत** — सभी 7 द्वारा विभाज्य संख्याएँ एक समानांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। ऐसी सबसे छोटी 3-अंकीय संख्या और सबसे बड़ी 3-अंकीय संख्या ज्ञात कीजिए।)

© NCERT not to be republished

*4. 4 के कितने गुणज 10 और 250 के बीच आते हैं?

(**संकेत** — 4 के सभी गुणज एक समानांतर श्रेढ़ी बनाते हैं। 10 और 250 के बीच आने वाले 4 के सबसे छोटे गुणज और सबसे बड़े गुणज ज्ञात कीजिए।)

*5. उस गुणोत्तर श्रेढ़ी की रचना (निर्माण) कीजिए, जिसके प्रारंभिक दो पदों का योगफल –4 है और जिसका पाँचवा पद, तीसरे पद का 4 गुना है।

*6. 100 को क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखने के सभी संभव विधियाँ ज्ञात कीजिए।

*7. किसी कल्चर (नमूने) में जीवाणुओं की संख्या प्रत्येक घंटे में दुगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में कल्चर (नमूने) में 30 जीवाणु विद्यमान थे, तो दूसरे घंटे के अंत में, चौथे घंटे के अंत में और nवें घंटे के अंत में कितने जीवाणु विद्यमान होंगे?

*8. किसी समानांतर श्रेढ़ी के चौथे और आठवें पदों का योगफल 24 है और छठे और दसवें पदों का योगफल 44 है। समानांतर श्रेढ़ी के पहले तीन पद ज्ञात कीजिए।

*9. n का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, जिससे प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल 1,000 से अधिक हो।

*10. गुणोत्तर श्रेढ़ी 2, 8, 32, ... का कौन-सा पद 131072 है? nवें पद के लिए व्यापक सूत्र और पुनरावर्ती सूत्र भी लिखिए।

*11. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{13}{12}$ है और उनका गुणनफल –1 है। श्रेढ़ी का सार्व अनुपात और पद ज्ञात कीजिए।

*12. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का चौथा, दसवाँ और सोलहवाँ पद क्रमश: x, y और z है। सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

*13. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल 26 है और उन पदों के वर्गों का योगफल 364 है। गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों को ज्ञात कीजिए।

*14. मान लीजिए कि $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ है और $n > 2$ के लिए $P_n = P_1 + P_2 + ... P_{n-1} + 1$ है। $P_1, P_2, \ldots, P_8$ के मान ज्ञात कीजिए। क्या आप P_n के लिए एक अधिक सरल पुनरावर्ती सूत्र ज्ञात कर सकते हैं? क्या आप एक व्यापक सूत्र बता सकते हैं?

*15. मान लीजिए $W_1 = 1$, $W_2 = 2$ और $n > 2$ के लिए $W_n = W_1 + W_2 + ... + W_{n-2} + 2$ है। $W_1, W_2, ..., W_8$ के मान ज्ञात कीजिए। क्या आप इस अनुक्रम को पहचानते हैं?

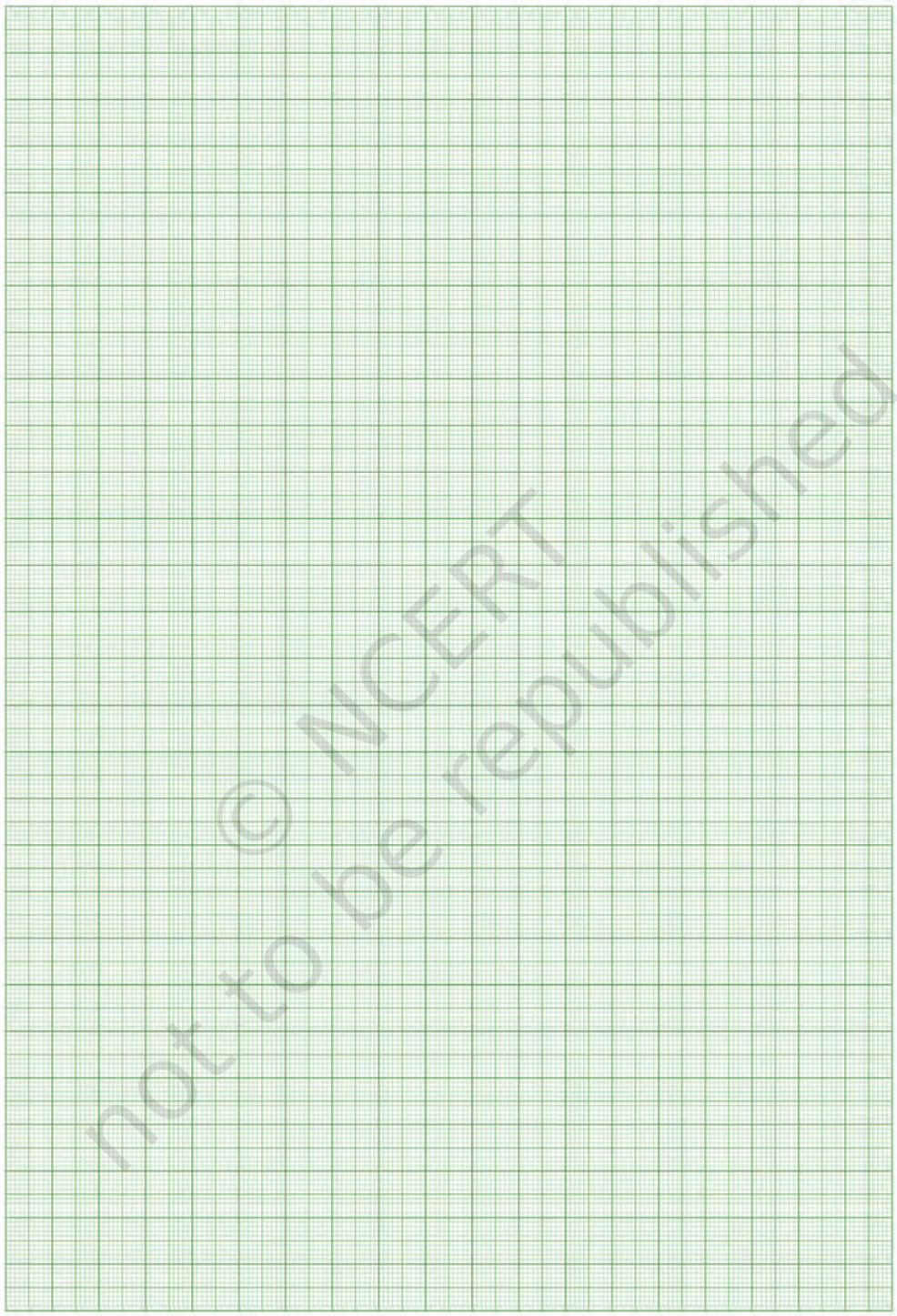
© NCERT not to be republished

सारांश

- कोई **अनुक्रम** संख्याओं की एक क्रमागत सूची है। इस सूची में प्रत्येक संख्या पद कहलाती है।
- **व्यापक सूत्र** को किसी अनुक्रम का जो प्रत्येक पद को बनाने के लिए उपयोग किया जा सकता है। व्यापक सूत्र वह सूत्र होता है जिसमें पद के मान की गणना करने के लिए पद की स्थिति संख्या का उपयोग किया जाता है।
- एक **पुनरावर्ती सूत्र** द्वारा अनुक्रम में आए पिछले पदों के मानों का उपयोग करते हुए किसी दिए गए पद का मान प्राप्त किया जाता है।
- **त्रिभुजाकार संख्या अनुक्रम** 1, 3, 6, 10, 15, ... द्वारा दिया जाता है। इस अनुक्रम का प्रत्येक पद, इस पद की स्थिति तक की सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल है। इस अनुक्रम का nवाँ पद $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ द्वारा दिया जाता है, जो प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योगफल का सूत्र भी है।
- एक **समानांतर श्रेढ़ी** संख्याओं की वह सूची है, जिसमें प्रथम पद के बाद प्रत्येक पद, पिछले पद में स्थिर संख्या d का योग करने पर प्राप्त होता है। यह स्थिर संख्या d **सार्व अंतर** कहलाता है।
- एक समानांतर श्रेढ़ी का nवाँ पद $t_n = a + (n-1)d$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ a प्रथम पद है तथा d एक सार्व अंतर है। समानांतर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., a + (n-1)d$ है।
- **गुणोत्तर श्रेढ़ी** संख्याओं की एक ऐसी सूची होती है, जिसमें पहले पद के बाद प्रत्येक पद को एक स्थिर (नियत) संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जाता है। इस स्थिर संख्या r को **सार्व अनुपात** कहा जाता है।
- किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद $t_n = ar^{(n-1)}$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ 'a' प्रथम पद है, 'r' सार्व अनुपात है। एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{(n-1)}$ है।
- फ्रैक्टल्स के अनेक उदाहरणों, जैसे — सिएरपिंस्की त्रिभुज और सिएरपिंस्की वर्ग कारपेट से गुणोत्तर श्रेढ़ियाँ प्राप्त होती हैं।

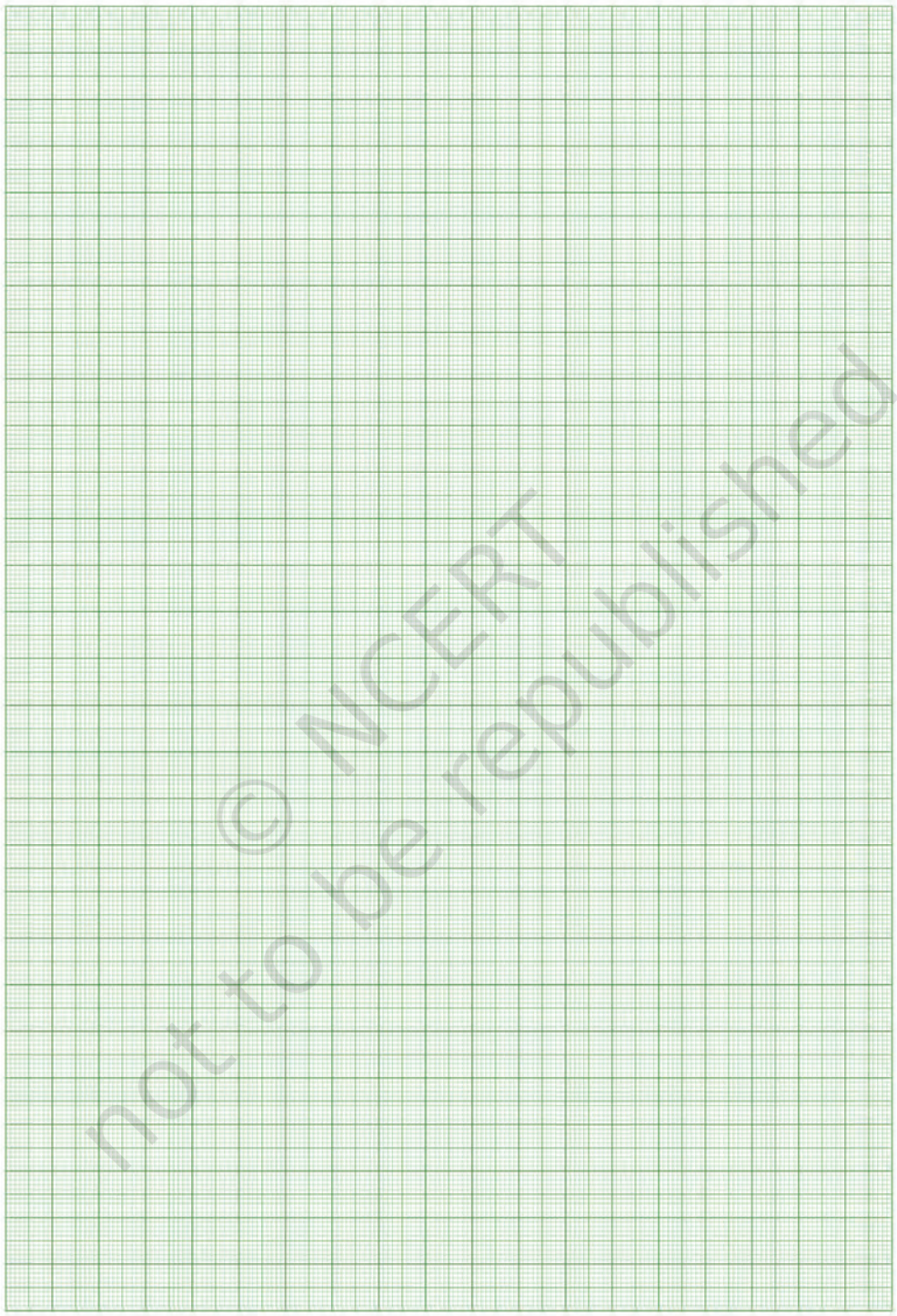
© NCERT not to be republished

आलेख पत्रक



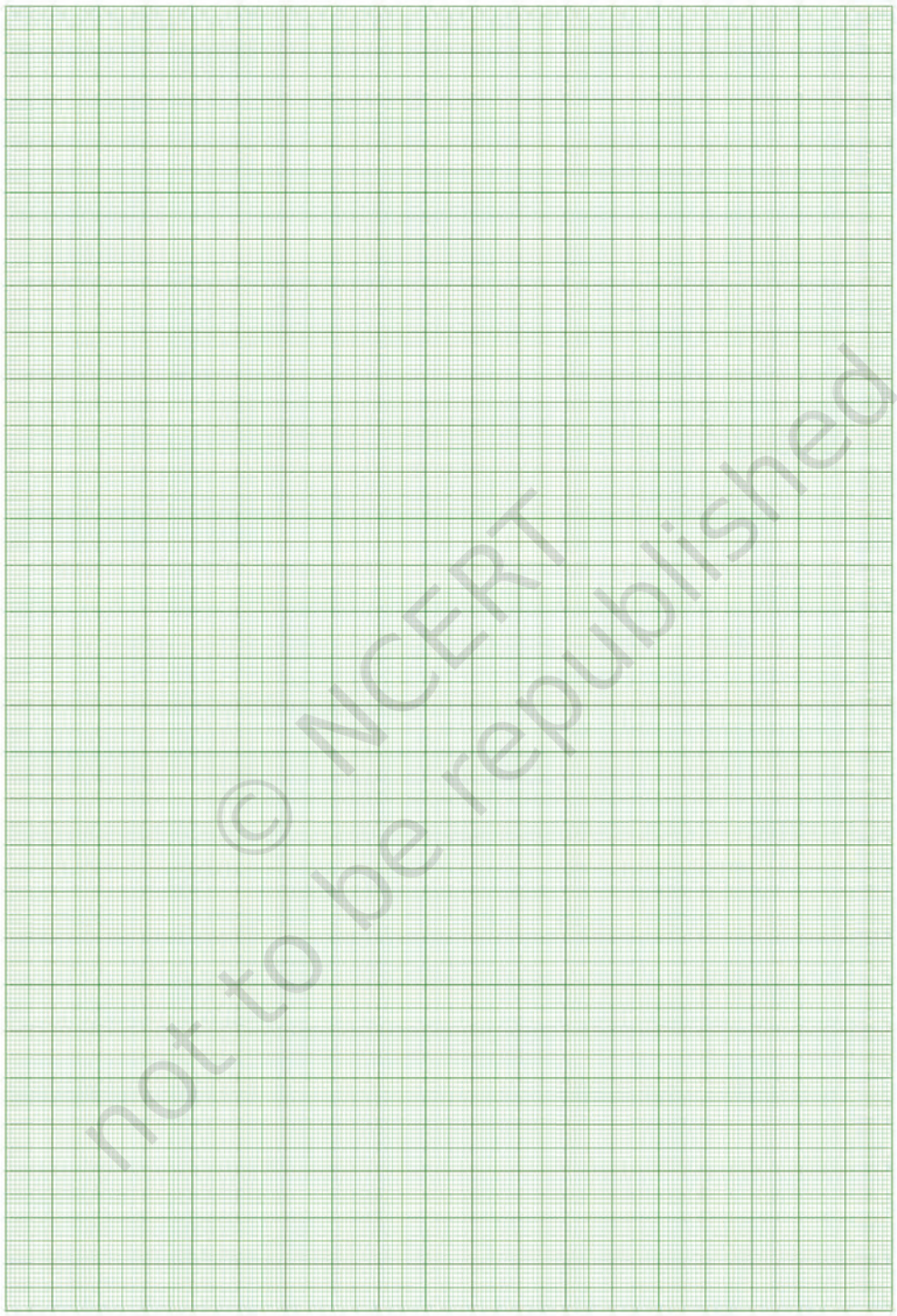
© NCERT not to be republished

आलेख पत्रक



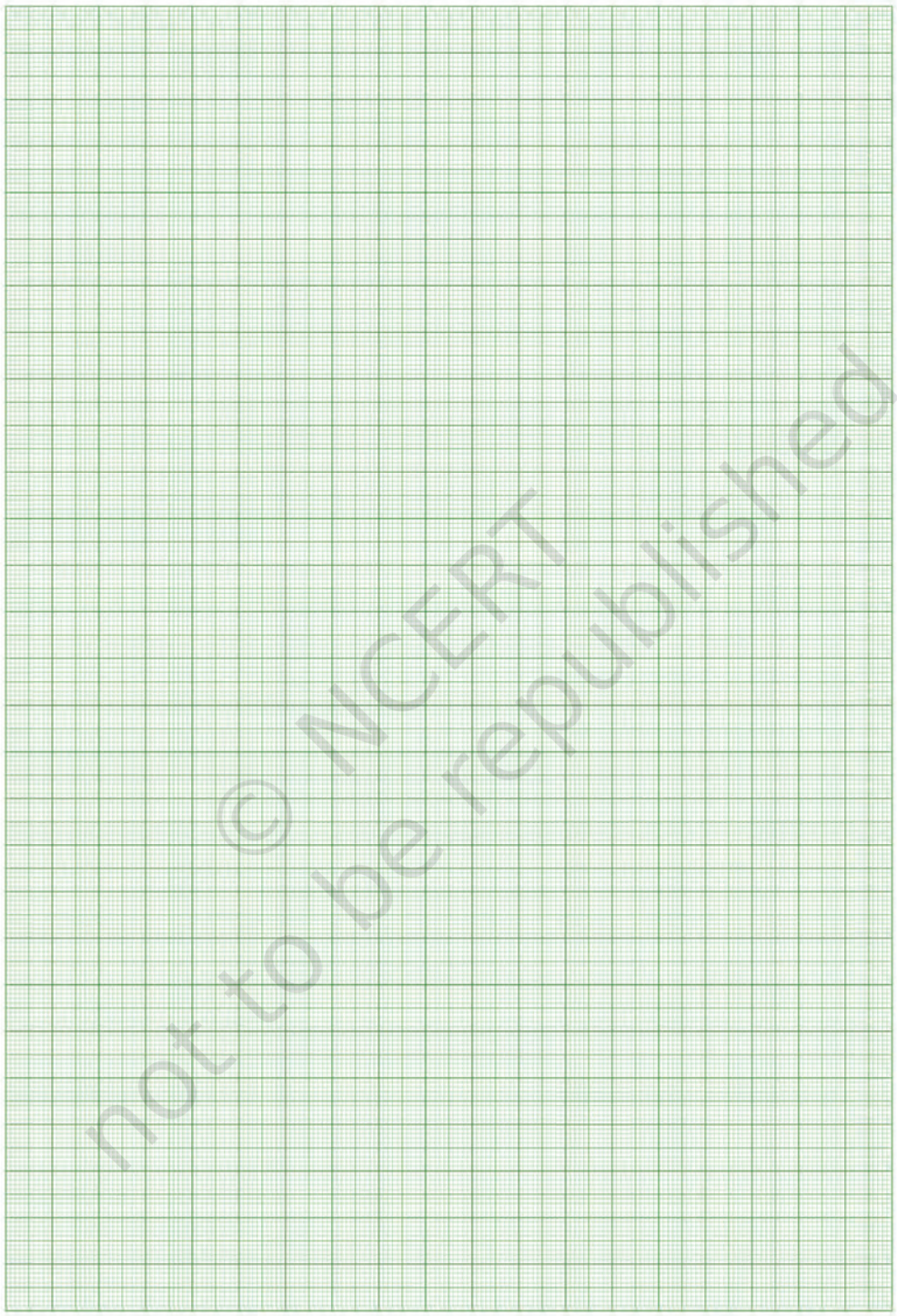
© NCERT not to be republished

आलेख पत्रक



© NCERT not to be republished

आलेख पत्रक



© NCERT not to be republished